ریاضی مهندسی

ریاضیات مهندسی

فهرست مطالب

فصل اول: سری فوریه، انتگرال و تبدیل فوریه

1-1) توابع متعامد

اگر مجموعه توابع $f_k(x)\ ,\ k=1,2,3,\mathbf{K}$ و تابع $h(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند، در اینصورت دو تابع $f_n(x),f_m(x)$ را نسبت به تابع وزنی $h(x)$ متعامد می‌گوئیم اگر

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)h(x)dx=0 \quad m\neq n$$

اگر رابطه‌ی فوق به ازای هر دو مقدار $m\neq n$ برقرار باشد در اینصورت مجموعه توابع $f_k(x)\ ,\ k=1,2,3,\mathbf{K}$ را یک مجموعه توابع متعامد نسبت به تابع وزنی $h(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ می‌نامیم.معمولاً $h(x)=1$ فرض می‌شود و ضرب داخلی دو تابع به صورت زیر معرفی می‌گردد

$$(f_n(x),f_m(x))=\int_a^b f_n(x)f_m(x)\,dx$$

بنابراین مجموعه توابع $f_k(x),k=1,2,\mathbf{K}$ را مجموعه توابع متعامد در بازه‌ی $[a,b]$ می‌نامیم اگر ضرب داخلی هر دو تابع متمایز از این مجموعه توابع برابر صفر باشد.

$$(f_n(x),f_m(x))=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \int_a^b f_n^2(x)dx, & m=n\end{cases}$$

نکته 1:

الف) مجموع توابع $\sin\frac{n\pi}{L}x, n=1,2,3,\mathbf{K}$ در بازه‌ی $[-L,L]$ و $[0,L]$ متعامد هستند.

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ L & ,m=n\end{cases}$$

$$\int_{0}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \frac{L}{2} & ,m=n\end{cases}$$

ب) مجموعه توابع $\cos\frac{n\pi}{L}x, n=1,2,\mathbf{K}$ در بازه‌های $[-L,L],[0,L]$ متعامد هستند.

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ L & ,m=n\end{cases}$$

$$\int_{0}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \frac{L}{2} & ,m=n\end{cases}$$

ج) توابع $\cos\frac{n\pi}{L}x$, $\sin\frac{n\pi}{L}x$ در بازه‌ی $[-L,L]$ متعامد هستند.

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx=0$$

ضمناً انتگرال‌های زیر صادق هستند:

$$\int_{0}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=0$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\int_{0}^{L}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx=0$$

$$\int_{0}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx=-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\Big|_{0}^{L}=-\frac{L}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$\int_{0}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\begin{cases}\frac{2L}{n\pi} & ,n=\text{فرد}\\ 0 & ,n=\text{زوج}\end{cases}$$

2-1) سری فوریه

اگر تابع $f(x)$ متناوب با دوره متناوب $T=2L$ باشد در اینصورت سری فوریه یا بسط فوریه متناظر با تابع $f(x)$ به صورت زیر معرفی می‌گردد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

با استفاده از نکته (1) روابط زیر برای ضرایب فوریه a_0, a_n, b_n به دست می‌آیند.

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx\,,n=1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\,,n=1,2,\ldots$$

با توجه به اینکه $f(x)$، $f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x$ و $f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ متناوب با دوره تناوب $T=2L$ هستند در انتگرال‌های فوق به جای بازه‌ی $[-L,L]$ از هر بازه با طول $2L$ می‌توانیم استفاده کنیم بنابراین روابط زیر صادق می‌باشند.

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{0}^{2L}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{0}^{2L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx\,,n=1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{0}^{2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\,,n=1,2,\ldots$$

در بعضی از کتاب‌ها در سری فوریه به جای $\frac{a_0}{2}$ از a_0 استفاده می‌کنند در اینصورت ضریب a_0 از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

نکته 2: مقدار ثابت سری فوریه $(\frac{a_0}{2})$ را مقدار میانگین یا متوسط تابع می‌نامیم

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{T}\text{(جمع جبری مساحت‌ها در یک دوره تناوب)}$$

نکته 3: سری فوریه توابع زوج

اگر تابع $f(x)$ زوج با دوره متناوب $T=2L$ باشد در اینصورت $f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ تابعی فرد است بنابراین

$$b_n = 0 \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\,, n = 1,2,\ldots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

نکته 4: سری فوریه توابع فرد

اگر تابع $f(x)$ فرد با دوره متناوب $T=2L$ باشد در اینصورت $f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x$ تابعی فرد است بنابراین

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_n = 0 \quad , n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\,, n = 1,2,\ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

نکته 5:

الف) فرض کنید تابع $f(x)$ فرد و متناوب با دوره‌ی متناوب $T=2L$ باشد. تابع $f(x)$ را در بازه‌ای به طول نیم پریود $(\mathbf{L})$ نسبت به محور $\mathbf{x}$ها قرینه کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\mathbf{L}$ حرکت می‌دهیم اگر نتیجه بر نیم پریود دیگر تابع منطبق گردد، روابط زیر صادق می‌باشد.

$$a_0 = a_n = 0 \quad , n = 1,2,\ldots$$

$$b_{2n} = 0, n = 1,2,\ldots$$

$$b_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$$

ب) فرض کنید تابع $f(x)$ زوج و متناوب با دوره‌ی متناوب $T=2L$ باشد. تابع $f(x)$ را در بازه‌ای به طـول نـیم پریـود $(\mathbf{L})$ نسبت به خط $y=\frac{a_0}{2}$ قرینه کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\mathbf{L}$ حرکت می‌دهیم اگر نتیجه بر نیم پریود دیگر تابع منطبق گردد، روابط زیر صادق است.

$$b_n=0\ ,\ a_{2n}=0\ \ ,\ n=1,2,\ldots$$

در این حالت اگر $\frac{a_0}{2}=0$ باشد برای محاسبه هارمونیک‌های فرد از رابطه‌ی زیر می‌توانیم استفاده کنیم.

$$a_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$$

ج) فرض کنید تابع متناوب $f(x)$ نه زوج و نه فرد باشد. تابع $f(x)$ را در بازه‌ای به طول نـیم پریـود (L) نسـبت بـه خـط $y=\frac{a_0}{2}$ قرینه کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\mathbf{L}$ حرکت می‌دهیم اگر نتیجه بر نیم پریود دیگر تابع منطبق گردد آنگاه

$$a_{2n}=b_{2n}=0,\ n=1,2,\ldots$$

در این حالت اگر $\frac{a_0}{2}=0$ باشد، هارمونیک‌های فرد از روابط زیر قابل محاسبه هستند.

$$a_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$$
$$b_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$$

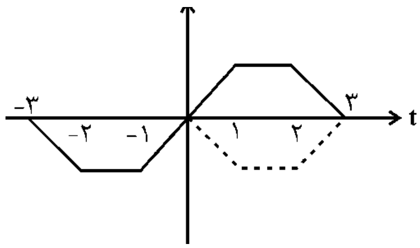
مثـــال ۱: در بســـط فوریـــه تـــابع $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{3}t+b_n\sin\frac{n\pi}{3}t$ **اگـــر در یـــک پریـــود (دوره متنـــاوب)**

$$f(t)=\begin{cases}-t-3 & -3\le t\le -2\\ -1 & -2\le t\le -1\\ t & -1\le t\le 1\\ 1 & 1\le t\le 2\\ -t+3 & 2\le t\le 3\end{cases}$$

باشد، آنگاه ضرایب غیرصفر فقط عبارتند از

1) n, a_n فرد　　2) $n\ ,\ a_n$ زوج　　3) n, b_n زوج　　4) n, b_n فرد

پاسخ: گزینه 4



با توجه به منحنی $f(t)$ در یک دوره متناوب، $f(t)$ تابع فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$ قرینه‌ی $f(t)$ را در بـازه‌ی $[0,3]$ نسبت به محور t ها به دست آورده و آن را به اندازه‌ی 3 به سمت چپ انتقال می‌دهیم که بر روی نیم پریود دیگـر تـابع قرار می‌گیرد بنابراین

$b_{2n=0}$, $n = 1,2,K$

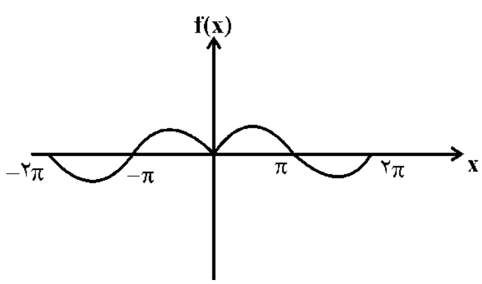
پس فقط b_{2n-1} مخالف صفر می‌باشد.

مثال ۲: هرگاه تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد، آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط چه ضرایبی ممکـن اسـت غیرصـفر باشند؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < 2\pi \\ -\sin x & -2\pi \le x < 0 \end{cases} \quad , f(x+4\pi) = f(x)$$

1) زوج کسینوسی 2) فرد کسینوسی 3) زوج سینوسی 4) فرد سینوسی

پاسخ: گزینه 2



با توجه به منحنی $f(x)$ در یک دوره متناوب، $f(x)$ تابعی زوج است بنابراین $b_n = 0$

با توجه به منحنی مقدا متوسط تابع صفر است یعنی $\frac{a_0}{2} = 0$.

اگر قرینه‌ی $f(x)$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ نسبت به خط $y = \frac{a_0}{2} = 0$ (محور $\mathbf{X}$ها) به دست آورده و به اندازه‌ی 2π به سمت چپ انتقال دهیم بر منحنی تابع در بازه‌ی $[-2\pi,0]$ منطبق می‌گردد بنابراین $a_{2n} = 0$ می‌باشد.

فقط a_{2n-1} (فرد کسینوسی) مخالف صفر می‌تواند باشد.

مثال ۳: سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با یک دوره متناوب $2L$ $f(x)=\begin{cases}1\ , & \frac{}{2}\geq x<\frac{}{2}\\ 0\ , & 0\leq x \leq \frac{L}{2}\ \text{یا}\ \frac{3L}{2}<x<2L\end{cases}$ **عبارت است از:**

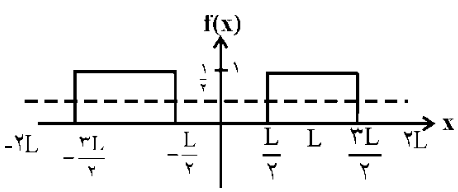
1) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x$

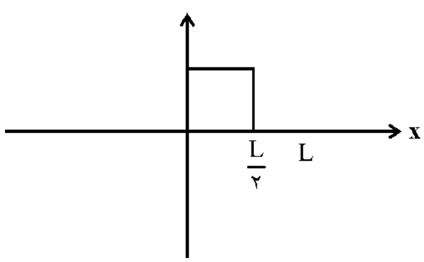
2) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+2}}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

3) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

4) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}x$

پاسخ: گزینه 4





تابع $f(x)$ زوج است بنابراین $b_n=0$ یعنی گزینه 2 و 3 نادرست هستند.

مقدار متوسط: $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}(L)=\frac{1}{2}$

قرینه‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $[0,L]$ نسبت به خط $y=\frac{1}{2}$ به صورت منحنی دوم است اگر آن را به اندازه‌ی $\mathbf{L}$ به سمت راست انتقال دهیم به روی نیم‌پریود دیگر $f(x)$ منطبق می‌گردد بنابراین $a_{2n}=0$

$$a_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$$

$$a_{2n-1}=\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x dx=\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\Big|_{\frac{L}{2}}^{L}$$

$$a_{2n-1}=\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(\frac{\pi}{2}-n\pi)$$

$$a_{2n-1} = -\frac{\text{[illegible]}}{(2n-1)\pi}\cos(n\pi) = \frac{\text{[illegible]}}{(2n-1)\pi}$$

بنابراین گزینه (4) صحیح است.

مثال ۴: سری فوریه تابع زیر کدام است؟

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi t}{4} & , -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi(\pi - t)}{4} & , \dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

1) $\sum_{n=1,3,5,K}^{\infty} -\frac{1}{n^2}\sin(nt)$

2) $\sum_{n=1,3,5,K}^{\infty} -\frac{1}{n\pi}\sin(nt)$

3) $\sum_{n=1,3,5,K}^{\infty} -\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(nt)$

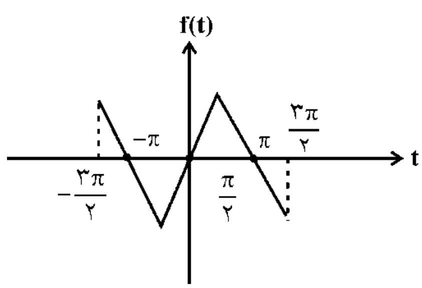
4) $\sum_{n=1,3,5,K}^{\infty} -\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\sin(nt)$

پاسخ: گزینه 4

تابع $f(t)$ متناوب با دوره‌ی متناوب $T = 2\pi$ است.

$$L = \pi \ , \ \frac{n\pi}{L} = n$$

منحنی $f(t)$ در بازه‌ی $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ به صورت زیر است:



تابع $f(t)$ فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

اگر منحنی $f(t)$ را در بازه‌ی $[-\pi, 0]$ نسبت به محور **t** ها قرینه کرده و به اندازه‌ی $L = \pi$ به سمت راست انتقال دهیم به روی نیم‌پریود دیگر $f(t)$ منطبق می‌شود بنابراین $b_{2n} = 0$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}t\,dt$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}t\sin\frac{(2n-1)\pi}{\pi}t\,dt = \left[-\frac{t}{2n-1}\cos(2n-1)t + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow b_n=\begin{cases}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}, n=1,3,5,\ldots\end{cases}$$

رابطه‌ی $\sin(\frac{n\pi}{2})=-(-1)^{\frac{n+1}{2}}, n=1,3,\ldots$ صادق است.

مثال ۵: در نمایش سری فوریه مثلثاتی تابع $F(t)=\sin^2 t\cos 2t$ **(با پریود** 2π**) به شکل** $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$:

1) $a_4=-\frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{2}, a_0=-\frac{1}{4}$

2) $a_4=-\frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{2}, a_0=-\frac{1}{2}$

3) $a_4=4, a_2=2, a_0=4$

4) $a_4=4, a_2=2, a_0=8$

پاسخ: گزینه 2

$$F(t)=\sin^2 t\cos 2t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\cos 2t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos^2 2t)$$
$$F(t)=\frac{1}{2}(\cos 2t-\frac{1}{2}(1+\cos 4t))=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\cos 4t$$

تابع $f(t)$ به صورت $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$ نوشته شده است بنابراین

$$a_0=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}, a_4=-\frac{1}{4}$$

1-3) همگرایی سری فوریه

در این بخش ابتدا با دو مفهوم پیوسته‌ی قطعه‌ای و هموار قطعه‌ای آشنا می‌شویم.

تابع $f(x)$ را در یک بازه پیوسته‌ی قطعه‌ای می‌نامیم اگر تعداد نقاط ناپیوستگی $f(x)$ در این بازه متناهی باشد و در هر نقطه‌ی ناپیوستگی حدود چپ و راست $f(x)$ موجود باشد.

اگر توابع $f(x)$, $f'(x)$ در یک بازه پیوسته‌ی قطعه‌ای باشند آنگاه تابع $f(x)$ را هموار قطعه‌ای می‌نامیم.

همگرایی سری فوریه (شرایط دیریکله):

تابع متناوب $f(x)$ با دوره متناوب $T=2L$ مفروض است. اگر $f(x)$ در $(-L,L)$ هموار قطعه‌ای باشد آنگاه سری فوریه‌ی $f(x)$ به مقدار زیر همگرا می‌باشد.

الف) اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد سری فوریه $f(x)$ به $f(a)$ همگرا می‌باشد.

ب) اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ ناپیوسته باشد سری فوریه $f(x)$ به میانگین حدود چپ و راست تابع همگرا می‌باشد.

مقدار سری فوریه در نقطه‌ی $\mathbf{a}$ = $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a^-} f(x)+\lim_{x\to a^+} f(x)\right]$

ج) سری فوریه‌ی $f(x)$ در نقاط انتهایی بازه $x=-L, x=L$ به مقدار زیر همگرا می‌باشد.

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-L)^+} f(x)+\lim_{x\to L^-} f(x)\right]$$

مثال 6: تابع $f(x)$ در یک دوره متناوب به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad -3\le x<-1 \\ |x| & , \quad -1\le x<0 \\ x^2 & , \quad 0\le x<2 \\ x+5 & , \quad 2\le x\le 3 \end{cases}$$

مقدار سری فوریه $f(x)$ را در نقاط 26 و 3 و 3- و 2 و 0 و 1- و 2-=**x** تعیین کنید.

پاسخ: اگر مقدار سری فوریه‌ی $f(x)$ را با $f_s(x)$ نشان دهیم آنگاه

$$f_s(-2)=f(-2)=2$$

$$f_s(-1)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-1)^-} f(x)+\lim_{x\to(-1)^+} f(x)\right]=\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$$

$$f_s(0)=f(0)=0$$

$$f_s(2)=\frac{1}{2}(4+7)=\frac{11}{2}$$

$$f_s(-3)=f_s(3)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-3)^+} f(x)+\lim_{x\to 3^-} f(x)\right]=\frac{1}{2}(2+8)=5$$

چون دوره متناوب $f(x)$ برابر $T=6$ می‌باشد بنابراین

$$f_s(26)=f_s(26-24)=f_s(2)=\frac{11}{2}$$

1-4) بسط نیم دامنه (سری فوریه سینوسی کسینوسی)

سری فوریه کسینوسی:

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ مفروض است. این تابع را به یک تابع زوج متناوب مانند $g(x)$ بسط می‌دهیم.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,0<x<L \\ f(-x) & ,-L<x<0 \end{cases} ,g(x+2L)=g(x)$$

سری فوریه‌ی تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[0,L]$، سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ می‌باشد.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \ , \ 0\le x\le L$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\,, n=1,2\,,\ldots$$

نکته 6: همگرایی سری فوریه کسینوسی

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ هموار قطعه‌ای باشد آنگاه سری فوریه کسینوسی $f(x)$ همگراست.

الف) اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $a\in(0,L)$ پیوسته باشد آنگاه سری فوریه کسینوسی در این نقطه به $f(a)$ همگرا می‌باشد.

ب) اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $a\in(0,L)$ ناپیوسته باشد آنگاه سری فوریه کسینوسی در این نقطه به $\frac{1}{2}\left[f(a^-)+f(a^+)\right]$ همگرا می‌باشد.

ج) سری فوریه کسینوسی در $x=0$ به $f(0^+)$ و در $x=L$ به $f(L^-)$ همگرا می‌باشد.

سری فوریه سینوسی:

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ مفروض است. این تابع را به یک تابع فرد متناوب مانند $g(x)$ بسط می‌دهیم.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ 0<x<L \\ -f(-x) & ,-L<x<0 \end{cases} \quad ,g(x+2L)=g(x)$$

سری فوریه‌ی تابع $g(x)$، در بازه‌ی $[0,L]$ سری فوریه سینوسی $f(x)$ می‌باشد.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \ , \ 0\le x\le L$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\ dx \ , \ n=1,2,3,\ldots$$

نکته 7: همگرایی سری فوریه سینوسی

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ هموار قطعه‌ای باشد آنگاه سری فوریه سینوسی $f(x)$ همگرا می‌باشد.

ب) اگر $f(x)$ در نقطه‌ی $a \in (0 , L)$ ناپیوسته باشد آنگاه سری فوریه سینوسی در این نقطـه بـه مقـدار $\frac{1}{2}\left[f(a^{-})+f(a^{+})\right]$ همگرا می‌باشد.

ج) در نقاط $x = L , x = 0$ سری فوریه سینوسی به صفر همگرا می‌باشد.

مثال 7: برای تابع زیر ضرایب سری فوریه کسینوسی و سینوسی را تعیین کرده و منحنی دو سری را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & , \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

پاسخ:

سری فوریه کسینوسی

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx\right] = 3$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos nx dx\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] = -\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & , n = 2K \\ (-1)^{K+1} & , n = 2K-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^K}{(2K-1)\pi}\cos(2K-1)x$$

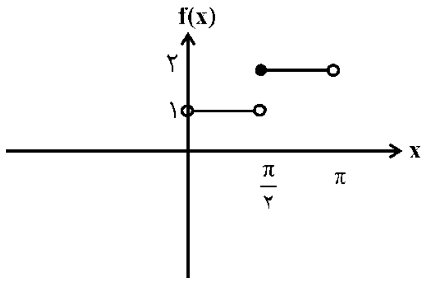
سری فوریه سینوسی:

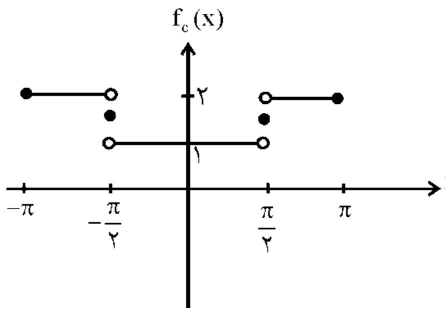
$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(nx)\,dx\right]$$

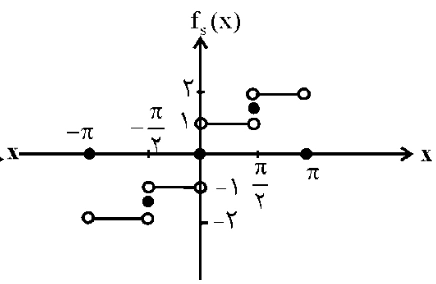
$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n}\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n\right]$$

$$f(x)=\frac{}{\pi}\sum_{n=1}\frac{}{n}(\cos\frac{}{2}+1-2(-1)^{n})\sin(nx)$$







$f_s(x), f_c(x)$ به ترتیب سری فوریه کسینوسی و سینوسی را در یک دوره تناوب $[-\pi,\pi]$ نشان می‌دهند.

$$f_c(0)=1, f_c(\frac{\pi}{2})=f_c(-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{2}, f_c(-\pi)=f(\pi)=2$$

$$f_s(0)=f_c(\pi)=f_s(-\pi)=0, f_s(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{2}\ ,\ f_s(-\frac{\pi}{2})=-\frac{3}{2}$$

مثال ۸: چنانچه تابع $f(t)$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل تعریف شده باشد $f(t)=\begin{cases}0 & , -3<t<0\\ \sin\frac{\pi}{3}t & , 0\le t\le 3\end{cases}$ **در بسط فوریه آن به صورت** $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{3}t+b_n\sin\frac{n\pi}{3}t)$ **کدام گزینه صحیح است؟**

1) $a_0=\frac{2}{\pi}$

2) همه‌ی a_n ها بجز، a_0، صفرند

3) بجز b_1 که مساوی $\frac{1}{2}$ است بقیه b_n ها صفرند

4) بجز b_1 که مساوی $\frac{1}{2}$ و b_2 که مساوی $\frac{1}{8}$ است بقیه‌ی b_n ها صفرند.

پاسخ: گزینه 3

$$a_0=\frac{1}{6}\int_0^3\sin\frac{\pi}{3}t\,dt=\frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin\frac{\pi}{3}t\sin\frac{n\pi}{3}tdt \quad n = 1, 2, \ldots$$

در بسط سینوسی تابع $0 < t < 3$ و $y = \sin\frac{\pi}{3}t$ ضرایب b'_n برابرند با

$$b'_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin\frac{\pi}{3}t\sin\frac{n\pi}{3}tdt$$

$$b'_1 = 1, b'_n = 0, n = 2, 3, \ldots$$

با توجه به تعریف b_n, b'_n:

$$b_n = \frac{1}{2}b'_n$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \ , \ b_n = 0 \ , n = 2, 3, \ldots$$

بنابراین گزینه صحیح، گزینه 3 است. ضرایب a_n نیز به صورت زیر قابل محاسبه‌اند.

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^3 \sin\frac{\pi}{3}t\cos\frac{n\pi}{3}t\,dt = \frac{1}{6}\int_0^3 (\sin\frac{\pi}{3}(1+n)t + \sin\frac{\pi}{3}(1-n)t)dt$$

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{3}(1+n)t}{1+n} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}(1-n)t}{1-n}\right]_0^3$$

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\pi(1+n)}{1+n} + \frac{\cos\pi(1-n)}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$a_n = \frac{\cos\pi n + 1}{2\pi}\,\frac{2}{1-n^2} = \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} = \begin{cases} 0 \ , \ n = \text{فرد} \\ \dfrac{2}{\pi(1-n^2)} \ , \ n = \text{زوج} \end{cases}$$

5-1) انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از سری فوریه

انتگرال‌گیری از سری فوریه:

اگر سری فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر موجود باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

آنگاه

$$\int f(x)dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x - b_n\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x) + c$$

نکته 8: اگر $\frac{a_0}{2} \neq 0$ باشد با انتگرال‌گیری از سری فوریه $f(x)$، سری فوریه‌ی $\int f(x)dx$ به دست نمی‌آید بلکه سری

فوریه‌ی تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ حاصل می گردد.

نکته 9: مقدار C در رابطه‌ی فوق، مقدار ثابت بسط فوریه‌ی $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ می‌باشد که از فرمول‌های گفته شده در مورد ضرایب فوریه به دست می‌آید. اگر تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ فرد باشد آنگاه $c=0$ می‌باشد.

مشتق‌گیری از سری فوریه:

اگر بسط متناوب $f(x)$ پیوسته بوده و $f'(x)$ هموار قطعه‌ای باشد آنگاه سری فوریه تابع $f'(x)$ از مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوریه‌ی $f(x)$ حاصل می‌شود و سری حاصل از مشتق‌گیری در هر نقطه x به مقدار $\frac{1}{2}\left[f'(x^+)+f'(x^-)\right]$ همگرا می‌باشد.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x)$$

مثال ۹: از روی سری فوریه تابع $f(x)=x,-\pi<x<\pi$**، سری فوریه تابع** $g(x)=x^2,-\pi<x<\pi$ **را تعیین کنید.** $(T=2\pi)$

پاسخ:

تابع $f(x)$ فرد است بنابراین:

$$L=\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=n$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}x\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$b_n=-\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$$

از سری فوریه فوق انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^n\cos(nx)+c$$

تابع $f(x)=x$ فرد است بنابراین با انتگرال‌گیری به تابع زوج می‌رسیم. مقدار ثابت C با ضریب $\frac{a_0}{2}$ در بسط فوریه برابر است.

$$C=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\;}{2}=\frac{\;}{6}+\sum_{n=1}\frac{\;}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

مثال ۱۰: اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $0<x<\pi$ ، $f(x)=x$ به صورت زیر باشد $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\mathbf{K})$ بسط به سری فوریه سینوسی $0<x<\pi$ ، $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$ برابر است با:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{(2n)^3}$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n^3}$　　4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

پاسخ: گزینه 4

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

از رابطه‌ی فوق انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x+c$$

چون از یک تابع زوج (سری کسینوسی) انتگرال گرفته‌ایم بنابراین تابع حاصل فرد است یعنی $C=0$

$$\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$$

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$$

$$\frac{\pi}{8}x(\pi-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$$

تساوی پارسوال:

اگر تابع $f(x),-L<x<L$ در شرایط دیریکله صدق کند و سری فوریه آن به صورت $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$ باشد آنگاه تساوی پارسوال به صورت زیر صادق است

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

اگر در سری فوریه به جای $\frac{a_0}{2}$ از a_0 استفاده شود در اینصورت در تساوی پارسوال به جای $\frac{a_0^2}{2}$، $2a_0^2$ قرار می‌گیرد.

نکته 10. فرض کنید تابع $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی از توابع $\sin\frac{n\pi}{L}x$ و $\cos\frac{n\pi}{L}x$ و مقدار ثابت تقریب بزنیم در اینصورت اگر ضرایب ترکیب خطی را برابر ضرایب فوریه در نظر بگیریم مقدار خطای تقریب مینیمم خواهد بود و مقدار این خطا از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود.

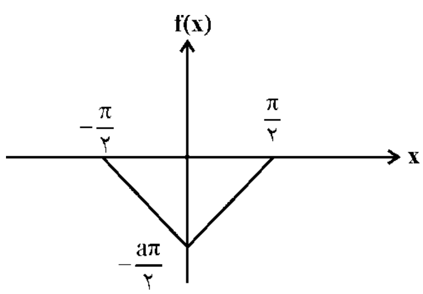
$$\text{حداقل خطای مربعات} = \int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx - L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{K}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$

مثال ۱۱: از میان کلیه توابع مجموعه $\{\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x\,;\alpha,\beta,\gamma \in R\}$ **کدامیک به تابع زیر نزدیکتر هستند (به معنی کمترین مربعات)**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -a(x+\frac{\pi}{2}) & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ a(x-\frac{\pi}{2}) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

1) $-\frac{a\pi}{4} - \frac{2a}{\pi}\cos x$ 2) $-\frac{a\pi}{8} - \frac{2a}{\pi}\cos x$ 3) $-\frac{a\pi}{8} + \frac{2a}{\pi}\cos x$ 4) $-\frac{a\pi}{8} - \frac{2a}{\pi}\cos x + \frac{2a}{\pi}\sin x$

پاسخ: گزینه 2



تابع $f(x)$ زوج است بنابراین $\gamma = 0$ می‌باشد.

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{-\frac{a\pi}{2}\pi}{2} = -\frac{a\pi}{8}$$

$$\beta = a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(x-\frac{\pi}{2})\cos x\,dx = \frac{2a}{\pi}\left[(x-\frac{\pi}{2})\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\beta = -\frac{2a}{\pi}$$

مثال ۱۲: تابع متناوب f در یک دوره تناوب به صورت $f(t)=\begin{cases} \\ 2-t, & 1\le t\le 2\end{cases}$ **تعریف می‌شود. در اینصورت مقدار انتگرال روبرو کدام است؟**

$$\int_0^2 \left[f(t)-\sin\pi t-\sin 2\pi t\right]^2 dt$$

$\frac{2}{3}$ (1   2 (2   3 (3 $\frac{8}{3}$ (4

پاسخ: گزینه 4

$f(t)$ تابعی متناوب زوج است.

$$L=1 \Rightarrow \frac{n\pi}{L}=n\pi$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)$$

تساوی پارسوال:

$$\frac{2}{1}\int_0^1 f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$2\int_0^1 f^2(t)\,dt=2\int_0^1 t^2 dt=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{2}{3}$$

$$g(t)=f(t)-\sin\pi t-\sin 2\pi t=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)-\sin\pi t-\sin 2\pi t$$

برای تابع $g(t)$ تساوی پارسوال به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{1}\int_0^2 g^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+(-1)^2+(-1)^2=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 f(t)-\sin\pi t-\sin 2\pi t)^2 dt=\frac{8}{3}$$

6-1) سرعت همگرایی ضرایب فوریه

تابع متناوب $f(x)$ با دوره متناوب $T=2L$ مفروض است. اگر $f(x)$ در شرایط دیریکله صدق کند و در نقاط $x_i\ ;i=1,2,\ldots,K$ واقع در بازه‌ی $f(x),[-L,L)$ ناپیوسته با مقادیر جهش زیر باشد

$$J_i=\lim_{x\to x_i^+} f(x)-\lim_{x\to x_i^-} f(x)\quad ;i=1,2,\ldots,K$$

در اینصورت ضرایب فوریه از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n - \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{K} J_i \sin(\frac{n\pi}{L} x_i)$$

$$b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n + \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{K} J_i \cos(\frac{n\pi}{L} x_i)$$

در روابط فوق a'_n , b'_n ضرایب فوریه‌ی تابع $f'(x)$ می‌باشند.

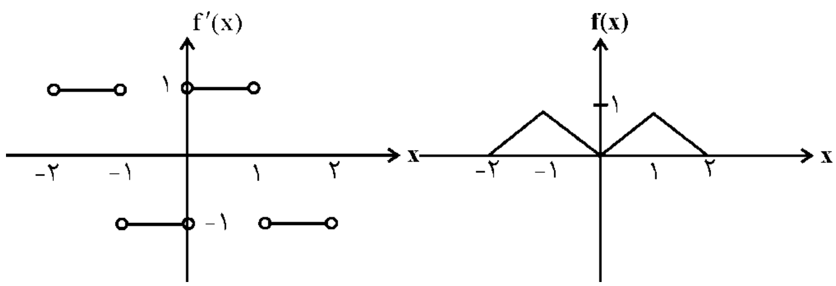
مثال ۱۳: سری فوریه تابع متناوب $f(x) = |x|; -1 \le x \le 1, f(x+2) = f(x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: تابع $f(x)$ زوج است بنابراین

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L} x$$

$$L = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$



$$a_n = -\frac{1}{n\pi} b'_n - \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{K} J_i \sin(n\pi x_i)$$

تابع $f(x)$ در هیچ نقطه‌ای ناپیوستگی ندارد بنابراین:

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} b'_n$$

$$b'_n = \frac{1}{n\pi} a''_n + \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{K} J'_i \cos(n\pi x_i)$$

تابع $f(x)$ در هر زیر بازه چند جمله‌ای درجه یک است بنابراین $f'(x)$ به صورت مقدار ثابت بوده و $f''(x)$ برابر صفر است

پس $a''_n = 0$

$$b'_n = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{K} J'_i \cos(n\pi x_i)$$

در بازه‌ی $[-1,1)$ نقاط ناپیوستگی $f'(x)$ به صورت $x = -1, 0$ می‌باشند بنابراین

$$x_1 = -1 \Rightarrow J'_1 = f'((-1)^+) - f'((-1)^-) = -2$$

$$x_2 = 0 \to J_2 = f'(0^+) - f'(0^-) = 2$$

$$b'_n = \frac{1}{n\pi}(-2\cos(-n\pi) + 2\cos(0)) = \frac{1}{n\pi}(-2(-1)^n + 2) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} b'_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = \text{فرد} \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^2} & , n = \text{زوج} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$$

نکته 11: الف) اگر تابع $f(x)$ دارای سری فوریه با ضرایب a_0، a_n و b_n باشد در اینصورت

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ب) حداقل سرعت همگرایی ضرایب a_n, b_n به صفر هم ارز با $\frac{K}{n}$ است $(K \in R)$ بنابراین دنباله‌هایی مانند $\frac{n^2}{2n^2+3}$ ، $\frac{n+1}{n\sqrt{n}+5}$ که هم‌ارز $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ می‌باشند. نمی‌توانند ضرایب فوریه‌ی یک تابع باشند ولی دنباله‌های $\frac{1}{2n^2+3n+1}$ و $\frac{n+2}{n^2+5}$ می‌توانند نشان دهنده‌ی ضرایب فوریه باشند چون هم ارز $\frac{1}{2n^2}$ و $\frac{1}{n}$ هستند.

نکته 12: اگر توابع $f(x), f'(x), \ldots, f^{(m-1)}(x)$ پیوسته و تابع $f^{(m)}(x)$ ناپیوسته باشد آنگاه حداقل یکی از ضرایب a_n یا b_n با سرعت همگرایی $\frac{K}{n^{m+1}}$ به صفر میل می‌کند و سرعت همگرایی ضریب دیگر به صفر حداقل برابر $\frac{K}{n^{m+1}}$ می‌باشد.

بنابراین نتیجه زیر صادق است

اگر تابع $f(x)$ نقطه‌ی ناپیوستگی داشته باشد آنگاه حداقل یکی از ضرایب a_n یا b_n با سرعت $\frac{K}{n}$ به صفر همگرا می‌باشد و سرعت همگرایی ضریب دیگر حداقل $\frac{K}{n}$ می‌باشد.

مثال ۱۴: توابع $f(x), f'(x)$ پیوسته و تابع $f''(x)$ نقطه‌ی ناپیوستگی دارد. کدام گزینه در مورد سرعت همگرایی ضرایب فوریه‌ی تابع $f(x)$ می‌تواند صادق باشد.

1) سرعت همگرایی a_n, b_n به صفر برابر $\frac{K}{n^2}$ باشد.

2) سرعت همگرایی a_n به صفر برابر $\frac{K}{n^2}$ و سرعت همگرایی b_n به صفر برابر $\frac{K}{n^3}$ باشد.

3) سرعت همگرایی a_n به صفر برابر $\frac{K}{n^3}$ و سرعت همگرایی b_n به صفر برابر $\frac{K}{n^4}$ باشد.

4) سرعت همگرایی b_n, a_n به صفر برابر $\frac{}{n^4}$ باشد.

پاسخ: گزینه 3

چون $f'(x), f(x)$ پیوسته و $f''(x)$ ناپوسته است بنابراین حداقل یکی از ضرایب a_n یا b_n دارای سرعت همگرایی $\frac{K}{n^3}$ می‌باشد و سرعت همگرایی ضریب دیگر به صفر حداقل برابر $\frac{K}{n^3}$ خواهد بود.

مثال ۱۵: در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب b_n, a_n به صورت زیر به دست آمده است.

$b_n = \frac{4n\pi(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2}$, $n \neq 0$, $a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4\pi^2 n^2}$ **آنگاه.**

1) تابع $f(x)$ و مشتقات اول و دوم آن پیوسته بوده است ولی مشتقات مرتبه بالاتر ناپیوسته می‌باشد.

2) عبارت داده شده برای b_n, a_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشند.

3) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.

4) ضرایب فوریه نمی‌توانند پیوسته و یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

پاسخ: گزینه 3

سرعت همگرایی ضرایب a_b, a_n به صفر به ترتیب برابر $\frac{K}{n}, \frac{K}{n^2}$ می‌باشد یعنی حداقل سرعت همگرایی آن‌ها برابر $\frac{K}{n}$ است بنابراین براساس نکته (12)، تابع $f(x)$ حداقل یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود خواهد داشت.

نکته 13: محاسبه سری‌ها با استفاده از سری فوریه

برای تعیین مقدار یک سری با استفاده از سری فوریه‌ی یک تابع، جمله‌ی عمومی سری را از لحاظ سرعت همگرایی با ضرایب فوریه مقایسه می‌کنیم در اینصورت حالات زیر امکان‌پذیر است.

الف) اگر سرعت همگرایی هر دو یکسان باشد در اینصورت با عددگذاری مناسب در سری فوریه، احتمالاً مقدار سری قابل محاسبه است.

ب) اگر سرعت همگرایی در سری $\frac{K_1}{n^{2m}}$ و در ضرایب سری فوریه $\frac{K_2}{n^m}$ باشد.

$(K_1, K_2 \in R)$ در اینصورت احتمالاً با استفاده از تساوی پارسوال در سری فوریه، مقدار سری قابل محاسبه است.

ج) اگر سرعت همگرایی در سری $\frac{K_1}{n^{m+1}}$ و در ضرایب سری فوریه $\frac{K_2}{n^m}$ باشد در اینصورت احتمالاً با انتگرال گیری از سری فوریه و سپس عددگذاری مناسب، مقدار سری قابل محاسبه است.

د) اگر سرعت همگرایی در سری $\frac{1}{n^{m-1}}$ و در ضرایب سری فوریه $\frac{1}{n^{m}}$ باشد در اینصورت احتمالاً با مشتق‌گیری از سری فوریه و سپس عددگذاری مناسب، مقدار سری قابل محاسبه است.

مثال ۱۶: اگر بسط فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=\sin x\,,0<x<\pi$ به صورت زیر باشد.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\cos nx$$

آنگاه مقدار سری مقابل $\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\dots$

برابر است با: (برق ــ ۷۱)

1) $\frac{\pi^2-8}{8}$ 2) $\frac{\pi^2-8}{4}$ 3) $\frac{\pi^2-8}{16}$ 4) $\frac{\pi^2-8}{12}$

پاسخ: گزینه 3

$$S=\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2K-1)^2(2K+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4K^2-1)^2}$$

$$1+\cos n\pi=\begin{cases}0 & ,\quad n=\text{فرد}\\ 2 & ,\quad n=\text{زوج}\end{cases}$$

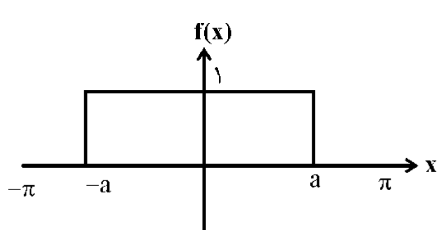
$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4K^2-1}\cos 2kx$$

با مقایسه‌ی ضرایب فوریه و جمله عمومی سری **S**، از تساوی پارسوال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{(4K^2-1)^2}$$

$$1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}S\Rightarrow S=\frac{\pi^2-8}{16}$$

مثال ۱۷: به کمک تابع نشان داده شده در شکل مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}$ برابر است با:



1) πa 2) $\pi-a$ 3) $\frac{\pi-a}{2}$ 4) $a(\pi-a)$

پاسخ: گزینه 3

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a dx = \frac{2a}{\pi} \quad , \quad \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^a = \frac{2}{\pi n}\sin(na)$$

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin(na)\cos(nx)$$

در نقطه‌ی $x = 0$ تابع $f(x)$ پیوسته بوده و $f(0) = 1$ است بنابراین:

$$1 = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$$

مثال ۱۸: اگر $f(x) = 2x + 1 \,,\, -\pi < x < \pi$ **دارای سری فوریه** $f(x) = 1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n}$ **باشد. کدامیک از عبارت‌های زیر درست خواهد بود؟**

1) با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوق می‌توان سری فوریه تابع $f(x) = x^2 + x, -\pi < x < \pi$ را به دست آورد.

2) با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوق می‌توان سری فوریه تابع $g(x) = 2, -\pi < x < \pi$ را به دست آورد.

3) حد سری متناوب $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \mathbf{K}$ برابر $\frac{\pi}{4}$ حاصل می‌شود.

4) مقدار تابع $\mathbf{f}$ در نقطه ناپیوستگی $x = \pi$ بر حسب سری فوریه فوق برابر $f(\pi) = 2$ خواهد بود.

پاسخ: گزینه 3

$$2x + 1 = 1 - 4\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

از سری فوریه فوق انتگرال می‌گیریم:

$$x^2 + x = x + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + c$$

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + c$$

بنابراین با انتگرال‌گیری از سری فوریه $f(x)$، سری فوریه x^2 حاصل می‌شود نه سری فوریه‌ی $x^2 + x$، بنابراین گزینه 1 نادرست است.

بسط متناوب $f(x)$ پیوسته نمی‌باشد بنابراین نمی‌توانیم از سری فوریه $f(x)$ مشتق بگیریم. بنابراین گزینه 2 نادرست است.

مقدار سری فوریه در $x = \pi$ برابر است با:

$$\frac{1}{2}(\lim_{x\to\pi^-} f(x)+\lim_{x\to(-\pi)^+} f(x))=\frac{1}{2}(2\pi+1-2\pi+1)=1$$

بنابراین گزینه 4 نادرست است.

تابع $f(x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته بوده و $f(\frac{\pi}{2})=\pi+1$ بنابراین:

$$\pi+1=1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2K-1}\sin\frac{(2K-1)\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{K+1}}{2K-1}=\frac{\pi}{4}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\mathbf{K}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۹: بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|:-\pi\le x\le\pi$ برابر است با $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\mathbf{K})$ در اینصورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ با کدام گزینه برابر است؟

1) $\frac{\pi^3}{32}$ 2) $\frac{\pi^2}{32}$ 3) $\frac{\pi^3}{16}$ 4) $\frac{3\pi^3}{32}$

پاسخ: گزینه 1

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\mathbf{K})\quad,\quad -\pi\le x\le\pi$$

از طرفین تساوی فوق از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x|\,dx=\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\mathbf{K})dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\mathbf{K})dx=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\mathbf{K}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{32}\Rightarrow\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\mathbf{K}=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0} \frac{\grave{}\ \acute{}}{(2n+1)^3} = \frac{}{32}$$

7-1) سری فوریه مختلط

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی متناوب $T=2L$ باشد در اینصورت

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$$

ضرایب C_n را ضرایب مختلط فوریه می‌نامیم.

نکته 14: سری فوریه مختلط در نقاط پیوستگی $f(x)$ به مقدار تابع همگرا می‌باشد و اگر $f(x)$ در $x=a$ ناپیوسته باشد در اینصورت سری فوریه مختلط در $x=a$ به مقدار $\frac{1}{2}\left[f(a^-)+f(a^+)\right]$ همگرا خواهد بود.

نکته 15: بین ضرایب فوریه (b_n, a_n) و ضرایب مختلط فوریه (c_n) روابط زیر صادق می‌باشد.

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \Rightarrow \begin{matrix} a_n = 2\,\mathrm{Re}(C_n) \\ b_n = -2\,\mathrm{Im}(C_n) \end{matrix}$$

مثال ۲۰: صورت مختلط سری فوریه‌ی تابع $f(x)=e^x; -\pi<x<\pi, f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید و با استفاده از آن صورت حقیقی سری فوریه را تعیین کنید.

پاسخ:

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x . e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in} e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right]$$

$$C_n = \frac{\text{[illegible]}}{2\pi(1-in)}$$

$$C_n = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n(1+in)}{2\pi(1+n^2)}$$

$$C_n = \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n$$

سری فوریه مختلط:

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n e^{inx}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -\frac{2\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\sinh\pi}{\pi}$$

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

۱ــ سری فوریه تابع دوره‌ای $f(t)$ با دوره T: $T=4$ ، $f(t)=\begin{cases}2 \ , & -1<t<1 \\ 0 \ , & 1<t<3\end{cases}$ کدام است؟

1) $1+\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}t+\mathbf{K}\right]$

2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos\pi t-\frac{1}{3}\cos 3\pi t+\mathbf{K}\right]$

3) $1+\frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t+\mathbf{K}\right]$

4) $1+\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t+\mathbf{K}\right]$

۲ــ اگر برای $-\pi<x<\pi$ داشــته باشــیم $x=2(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\mathbf{K})$ در اینصــورت عبــارت $(\pi-x)(x+\pi)$ در بــازه $-\pi<x<\pi$ با کدام گزینه برابر است؟

1) $\pi^2-4(\sin^2 x-\frac{\sin^2 2x}{4}+\ldots$

2) $\frac{\pi^2}{2}-4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\mathbf{K})$

3) $\frac{2\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\mathbf{K})$

4) $\frac{\pi^2}{3}+4(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\mathbf{K})$

۳ــ سری فوریه $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x\,, & -\pi<x<0 \\ \frac{\pi}{2}-x\,, & 0<x<\pi\end{cases}$ ، به کدام صورت است؟

1) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx$

2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\cos nx$

3) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx$

4) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sin nx+(-1)^n\cos nx\right]$

۴ــ سری فوریه تابع $f(x)=\cos\frac{x}{2}, -\pi\le x\le\pi$ عبارتست از:

1) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nx$

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{1-4n^2}\cos nx$

3) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nx$

4) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{1-4n^2}\cos nx$

۵ــ در بسط به سری فوریه تابع **f** با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sin x\,, & -\pi<x<0 \\ 0\,, & 0<x<\pi\end{cases}$ مقدار b_1 کدام است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) -2 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

۶ـضریب بسط فوریه $a_n , n \neq 0$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$ اگر پریود $T = 10$ باشد، کدام است؟

1) صفر　　2) 3　　3) $\cos\frac{n\pi}{5}x$　　4) $\sin\frac{n\pi}{5}x$

۷ـمقدار سری فوریه تابع متناوب $P = 2\pi$ ، $f(x) = x^2 + x, -\pi < x < \pi$ در نقطه $x = \pi$ کدام است؟

1) π　　2) π^2　　3) $\frac{\pi^2}{4}$　　4) $\pi^2 + \pi$

۸ـضرایب a_2, a_3 در سری فوریه کسینوس تابع $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 , & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ کدام‌اند؟

1) $a_2 = 0 , a_3 = \frac{2}{3\pi}$　　2) $a_2 = \frac{2}{3\pi} , a_3 = -\frac{2}{5\pi}$　　3) $a_2 = \frac{2}{3\pi} , a_3 = 0$　　4) $a_2 = 0 , a_3 = -\frac{2}{5\pi}$

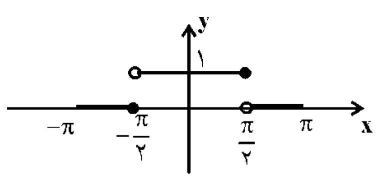
۹ـدر بسط فوریه تابع $f(t)$ با دوره تناوب $T = 2$ که به شکل زیر معرفی شده است

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t , & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t , & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

ضریب a_3 در $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$ کدام است؟

1) $-\frac{2}{9\pi^2}$　　2) $\frac{2}{9\pi^2}$　　3) $-\frac{4}{9\pi^2}$　　4) $\frac{4}{9\pi^2}$

۱۰ـدر بسط فوریه تابع متناوب شکل روبرو ضریب $\cos 4x$ کدام است؟

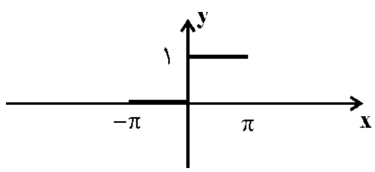


1) $-\frac{1}{2\pi}$　　2) صفر　　3) $\frac{1}{2\pi}$　　4) $\frac{1}{4\pi}$

۱۱ـسری فوریه $f(x) = \begin{cases} -1 , & -4 \leq x \leq 0 \\ 1 , & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ کدام است؟

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{4} x)$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{4} x)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)} \sin(\frac{2n-1}{4} \pi x)$　　4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(\frac{2n-1}{4} \pi x)$



1) صفر 2) $\frac{1}{5\pi}$ 3) $\frac{2}{5\pi}$ 4) $-\frac{2}{5\pi}$

۱۳ـ برای تابع متناوب $f(t)$ به صورت $-1<t\le 1$ و $f(t)=t$ بسط فوریه عبارت است از $f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi t}{n}$ در اینصورت بسط فوریه تابع $g(t)=t^2, -1<t\le 1$ چه خواهد بود؟

1) $g(t)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi t$

2) $g(t)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi t$

3) $g(t)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}\cos n\pi t$

4) $g(t)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi t$

۱۴ـ در بسط تابع $f(x)=x^2$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ به سری فوریه ضریب $\cos 8x$ کدام است؟

1) $\frac{1}{16}$ 2) $\frac{1}{8}$ 3) $-\frac{1}{16}$ 4) $-\frac{1}{8}$

۱۵ـ تابع $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ را در محدوده $-\pi<x<\pi$ در نظر بگیرید، در اینصورت می‌توان گفت این تابع:

1) دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون دارای ناپیوستگی در محدوده است.

2) دارای بسط کسینوسی فوریه در محدوده است چون تابع زوج می‌باشد.

3) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تابع نوسانی (پریودیک) نیست.

4) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تعداد حداکثر و حداقل آن محدود نمی‌باشد.

۱۶ـ در سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x\le L \\ 2L-x & , L<x\le 2L \end{cases}$، با دوره تناوب $2L$، یعنی $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$ داریم:

1) $a_K=0$ که در آن $K=0,1,2,3,4,\dots$

2) $b_n=0\ ,\ a_{2K}=0$ به ازای $K,n\in N$

3) $b_n=0\ ,\ a_{2K-1}=0$ به ازای $K,n\in N$

4) $b_n=0\ ,\ a_k\neq 0$ به ازای $n\in N$ و هر $K=0,1,2,3,4,\dots$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

باشد، مقدار b_3 برای $f(x)=\left(\cos^2 x+\sin x-\frac{1}{2}\right)^2$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{4}$

۱۸ـ با استفاده از بسط فوریه $f(x)=x^2$ در محدوده $-\pi<x<\pi$ می‌توان نشان داد که:

1) $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 2) $\frac{\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 3) $\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 4) $\frac{\pi^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

۱۹ـ اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\mathbf{K})$ در این صورت ضریب جمله $\cos\pi x$ در بسط عبارت $x(x-1)$ عبارت است از:

1) $\frac{2}{\pi^2}$ 2) $\frac{4}{\pi^2}$ 3) $\frac{8}{\pi^2}$ 4) $\frac{16}{\pi^2}$

۲۰ـ اگر $f(x)=\begin{cases}x & , \ 0\le x\le\frac{L}{3}\\ \frac{1}{2}(L-x) , & \frac{L}{3}<x<L\end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$ که در آن b_n ها ضرایب ثابت‌اند، آن‌گاه این رابطه سری ایجاب می‌کند که کدام یک از روابط زیر صحیح باشند؟

1) $f(x)=\begin{cases}-x \ , & -\frac{L}{3}\le x\le 0\\ \frac{1}{2}(L+x) \ , & -L\le x<-\frac{L}{3}\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x \ , & -\frac{L}{3}\le x\le 0\\ \frac{1}{2}(L-x), & -L\le x<-\frac{L}{3}\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(L-x) \ , & L\le x\le\frac{5L}{3}\\ x, & \frac{5L}{3}<x\le 2L\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(L-x) \ , & L\le x\le\frac{5L}{3}\\ x-2L \ , & \frac{5L}{3}<x\le 2L\end{cases}$

۲۱ـ سری فوریه تابع پیوسته تکه‌ای $f(x)$ در بازه $[-3,3]$ بصورت زیر تعریف می‌شود $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{3})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{3}))$

اگر تابع $f(x)$ برابر با: $f(x)=\begin{cases}0 \ , & -3\le x\le 0\\ x \ , & 0\le x\le 3\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه: به ترتیب a_0، a_n، b_n برابر هستند با:

1) $\frac{-3\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi},\frac{3\left[\sin(\frac{n\pi}{2})-1\right]}{n^2\pi^2},\frac{3}{2}$

2) $\frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi},\frac{3\left[\cos(n\pi)-1\right]}{n^2\pi^2},\frac{3}{4}$

3) $\frac{-3\cos(n\pi)}{n\pi},\frac{3\left[\sin(\frac{n\pi}{2})-1\right]}{n^2\pi^2},\frac{3}{4}$

4) $\frac{-3\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi},\frac{3\left[\cos(n\pi)-1\right]}{n^2\pi^2},\frac{3}{2}$

۲۲ـ سری فوریه تابع: $f(x+4)=f(x), f(x)=\begin{cases}1 & , -1<x<1\\ 0 & , 1<x<2\end{cases}$ **به کدام شکل است؟**

1) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\mathbf{K})$

2) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{3}+\mathbf{K})$

3) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\mathbf{K})$

4) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x+\mathbf{K})$

۲۳ـ کدام سری، سری فوریه‌ی تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره تناوب 2π است؟

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

3) $\sum_{n=2}^{\infty}(\mathrm{Lnn})\cos nx$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$

۲۴ـ سری فوریه‌ی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}0 , & -\pi\le x<0\\ 1 , & 0\le x<\pi\end{cases}$ **کدام است؟**

1) $\frac{2}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{2k}$

2) $\frac{1}{2}+\sum_{K=0}^{\infty}\frac{2\sin(2K+1)x}{\pi(2K+1)}$

3) $\frac{\pi}{2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{K-1}}{K}\sin kx$

4) $\sum_{K=1}^{\infty}(\frac{1}{2K+1}\sin(2K+1)x+\frac{1}{K}\cos kx)$

۲۵ـ اگر سری فوریه تابع $0<t<2$, $f(t)=t^2$, $f(t+2)=f(t)$ **بصورت** $\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t+(\frac{-4}{n\pi})\sin n\pi t\right]$ **باشد، مطلــوب است محاسبه** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$:

1) $\frac{\pi^4}{6}$

2) $\frac{\pi^2}{9}$

3) $\frac{\pi^4}{90}$

4) $\frac{\pi^4}{96}$

۲۶ـ تابع f در بازه $[0,\pi]$ به صورت $f(t)=\cos^2 t$ **تعریف شده است. در این صورت سری فوریه کسینوسی نــیم دامنــه f برابــر است با:**

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t$

3) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)$

4) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nt$

۲۷ـ بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدوده $0<x<\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

1) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(nx)$

2) $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}n}{4n^2-1}\cos(2nx)$

3) $\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1}\cos(2nx)$

4) تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد چون تابع فرد و بسط زوج است.

$H(x)=\begin{cases}1\ ,\ x>0\\ 0\ ,\ x<0\end{cases}$ باشد که در آن $f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)$

1) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

2) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

3) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

4) $f(x)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۲۹ـ هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ **باشد، حاصل** $I=\int_0^{\pi}f(x)\sin^3 x\,dx$ **کدام گزینه است؟**

1) صفر
2) $\frac{3\pi}{8}$
3) $\frac{3\pi}{16}$
4) $\frac{13\pi}{36}$

۳۰ـ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x-[x]$ **را بعد از تشخیص دوره متناوب آن بنویسید**

1) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

2) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

3) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

4) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{(n\pi)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}$

۳۱ـ سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $0\le x\le\pi$, $f(x)=1+\cos\frac{x}{2}$ **کدام است؟**

1) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

2) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

3) $2+\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$

4) $1+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)x}{2}$

۳۲ـ سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $0\le x<\pi$, $f(x)=x-\frac{\pi}{2}$**، کدام است؟**

1) $\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{1}{\pi m^2}\cos(2mx)$

2) $\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

3) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

4) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۳۳ـ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} \ldots \\ 2L-x, L \le x \le 2L \end{cases}$ به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{L}x + b_k \sin\frac{k\pi}{L}x\right)$$

کدام گزینه صحیح است؟

1) $a_0 = L \quad , \quad b_K = 0$

2) $a_0 = \frac{L}{2} \quad , \quad b_K = \frac{2L}{K\pi}$

3) $a_0 = 2L \quad , \quad b_K = 0$

4) $a_0 = L \quad , \quad b_K = \frac{2L}{K\pi}$

۳۴ـ سری فوریه تابع متناوب $f(x) = |x|, -\pi < x \le \pi$ با دوره تناوب 2π کدام است؟

1) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

2) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

3) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{2m+1}$

4) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

۳۵ـ سری فوریه $f(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x), 0 < x < L$ کدام است؟

1) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L} + \mathbf{K}\right)$

2) $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L} + \mathbf{K}\right)$

3) $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L} - \mathbf{K}\right)$

4) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{L} - \mathbf{K}\right)$

۳۶ـ سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} e^x &, 0 < x < L \\ 0 &, x = 0 \\ -e^{-x} &, -L < x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^L\cos n\pi}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1+e^L\cos n\pi}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

3) $\frac{1}{L}(e^L-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^L\cos n\pi}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^2}\frac{1}{1+(\frac{L}{n\pi^2})}\cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1-e^L\cos n\pi}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

بعد از آن نیز خطی می‌باشد $f'(+0) = f'(L-0)$ در اینصورت ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه این تابع کدام هستند؟

1) $a_n = \dfrac{2L}{(n\pi)^2}\left[f'(c-0) - f'(c+0)\right]$

2) $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\left[f(c-0) - f(c+0)\right]$

3) $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi c}{L}\left[f(c-0) - f(c+0)\right] + \dfrac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)f'(+0)$

4) $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi c}{L}\left[f(c-0) - f(c+0)\right] + \dfrac{2L}{(n\pi)^2}\cos\dfrac{n\pi c}{L}\left[f'(c-0) - f'(c+0)\right]$

۳۸ـ ضرایب بسط فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π و $\{a_0, a_n, b_n\}$ می‌باشد، اگر ضرایب بسط فوریه‌ی تابع متناوب تابع $g(x) = f(x)\cos x$ برابر با $\{a'_0, a'_n, b'_n\}$ باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

1) $a'_0 = \dfrac{a_1}{2},\ a'_n = \dfrac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2},\ b'_n = \dfrac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}$

2) $a'_0 = \dfrac{a_1}{2},\ a'_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2},\ b'_n = \dfrac{b_{n+1} + b_{n-1}}{2}$

3) $a'_0 = \dfrac{a_0}{2},\ a'_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2},\ b'_n = \dfrac{b_{n+1} + b_{n-1}}{2}$

4) $a'_0 = \dfrac{a_0}{2},\ a'_n = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2},\ b'_n = \dfrac{a_{n+1} + b_{n-1}}{2}$

۳۹ـ ضریب $\cos\dfrac{3\pi x}{L}$ در بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x\ ,\ 0 < x < L$ عبارت است از:

1) $-\dfrac{9L}{4\pi^2}$ 2) $-\dfrac{4L}{9\pi^2}$ 3) $\dfrac{4L}{9\pi^2}$ 4) $\dfrac{9L}{4\pi^2}$

۴۰ـ با توجه به سری فوریه برای تابع $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ برای $|x| < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ که به شکل $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - 2(\cos x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x - \dfrac{1}{16}\cos 4x + \mathbf{K})$ می‌باشد. مقدار عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ کدام است؟

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{\pi^2}{4}$ 3) $\dfrac{\pi^2}{6}$ 4) $\dfrac{\pi^2}{12}$

۴۱ـ با توجه به سری فوریه $f(x)=\sum\limits_{n=1}\frac{}{\pi(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$ **برای تابع** $f(x)=\{\,x(\pi-x),\ 0<x<\pi$ **و با استفاده از تساوی پارسوال (Parseval) مجموع سری عددی** $1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\dots$ **عبارت است از:**

1) $\frac{\pi^6}{960}$ 2) $\frac{\pi^4}{90}$ 3) $\frac{\pi^4}{960}$ 4) $\frac{\pi^6}{90}$

۴۲ـ سری فوریه‌ی تابع $f(x)=x,\ x\in(-\pi,\pi)$ **کدام است؟**

1) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 2) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 3) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}$ 4) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$

۴۳ـ سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\operatorname{Ln} n}$ **سری فوریه‌ی کدام تابع است؟**

1) $\frac{x}{\operatorname{Ln}x}$ 2) e^x 3) $\operatorname{Ln}x$ 4) هیچ تابعی

۴۴ـ سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\cos^2\pi x$ **در نیم دامنه** $[0,1]$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x$ 2) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$ 3) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$ 4) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

۴۵ـ اگر $f(x)=\begin{cases}2-x, & 1<x\le 2\\ x, & -1\le x\le 1\\ -2-x, & -2\le x\le -1\end{cases}$ **آن‌گاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی این تابع، مجموع سری** $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}$ **برابر کدام است؟**

1) $\frac{\pi^4}{64}$ 2) $\frac{\pi^4}{96}$ 3) $\frac{\pi^4}{128}$ 4) $\frac{\pi^4}{192}$

۴۶ـ اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π **و به ازای** $|x|<\pi$ **داشته باشیم** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$**، آن‌گاه با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع f، مقدار** $\sum\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ **برابر است با:**

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) 1 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) 2

۴۷ـ بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\cos^3 x\ ,\ 0<x<2\pi$ **را بیابید.**

1) $\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ 2) $\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$ 3) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$ 4) $\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 3x$

۲۸ـ اگر سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $g(x) = x\ ,\ 0 \le x \le L$ به صورت $x = \frac{}{2} - \sum_{m=1} \frac{}{\pi^2(2m-1)^2} \cos \frac{}{L}$ باشد،

آنگاه سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x) = px + q, 0 \le x \le L$ کدام است؟ (q, p ثابت حقیقی)

۱) $\frac{PL}{2} + q - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۲) $\frac{PL}{2} + q - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2} + q) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $\frac{PL}{2} + \frac{q}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2} - q) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $\frac{PL}{2} + \frac{q}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{4PL}{\pi^2(2m-1)^2} + q) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴۹ـ ضرایب سری فوریه تابع متناوب $f(x + 2\pi) = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} -2 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$ کدامند؟

۱) $a_n = b_n = \frac{8}{n\pi}$ به ازای هر **n**

۲) $b_n = \frac{8}{n\pi}, a_n = 0$ به ازای هر **n**

۳) $b_n = 0\ ,\ a_n = \frac{2n}{\pi}$ به ازای هر **n**

۴) $a_n = 0$ به ازای هر $n \ge 0$, $b_n = \begin{cases} \frac{8}{n\pi} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$

۵۰ـ سری فوریه تابع تناوبی $f(x) = \frac{x}{|x|}\ ,\ 0 < |x| < \pi$ با دوره تناوب $P = 2\pi$ عبارت است از:

۱) $\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \mathbf{K})$

۲) $\frac{\pi}{4}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \mathbf{K})$

۳) $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \mathbf{K})$

۴) $\frac{\pi}{4}(\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \mathbf{K})$

۵۱ـ در صورتی که در تابع $f(x) = x$ مقدار x بین $-\pi, \pi$ تغییر کند، مطلوب است مقدار ثابت بسط مثلثاتی فوریه این تابع:

۱) $-\frac{\pi}{2}$

۲) صفر

۳) 1

۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۲ـ بسط سری فوریه مثلثاتی تابع $\sin^3 x\ ,\ 0 < x < 2\pi$ را بیابید.

۱) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \sin Kx$

۲) $\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x$

۳) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^3} \sin Kx$

۴) $\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

۵۳ـ اگر $0 \le x < L$, $x = \frac{L}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{L}$، آنگاه سری فوریه سینوسی نیم دامنه تابع $f(x) = x(L - x)$ کدام است؟

۱) $-\sum \frac{8L^2}{\pi^3(2m-1)^3} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۲) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8L}{\pi^3(2m-1)^3} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۳) $-\sum \frac{2L}{\pi(2m-1)} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8L}{\pi^2(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$

۵۲ــ در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2, -L\le x\le L$ به صورت $\frac{\ }{3}L^2+\sum_{n=1}\frac{\ }{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{\ }{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{3}(\frac{x^2}{L^2}-1)$ کدام است؟

1) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$

2) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

3) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$

4) $\frac{4}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$

۵۵ــ فرض کنیم $\frac{d^2u}{dx^2}+K^2u=f(x)$ که در آن $K\neq 0$ ثابت حقیقی و $-L\le x\le L$ ($L>0$ ثابت) و $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$ در اینصورت $u(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$، که در آن:

1) $A_n=\frac{b_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}\ ,\ B_n=\frac{a_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}, A_0=\frac{a_0}{K^2}$

2) $A_n=\frac{a_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}\ ,\ B_n=\frac{b_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}, A_0=\frac{a_0}{K^2}$

3) $A_n=\frac{a_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}\ ,\ B_n=\frac{b_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}, A_0=0$

4) $A_n=\frac{a_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}\ ,\ B_n=\frac{b_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}, A_0=\frac{a_0}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}$

۵۶ــ هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x)=x+\cos 2x$ به ازای $0\le x\le\pi$، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟

1) صفر

2) 1

3) $1-\frac{1}{2\pi}$

4) $1+\frac{1}{2\pi}$

۵۷ــ سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x, 0\le x<L$، کدام است؟

1) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

2) $L+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

3) $\frac{L}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

4) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{L}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_{mn}\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{K})$ ، سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)=xy$ برای $0<x<\pi, 0<y<\pi$ کدام است؟

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{4}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{4nm}{\pi^2}\sin(nx)\sin(my)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{nm}\sin(nx)\sin(my)$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{4}\sin(nx)\sin(my)$

۵۹ـ اگر سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\end{cases}$ و $P=2L=4$ ، برابر با $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2}+\mathbf{K})$ باشد آنگاه جمله‌ی a_0 در سری فوریه کسینوسی $g(x)=\begin{cases}2 & 0<x<1\\ 3 & 1<x<2\end{cases}$ و $P=2L=4$ عبارتست از:

1) $\frac{5}{2}$

2) $\frac{2}{5}$

3) $\frac{3}{2}$

4) $\frac{2}{3}$

۶۰ـ در سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ 0, & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ \sin 2x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ با دوره متناوب $P=2\pi$ به صورت $f(x)=a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ، a_2 و b_2 به ترتیب عبارتند از:

1) $1,0$

2) $\frac{3}{4},0$

3) $1,\frac{3}{4}$

4) $\frac{3}{4},\frac{3}{4}$

۶۱ـ اگر تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x)=\frac{L}{2}-x, 0<x<L$ ، تعریف شده باشد، آنگاه

1) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$

2) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

3) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

4) $\frac{L}{2}-x=\frac{L}{\pi}\sum\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x+\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۶۲ـ اگر داشته باشیم $\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}); 0\le x\le\pi$ آنگاه حاصل سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16n^2-1}$ برابر است با:

1) $\frac{\pi^2}{8}$

2) $1-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

3) $1-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

4) $\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

۶۳ــ اگر $f(x)=\sum_{n=1} \frac{\quad}{n^2}$**، آن‌گاه** $\int_0 f(x)\sin^{\,} x\,dx$ **کدام است؟**

1) $-\frac{\pi}{16}$ 2) $-\frac{\pi}{8}$ 3) صفر   4) $\frac{\pi}{4}$

۶۴ــ تابع متناوب $f(x)$ **در یک دوره‌ی تناوب به صورت:** $f(x)=\begin{cases}1 & -\alpha<x<\alpha \\ 0 & -\pi<x<-\alpha,\ \alpha<x<\pi,\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})\end{cases}$ **اســت. اگــر بسط فوریه تابع بــه صــورت** $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\alpha}{1}\cos x+\frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x+\frac{\sin 3\alpha}{3}\cos 3x+\mathbf{K})$ **باشــد، در اینصــورت حاصــل** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin n\alpha}{n})^2$ **کدام است؟**

1) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ 2) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{2}$ 3) $\alpha(\pi-\alpha)$ 4) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

۶۵ــ اگر برای $0<x<2$ **داشته باشیم:** $x=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\mathbf{K})$ **در اینصورت دو جمله اول بســط فوریــه تابع متناوب** $f(x)=1-\frac{x^2}{4},\ 0<x<2$ **عبارت است از:**

1) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ 2) $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ 3) $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ 4) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

۶۶ــ مقدار میانگین تابع $0<t<L,\ f(t)=\sin\frac{\pi}{L}t$ **برابر است با:**

1) $\frac{1}{\pi}$ 2) $\frac{2}{\pi}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) π

۶۷ــ سری فوریه تابع $f(x)$ **در بازه** $(0,2\pi)$ **به صورت زیر است:** $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ **اگر ســری فوریــه** $\int_0^x f(y)\,dy$ **در همان بازه به صورت** $\frac{A_0}{2}+\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ **باشد، در اینصورت** B_n **برابر است با:**

1) $\frac{a_n}{n}$ 2) $\frac{b_n}{n}$ 3) $\frac{1}{n}(a_n-a_0)$ 4) $\frac{1}{n}(b_n-a_n)$

۶۸ــ فرض کنید $f(x)=x,\ -L<x<L$ **و سری فوریه تابع f بصــورت** $f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$ **باشــد در ایــن صــورت مقدار سری** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **کدام است؟**

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi^3}{20}$ 3) $\frac{\pi^2}{6}$ 4) $\frac{2\pi^2}{3}$

۲۶ـ تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π بر بازه $(0,2\pi)$ دارای سری فوریه‌ای به صورت $1+\cos x+\frac{\ }{2!}+\frac{\ }{3!}+\ldots$ می‌باشد،

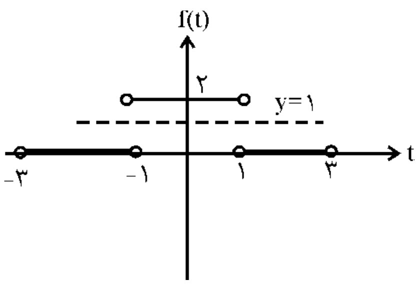
$f(x)$ برابر است با:

1) $e^{\cos x}\cos[\sin x]$ 2) $e^{\sin x}\cos[\sin x]$ 3) $e^{\cos x}\sin[\cos x]$ 4) $e^{\sin x}\sin[\cos x]$

1) گزینه 3

$\frac{n\pi}{L}=\frac{n\pi}{2}$

منحنی $f(t)$ در بازه‌ی $(-3,3)$ به صورت مقابل است بنابراین تابع $f(t)$ زوج بوده و $b_n=0$ می‌باشد پس گزینه 1 و 4 نادرست هستند.



$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}f(t)\,dt=\frac{1}{4}(2\times2)=1$$

اگر منحنی تابع $f(t)$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ (نیم پریود) نسبت به خط $y=\frac{a_0}{2}=1$ قرینه کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $L=2$ به سمت راست انتقال دهیم به روی $f(t)$ در بازه‌ی $[1,3]$ منطبق می‌گردد بنابراین براساس نکته (5)، $a_{2n}=0$, $n=1,2,\dots$ می‌باشد یعنی سری فوریه فقط شامل جملات $\cos\frac{\pi}{2}t,\cos\frac{3\pi}{2}t,\dots$ می‌باشد. بنابراین گزینه (3) صحیح می‌باشد.

2) گزینه 3

از سری فوریه‌ی داده شده انتگرال می‌گیریم:

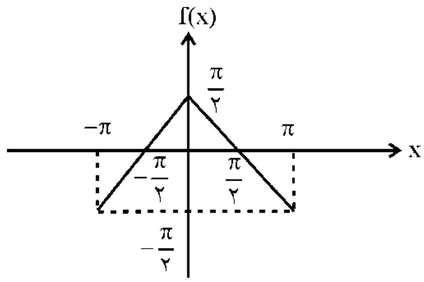
$$\frac{x^2}{2}=2\left(-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\dots\right)+c$$

سری فوق بسط کسینوسی تابع $\frac{x^2}{2}$ می‌باشد بنابراین

$$c=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{x^2}{2}=2\left(-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{1^2}-\dots\right)+\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow x^2=4\left(-\frac{\cos x}{1^2}+\dots\right)+\frac{\pi^2}{3}$$

$$(\pi-x)(\pi+x)=\pi^2-x^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right)$$

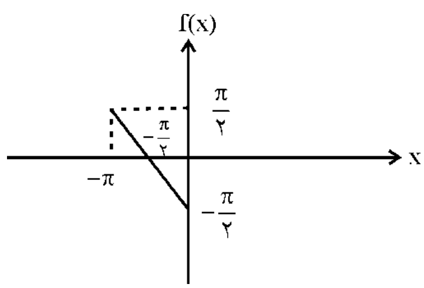


$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

تابع $f(x)$ زوج است بنابراین $b_n = 0$ یعنی گزینه 3 و 4 نادرست است.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\,(\text{جمع جبری مساحت‌های بین } f(x) \text{ و محور } \mathbf{x} \text{ ها}) = 0$$

قرینه‌ی منحنی $f(x)$ در بازه‌ی $[-\pi, 0]$ نسبت به خط $y = 0$ به صورت زیر است که اگر آن را به اندازه‌ی $L = \pi$ نتقال دهیم به روی $f(x)$ در نیم پریود $[0, \pi]$ منطبق می‌گردد بنابراین $a_{2n} = 0$ می‌باشد پس گزینه‌ی (1) نیز نادرست است.



4) گزینه صحیح ندارد

براساس گزینه‌ها بسط کسینوسی تابع $f(x)$ موردنظر است.

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\frac{1}{2}+n)x + \cos(\frac{1}{2}-n)x\right]dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}+n)x}{\frac{1}{2}+n} + \frac{\sin(\frac{1}{2}-n)x}{\frac{1}{2}-n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)}{\frac{1}{2}+n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\pi n)}{\frac{1}{2}-n}\right] = \frac{\cos\pi n}{\pi}\,\frac{1}{\frac{1}{4}-n^2}$$

$$a_n = \frac{\ }{\pi}\frac{\ }{1-4n^2}$$

در هیچ گزینه‌ای a_n به صورت فوق نمی‌باشد.

5) گزینه 3

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

6) گزینه 1

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\cos\frac{n\pi}{5}x\,dx = \frac{3}{5}\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x\Big|_{0}^{5}$$

$$a_n = 0 \ ,\ n \neq 0$$

7) گزینه 2

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\pi^-} f(x) + \lim_{x\to(-\pi)^+} f(x)\right] = \frac{1}{2}(\pi^2+\pi+\pi^2-\pi) = \pi^2$$

8) گزینه 1

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos 2x dx\right]$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 3x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos 3x dx\right]$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\sin 3x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$a_3 = \frac{2}{3\pi}$$

9) گزینه 4

تابع $f(t)$ زوج با دوره تناوب $T=2$ است بنابراین:

$$L = 1 \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n\pi$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\cos n\pi t \, dt$$

$$a_3 = 2\int_0^1 (1-t)\cos 3\pi t \, dt = 2\left[\frac{1-t}{3\pi}\sin 3\pi t - \frac{1}{9\pi^2}\cos 3\pi t\right]_0^1$$

$$a_3 = \frac{4}{9\pi^2}$$

10) گزینه 2

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 4x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = 0$$

11) گزینه 4

تابع فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

$$L = 4 \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{4}$$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \sin\frac{n\pi}{4}x dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x\right]_0^4 = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = \text{زوج} \\ \dfrac{4}{n\pi} & , \quad n = \text{فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi}{4}x$$

البته کران پایین سیگما، $n = 1$ می‌باشد.

12) گزینه 3

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$b_5 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 5x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 5x \, dx = \frac{-1}{5\pi}\cos 5x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{5\pi}$$

13) گزینه 4

$$t = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi t}{n}$$

$$\frac{t^2}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos n\pi t+c$$

$$c=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{1}\int_0^1\frac{t^2}{2}dt=\frac{1}{6}$$

$$\frac{t^2}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n^2}\cos n\pi t+\frac{1}{6}$$

$$t^2=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi t+\frac{1}{3}$$

14) گزینه 1

$f(x)$ تابعی زوج است.

$$L=\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=n$$

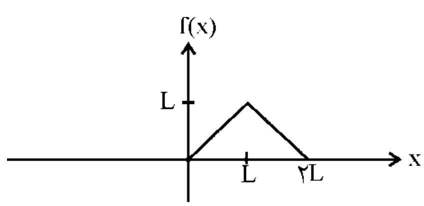
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 8x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{8}\sin 8x+\frac{x}{32}\cos 8x-\frac{1}{256}\sin 8x\right]_0^{\pi}$$

$$a_8=\frac{1}{16}$$

15) گزینه 4

16) گزینه 2

منحنی $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت شکل مقابل است بنابراین $f(x)$ زوج بوده و $b_n=0$ می‌باشد.



$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_0^{2L}f(x)\,dx=\frac{1}{2L}\left(\frac{L\times 2L}{2}\right)=\frac{L}{2}$$

اگر قرینه‌ی منحنی $f(x), 0<x<L$ نسبت به خط $y=\frac{L}{2}$ را به دست آوریم و آن را به اندازه‌ی **L** به سمت راست انتقال دهیم به روی نیم پریود دیگر $f(x)$ در بازه‌ی $(L,2L)$ منطبق می‌گردد بنابراین $a_{2n}=0$ یعنی گزینه (2) صحیح می‌باشد.

17) گزینه 3

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\right)^2$$

$$f(x)=\frac{1}{4}\cos^2 2x+\sin^2 x+\cos 2x\sin x$$

$$f(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$f(x)=\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$b_3=\frac{1}{2}$$

18) گزینه 1

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ ,\ -\pi<x<\pi$$

$x=\pi$ مقدار سری در $=\frac{1}{2}(f(\pi^-)+f((-\pi)^+))=\frac{1}{2}(\pi^2+\pi^2)=\pi^2$

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

19) گزینه 2

از سری فوریه داده شده انتگرال می‌گیریم:

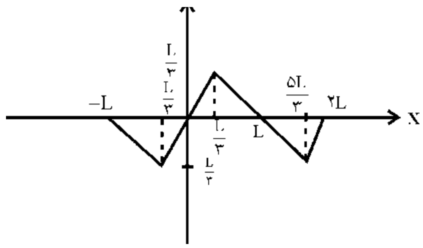
$$\frac{x^2}{2}=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{2}x-\mathbf{K}\right)+c$$

$$x^2=\frac{8}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2\pi}\cos\pi x-\mathbf{K}\right)+2c$$

$$x(x-1)=x^2-x=\frac{8}{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos\pi x+\mathbf{K}=\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x+\mathbf{K}$$

20) گزینه 4

چون بسط فوریه سینوسی $f(x)$ مشخص شده است بنابراین منحنی $f(x)$ به صورت تابعی فرد و متناوب با دوره متناوب $T=2L$ می‌باشد.



براساس منحنی $f(x)$ در بازه‌ی $[-L,2L]$ گزینه (4) صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(L-x)\ , & L\le x\le \frac{5L}{3}\\ x-2L\ , & \frac{5L}{3}<x\le 2L\end{cases}$$

$$f(L)=0, f(\frac{5L}{3})=-\frac{L}{3}, f(2L)=0$$

21) گزینه 2

$$a_0=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{6}\int_0^3 x\,dx=\frac{3}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi}{3}xdx=\frac{3}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi}{3}xdx=-\frac{3}{n\pi}\cos n\pi$$

22) گزینه 3

$f(x)$ تابعی زوج است بنابراین $b_n=0$

$L=2\Rightarrow \frac{n\pi}{L}=\frac{n\pi}{2}\Rightarrow$ گزینه 1 و 2 نادرست است

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 dx=1\Rightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\int_0^1\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Rightarrow a_1=\frac{2}{\pi}, a_2=0, a_3=-\frac{2}{3\pi}, a_4=0, a_5=\frac{2}{5\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x-\mathbf{K})$$

23) گزینه 2

حداقل سرعت همگرایی ضرایب فوریه به صفر هم ارز $\frac{K}{n}$ می‌باشد بنابراین گزینه 1 و 4 نادرست است. $a_n = Lnn$ به

24) گزینه 2

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L}=n$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\Big|_0^{\pi} dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$b_n=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0 & ,\ n=\text{زوج}\\ \dfrac{2}{n\pi} & ,\ n=\text{فرد}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)x$$

25) گزینه 3

از تساوی پارسوال استفاده می‌کنیم:

$$L=1$$

$$\frac{1}{1}\int_0^2 t^4\,dt=2\left(\frac{4}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{\pi n}\right)^2$$

$$\frac{32}{5}=\frac{32}{9}+\frac{16}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

در رابطه‌ی فوق از تساوی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ استفاده کرده‌ایم.

26) گزینه 1

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L}=n$$

سری فوریه کسینوسی:

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$L=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=2n$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$$

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\frac{4}{\pi}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi}$$

بنابراین فقط گزینه 3 صحیح می‌باشد.

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x\right]dx$$

$$a_n=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(1+2n)x}{1+2n}+\frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\right]^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$$

28) گزینه 3

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$$

ناحیه‌ای که تابع مخالف صفر است بازه‌ی $(0,2)$ می‌باشد بنابراین:

$$L=2\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{2}x$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1-dx+\int_1^2 dx=0$$

$$a_n=\int_0^1-\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_1^2\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_1^2$$

$$a_n=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Rightarrow a_{2m}=0$$

$$a_{2m-1}=-\frac{4}{\pi(2m-1)}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}=\frac{4\cos m\pi}{\pi(2m-1)}=\frac{4(-1)^m}{\pi(2m-1)}$$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^m}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

29) گزینه 4

تابع $f(x)$ فرد است

$$\frac{n\pi}{L} = n \Rightarrow L = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n^2} \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_3\right)$$

$$I = \frac{\pi}{8}(3b_1 - b_3) = \frac{\pi}{8}\left(3 - \frac{1}{9}\right) = \frac{13\pi}{36}$$

30) گزینه 2

تابع $f(x)$ نه زوج و نه فرد است و دوره تناوب آن $T = 1$ می‌باشد.

$$L = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = 2n\pi$$

$$a_0 = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx\right) = 1$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1)\cos(2n\pi x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(2n\pi x)\,dx\right) = 0$$

$$b_n = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1)\sin(2n\pi x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(2n\pi x)\,dx\right)$$

$$b_n = 2\left[-\frac{x+1}{2n\pi}\cos(2n\pi x) + \frac{1}{(2n\pi)^2}\sin(2n\pi x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + 2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos(2n\pi x) + \frac{1}{(2n\pi)^2}\sin(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin(2n\pi x)$$

31) گزینه 1

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\cos\frac{x}{2})dx = \frac{2}{\pi}\left[x + 2\sin\frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\pi+2) = 2 + \frac{4}{\pi}$$

$$\frac{a_0}{2} = 1 + \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\frac{x}{2})\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx\right]$$

$$\int_0^{\pi}\cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx$$

انتگرال فوق در پاسخ تست (4) محاسبه شده است:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{4(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$$

32) گزینه 3

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x - \frac{\pi}{2})dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1) \Rightarrow a_{2m} = 0$$

$$a_{2m-1} = \frac{-4}{\pi(2m-1)^2}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$$

33) گزینه 1

$f(x)$ تابعی زوج است بنابراین $b_K = 0$ است.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} xdx = L$$

34) گزینه 2

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L}=n$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)\Rightarrow a_{2m}=0\ ,\ a_{2m+1}=\frac{-4}{\pi(2m+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$$

35) گزینه 1

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi}{L}xdx=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}x\Big|_0^L=\frac{4}{\pi}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{1}{L}\int_0^L\left[\sin(1+n)\frac{\pi x}{L}+\sin(1-n)\frac{\pi x}{L}\right]dx$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}\cos(1+n)\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{1-n}\cos(1-n)\frac{\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$a_n=\frac{1+\cos n\pi}{\pi}\frac{2}{1-n^2}\Rightarrow a_{2m-1}=0$$

$$a_{2m}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4m^2}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-2m)(1+2m)}=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}\cos(\frac{2m\pi}{L}x)$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos\frac{2\pi}{L}x+\frac{1}{3\times5}\cos\frac{4\pi}{L}x+\frac{1}{5\times7}\cos\frac{6\pi}{L}x+\mathbf{K})$$

36) گزینه 1

$f(x)$ تابع فرد است بنابراین $a_0=a_n=0\ ,\ n=1,2,3,\mathbf{K}$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L e^x\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{L}\left[\frac{e^x}{1+(\frac{n\pi}{L})^2}(\sin\frac{n\pi}{L}x-\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x)\right]_0^L$$

$$b_n = \frac{\quad}{L(1+(\frac{n\pi}{L})^2)}\frac{\quad}{L}(1-e^{L}\cos n\pi) = \frac{\quad}{n\pi}\frac{\quad}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}(1-e^{L}\cos n\pi)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\frac{1}{1+(\frac{L}{n\pi})^2}(1-e^{L}\cos n\pi)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

37) گزینه 4

$$a_n = -\frac{L}{n\pi}b'_n - \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} J_i \sin(\frac{n\pi}{L}x_i)$$

$$a_n = -\frac{L}{n\pi}b'_n - \frac{2}{n\pi}(f(c+0)-f(c-0))\sin(\frac{n\pi}{L}c)$$

$$b'_n = \frac{L}{n\pi}a''_n + \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{k} J'_i \cos(\frac{n\pi}{L}x_i)$$

چون تابع f در نقاط پیوستگی خطی می‌باشد. بنابراین $a''_n = 0$ می‌باشد

$$b'_n = \frac{2}{n\pi}(f'(c+0)-f'(c-0))\cos(\frac{n\pi}{L}c)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}(f(c-0)-f(c+0))\sin(\frac{n\pi}{L}c) + \frac{2L}{(n\pi)^2}(f'(c-0)-f'(c+0))\cos(\frac{n\pi}{L}c)$$

38) گزینه 2

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad , n = 1,2,3,\ldots$$

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{a_1}{2}$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(1+n)x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n-1)x\,dx\right]$$

$$a'_n = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n+1)x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n-1)x\,dx\right]$$

$$b'_n = \frac{b_{n+1}+b_{n-1}}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{3\pi}{L}x dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{3\pi}{L}x dx$$

$$a_3 = \frac{2}{L}\left[\frac{xL}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{L}x + (\frac{L}{3\pi})^2\cos\frac{3\pi}{L}x\right]_0^L = -\frac{4L}{9\pi^2}$$

40) گزینه 4

تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته بوده و $f(0)=0$، در سری $x=0$ قرار می‌دهیم:

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - 2(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \mathbf{K})$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \mathbf{K} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

41) گزینه 1

$f(x)$ تابعی فرد است و $L=\pi$ بنابراین تساوی پارسوال به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

42) گزینه 4

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$f(x)=2\sum_{n=1}\frac{\quad}{n}\sin(nx)$

43) گزینه 4

حداقل سرعت همگرایی ضرایب فوریه به صفر هم‌ارز $\frac{K}{n}$ می‌باشد. سرعت همگرایی $\frac{1}{Lnn}$ به صفر کمتر از $\frac{K}{n}$ است بنابراین سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{Lnn}$ سری فوریه‌ی هیچ تابعی نمی‌باشد.

44) گزینه 1

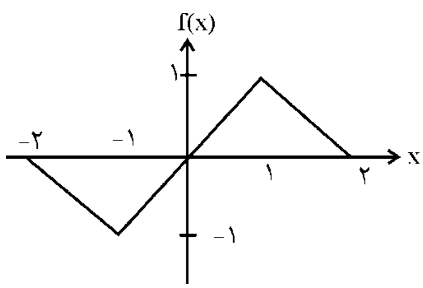
$L=1\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=n\pi$

سری فوریه کسینوسی: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$

$f(x)=\cos^2\pi x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x$

45) گزینه 2

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین: $a_0=a_n=0$



اگر قرینه‌ی $f(x)$ را در بازه‌ی $(-2,0)$ نسبت به خط $y=\frac{a_0}{2}=0$ (محور x ها) به دست آورده و سپس آن را بـه انـدازه‌ی $L=2$ به سمت راست انتقال دهیم بر نیم پریود $f(x), 0<x<2$ منطبق می‌گـردد بنـابراین $b_{2n-1}, b_{2n=0}$ بـه صـورت زیـر تعیین می‌شود (نکته 5)

$$b_{2n-1}=\frac{4}{2}\int_0^1 f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\,dx=2\int_0^1 x\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$b_{2n-1}=\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

تساوی پارسوال:

$$\frac{4}{2}\int_0^1 x^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{\pi^4(2n-1)^4}\sin^2(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\ }{3} = \frac{\ }{\pi^4}\sum_{n=1}\frac{\ }{(2n-1)^4} \Rightarrow \sum_{n=1}\frac{\ }{(2n-1)^4} = \frac{\ }{96}$$

46) گزینه 4

در تست (4) بسط کسینوسی $f(x)=\cos\frac{x}{2}$، $-\pi < x < \pi$ محاسبه شده است.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{4(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}\cos nx$$

مقدار سری در $x=\pi$ برابر است با:

$$\frac{1}{2}(f(\pi^-)+f(-\pi)^+)) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+\cos(-\frac{\pi}{2})) = 0$$

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos n\pi}{n^2-\frac{1}{4}} \Rightarrow -2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = 2$$

47) گزینه 3

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = \pi$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

48) گزینه 1

اگر به جای x، سری فوریه کسینوسی آن را قرار دهیم به راحتی سری فوریه کسینوسی $f(x)$ به صورت گزینه (1) حاصل می‌شود.

49) گزینه 4

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $a_n = 0\,,\ n \geq 0$

$$L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin nx dx = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

۰ زوج

فرد

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n\pi}, & n = \end{cases}$$

50) گزینه 1

$$f(x) = \begin{cases} 1 \;, & 0 < x < \pi \\ -1 \,, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 \;, & n = \text{زوج} \\ \dfrac{4}{n\pi} \;, & n = \text{فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \mathbf{K})$$

51) گزینه 2

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $a_0 = 0$ می‌باشد.

52) گزینه 4

$$L = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L} = n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

53) گزینه 2

از سری فوریه‌ی داده شده انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L}{2}x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^3 (2m-1)^3} \sin(m-1)\frac{\pi}{L}x + c$$

چون از سری فوریه کسینوسی انتگرال گرفته‌ایم بنابراین نتیجه یک تابع فرد می‌باشد و $c = 0$

$$\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^3 (2m-1)^3} \sin(2m-1)\frac{\pi}{L}x$$

$$x(L-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8L^2}{\pi^3 (2m-1)^3} \sin(2m-1)\frac{\pi}{L}x$$

54) گزینه 1

$$\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}L^2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^3}{(n\pi)^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{x^3}{3L^2}=\frac{1}{3}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{(n\pi)^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{x}{3}\left(\frac{x^2}{L^2}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{(n\pi)^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

55) گزینه 2

از سری فوریه مربوط به **u** مشتق گرفته و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi}{L}x+B_n\sin\frac{n\pi x}{L})+K^2\frac{A_0}{2}+K^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi}{L}x+B_n\sin\frac{n\pi}{L}x)=f(x)$$

$$\frac{k^2A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(k^2-\frac{n^2\pi^2}{L^2})A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+(k^2-\frac{n^2\pi^2}{L^2})B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]=f(x)$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{k^2A_0}{2}\Rightarrow A_0=\frac{a_0}{k^2}$$

$$(K^2-\frac{n^2\pi^2}{L^2})A_n=a_n\Rightarrow A_n=\frac{a_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}$$

$$(K^2-\frac{n^2\pi^2}{L^2})B_n=b_n\Rightarrow B_n=\frac{b_n}{K^2-(\frac{n\pi}{L})^2}$$

56) گزینه 2

$$L=\pi\Rightarrow\frac{n\pi}{L}=n$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos2x)\cos2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\cos2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4x)dx$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2}\sin2x+\frac{1}{4}\cos2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin4x\right]_0^{\pi}=1$$

57) گزینه 3

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^{L}x\,dx=L\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{L}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}x\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\left[\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L}$$

$$a_n = \frac{}{\pi^2 n^2}(\cos(n\pi) - 1) \Rightarrow a_{2m} = 0$$

$$a_{2m-1} = \frac{-4L}{\pi^2 (2m-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4L}{\pi^2 (2m-1)^2} \cos(2m-1)\frac{\pi}{L}x$$

58) گزینه صحیح ندارد.

$$b_{mn} = \frac{4}{LK}\int_0^K \int_0^L f(x,y)\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi y}{K})\,dxdy$$

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi xy\sin(nx)\sin(my)\,dxdy$$

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin(nx)dx\int_0^\pi y\sin(my)\,dy$$

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2}(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi)(-\frac{\pi}{m}\cos m\pi) = \frac{4}{nm}\cos n\pi \cos m\pi$$

$$b_{mn} = \frac{4}{nm}(-1)^{n+m}$$

59) گزینه 1

با توجه به تعریف $f(x)$, $g(x)$ داریم:

$$g(x) = f(x) + 1$$

$$g(x) = \frac{5}{2} - \frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \mathbf{K})$$

مقدار ثابت سری فوریه‌ی $g(x)$ $= \frac{5}{2}$

60) گزینه2

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 2x dx + \int_0^\pi \sin 2x \cos 2x dx)$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 4x dx + \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 4x dx) = \frac{-1}{8\pi}\left[\cos 4x\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \cos 4x\Big|_0^\pi\right]$$

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx + \int_0^\pi \sin^2 2x dx)$$

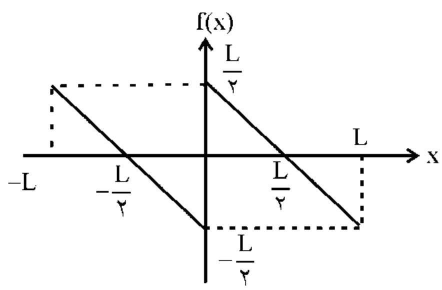
$$b_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{2}(1-\cos 4x)\,dx + \int_0 (1-\cos 4x)dx\right)$$

$$b_2 = \frac{3}{4}$$

61) گزینه 3

$$T = L \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{n\pi}{\frac{L}{2}} = \frac{2n\pi}{L}$$

بنابراین گزینه 1 نادرست است.



با توجه به منحنی، $f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $a_0 = a_n = 0$

بنابراین گزینه‌های 2 و 4 نیز نادرست هستند.

62) گزینه 4

در $x = \frac{\pi}{4}$ تابع پیوسته است بنابراین مقدار سری با مقدار تابع برابر می‌باشد.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{4n^2-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2m-1 \\ (-1)^m, & n = 2m \end{cases}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{16m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

63) گزینه 1

$$n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow L = \pi \,, a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \,,\ a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{\pi}{2}a_n$$

$$\int_0 f(x)\sin\ x\,dx = \frac{}{3}\int_0 f(x)(1-\cos 2x)\,dx = \frac{}{2}\int_0 f(x)\,dx - \frac{}{2}\int_0 f(x)\cos 2x\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2x dx = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}a_2 = -\frac{\pi}{4}\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{16}$$

64) گزینه 1

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}\cos nx$$

تساوی پارسوال:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1^2\,dx = 2\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$$

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2 = \frac{2\alpha}{\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}(\pi-\alpha)$$

65) گزینه 3

از سری فوریه انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} + \mathbf{K}\right) + c$$

$$c = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} + \mathbf{K}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} + \mathbf{K}\right) + \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{x^2}{4} = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} - \mathbf{K}$$

66) گزینه 2

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L \sin\frac{\pi}{L}t\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}t\Big|_0^L = \frac{2}{\pi}$$

67) گزینه 3

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$\int_0^x f(y)\,dy = \frac{a_0}{2}x + \sum\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) + c,\ 0 < x < 2\pi$$

باید ضریب $\sin(nx)$را در بسط فوریه‌ی $\frac{x}{2}$ نیز به دست اوریم.

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}x\sin(nx)\,dx = \frac{a_0}{2\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}$$

$$b'_n = \frac{a_0}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\frac{a_0}{n}$$

بنابراین ضریب $\sin(nx)$ در بسط $\int_0^x f(y)\,dy$ برابر است با:

$$B_n = -\frac{a_0}{n}+\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}(a_n - a_0)$$

68) گزینه 3

تساوی پارسوال:

$$\frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2}{3}L^2 = \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

69) گزینه 1

$$f(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$$

مقدار سری فوریه در $x=0$ برابر است با:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$$

مقدا سری در $x=0$ برابر است با: $\frac{1}{2}(f(0^+)+f((2\pi)^-))$

فقط در گزینه 1 رابطه‌ی $\frac{1}{2}(f(0^+)+f((2\pi)^-)) = e$ صادق می‌باشد.

انتگرال فوریه

چنانچه مشاهده کردیم سری فوریه برای توابع متناوب تعریف گردید و برای توابع با حوزه تعریف متناهی با تبدیل آن‌ها به توابع متناوب فرد یا زوج نیز سری فوریه قابل محاسبه است.

تابع غیرمتناوب $y=f(x), -\infty<x<\infty$ سری فوریه ندارد ولی می‌توان آن را به صورت حد سری فوریه یک تابع متناظر نمایش داد حد چنین سری فوریه‌ای را می‌توان به صورت یک انتگرال نمایش داد که انتگرال فوریه نامیده می‌شود.

انتگرال فوریه:

اگر تابع $f(x)$ در هر بازه متناهی هموار قطعه‌ای بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد (مطلقاً انتگرال‌پذیر)، در اینصورت انتگرال فوریه‌ی این تابع به صورت زیر معرفی می‌شود

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

نکته 16: مقدار انتگرال فوریه در $x=a$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد

الف) اگر $f(x)$ در نقطه‌ی **a** پیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه با $f(a)$ برابر است.

ب) اگر $f(x)$ در نقطه‌ی **a** ناپیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه در این نقطه برابر است با

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a^-}f(x)+\lim_{x\to a^+}f(x)\right]$$

نکته 17:

الف) اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد در اینصورت

$$B(\omega)=0 \quad , \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega$$

ب) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد در اینصورت

$$A(\omega)=0 \quad , \qquad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega \\ A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega x dx \\ B(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\omega x dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega \\ A(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega x dx \\ B(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\omega x dx \end{cases}$$

انتگرال فوریه کسینوسی:

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,\infty)$ معرفی شده است. اگر $f(x)$ در هر بازه‌ی متناهی هموار قطعه‌ای بوده و $\int_0^\infty |f(x)|^2 dx$ همگرا باشد در اینصورت $f(x)$ را به صورت زوج بسط می‌دهیم و انتگرال فوریه کسینوسی به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$$

$$A(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\omega)\cos\omega x d\omega$$

مقدار انتگرا فوریه کسینوسی در نقاط بازه‌ی $(0,\infty)$ از نکته‌ی (16) به دست می‌آید و در نقطه‌ی $x=0$ مقدار انتگرال فوریه کسینوسی با $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ برابر است.

انتگرال فوریه سینوسی:

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,\infty)$ معرفی شده است. اگر $f(x)$ در هر بازه‌ی متناهی هموار قطعه‌ای بوده و $\int_0^\infty |f(x)|^2 dx$ همگرا باشد در اینصورت $f(x)$ را به صورت فرد بسط می‌دهیم و انتگرال فوریه سینوسی به صورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$$

مقدار انتگرال فوریه سینوسی در نقاط بازه‌ی $(0,\infty)$ از نکته‌ی (16) به دست می‌آید و در نقطه‌ی $x=0$ مقدار انتگرال فوریه سینوسی با صفر برابر است.

$$f(x) = e^{-kx} \quad , k > 0 \, , \, x > 0$$

پاسخ:

برای انتگرال فوریه کسینوسی تابع را به صورت زوج بسط می‌دهیم

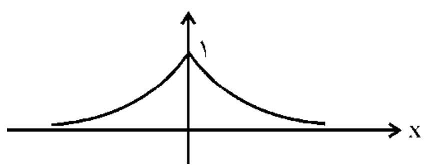
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-kx} & x > 0 \\ e^{kx} & x < 0 \end{cases} = e^{-k|x|}$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx} \cos \omega x dx = \frac{2}{\pi}\frac{k}{k^2+\omega^2}$$

در محاسبه انتگرال فوق از تبدیل لاپلاس $\cos \omega x$, $\int_0^\infty e^{-sx} \cos \omega x dx = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ استفاده کرده‌ایم.

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{k^2+\omega^2} d\omega \, , \, x > 0 \, , K > 0$$

منحنی انتگرال فوریه کسینوسی به صورت زیر می‌باشد:



برای انتگرال فوریه سینوسی، $f(x)$ را به صورت فرد بسط می‌دهیم.

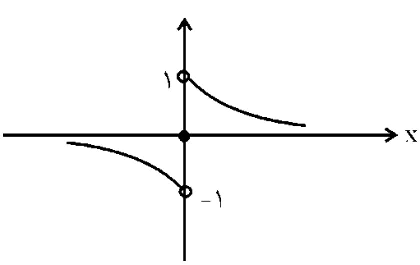
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x > 0 \\ -f(-x) & , \ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-kx} & , \ x > 0 \\ -e^{kx} & , \ x < 0 \end{cases}$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx} \sin \omega x dx = \frac{2}{\pi}\frac{\omega}{K^2+\omega^2}$$

در محاسبه‌ی انتگرال فوق از تبدیل لاپلاس $\sin \omega x$، $\int_0^\infty e^{-Sx} \sin \omega x dx = \frac{\omega}{S^2+\omega^2}$ استفاده کرده‌ایم.

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{K^2+\omega^2} d\omega \, , \, x > 0 \, , \, K > 0$$

منحنی انتگرال فوریه سینوسی به صورت زیر می‌باشد:



$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{K^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2K}e^{-kx}\quad,\ x>0\,,k>0$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{K^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-kx}\quad,\ x>0\,,K>0$$

تساوی پارسوال:

اگر $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$ باشد آنگاه

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx=\int_0^{\infty}\left[A^2(\omega)+B^2(\omega)\right]d\omega$$

اگر $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$ باشد آنگاه

$$\pi\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx=\int_0^{\infty}\left[A^2(\omega)+B^2(\omega)\right]d\omega$$

مثال ۲۲: در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty}f(\omega)\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1-x\ ,0\le x\le 1\\ 0,x>1\end{cases}$ **تابع** $f(\omega)$ **برابر است با: (برق ــ ۷۹)**

1) $\frac{2}{\pi}(\frac{1-\cos\omega}{\omega^2})$ 2) $\frac{2}{\pi}(\frac{1+\cos\omega}{\omega^2})$ 3) $\frac{2}{\pi}(\frac{\cos\omega-1}{\omega^2})$ 4) $\frac{2}{\pi}(\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{1-\cos\omega}{\omega^2})$

پاسخ: گزینه 1

انتگرال فوریه کسینوسی تابع $g(x)=\begin{cases}1-x\ ,\ 0\le x\le 1\\ 0\quad\ ,\ x>1\end{cases}$ موردنظر است.

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}g(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-x)\cos\omega x dx$$

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(1-x)}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}(\frac{1-\cos\omega}{\omega^2})$$

مثال ۲۳: انتگرال فوریه تابع زیر برابر است با: **(برق–۷۱)**

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

1) $-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$ 2) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\sin(n\pi x)$ 3) $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\omega x\sin\omega x}{\omega}d\omega$ 4) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$

پاسخ: گزینه 4

با توجه به کران‌های انتگرال، گزینه (4) صحیح می‌باشد.

$f(x)$ تابعی زوج است بنابراین

$B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega$$

مثال ۲۴: با توجه به تبدیل انتگرال فوریه، حاصل $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}d\alpha$ وقتی $x\ge 0$ است برابر است با:

1) $\frac{2}{\pi}e^{-x}$ 2) $\frac{\pi}{2}e^{-x}$ 3) $\frac{\pi}{2}e^{x}$ 4) $\frac{\pi}{2}e^{2x}$

پاسخ: گزینه 2

در انتگرال لاپلاس $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}$ کافی است $\omega\to\alpha$ و $k\to 1$ تبدیل شود بنابراین مقدار انتگرال برابر است با $\frac{\pi}{2}e^{-x}$

مثال ۲۵: شکل انتگرال $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ عبارتست از $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega$ در اینصورت حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx$ برابر است با

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi^2}{2}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi^2}{4}$

پاسخ: گزینه 3

تابع $f(t)$ در $t=0$ پیوسته است بنابراین مقدار انتگرال فوریه با مقدار $f(0)=1$ برابر است.

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\Rightarrow\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega=x^2, x\ge 0\Rightarrow d\omega=2xdx\Rightarrow\frac{d\omega}{\omega}=\frac{2xdx}{x^2}=\frac{2dx}{x}$$

$$\omega=0\Rightarrow x=0\ ,\ \omega=\infty\Rightarrow x=\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\int_0^\infty(\sin x^2)\frac{2dx}{x}=2\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۶: اگر $f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos\omega x d\omega$ **باشد آنگاه** $A(\omega)$ **در نمایش** $xf(x)=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x d\omega$ **برابر است با**

1) $-\dfrac{da(\omega)}{d\omega}$ 2) $-\dfrac{d^2a(\omega)}{d\omega^2}$ 3) $\dfrac{da(\omega)}{d\omega}$ 4) $-a(\omega)$

پاسخ: گزینه 1

$$xf(x)=\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x d\omega \Rightarrow A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)\sin\omega x dx$$

$$f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos\omega x d\omega \Rightarrow a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$$

از رابطه‌ی فوق نسبت به ω مشتق می‌گیریم:

$$\frac{da(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty -xf(x)\sin\omega x dx=-A(\omega)\Rightarrow A(\omega)=-\frac{da(\omega)}{d\omega}$$

مثال ۲۷: با استفاده از انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1\ , & 0<x<1\\ 0\ , & x>1\end{cases}$**، مقدار** $\int_0^\infty (\frac{\sin x}{x})^2 dx$ **را تعیین کنید.**

پاسخ:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega$$

تساوی پارسوال:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^2(x)dx=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty(\frac{\sin\omega}{\omega})^2 d\omega$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 dx=\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty(\frac{\sin\omega}{\omega})^2 d\omega\Rightarrow\int_0^\infty(\frac{\sin\omega}{\omega})^2 d\omega=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۸: انتگرال فوریه $f(x)=\begin{cases}-1 & -L<x<0\\ 1 & 0<x<L\end{cases}$ **را تعیین کنید و سپس مقدار انتگرال** $\int_0^\infty\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$ **را محاسبه نمائید.**

پاسخ:

$f(x)$ تابعی فرد است بنابراین $A(\omega)=0$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^L\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi\omega}(1-\cos L\omega)$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos L\omega}{\omega}\sin\omega x d\omega$$

تساوی پارسوال:

$$\frac{}{\pi}\int_0 dx = \frac{}{\pi^2}\int_0 \frac{}{\omega^2} d\omega$$

$$\frac{2L}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(2\sin^2\frac{L\omega}{2})^2}{\omega^2} d\omega \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^4\frac{L\omega}{2}}{\omega^2} d\omega = \frac{L\pi}{8}$$

$$L = 2 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^4\omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

صورت مختلط انتگرال فوریه:

اگر در انتگرال فوریه حقیقی از روابط زیر استفاده کنیم.

$$\sin\omega x = \frac{1}{2i}(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}),\ \cos\omega x = \frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$$

آنگاه انتگرال فوریه مختلط به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

نکته 20: بین ضرایب $A(\omega)$, $B(\omega)$ در انتگرال فوریه حقیقی و ضریب $C(\omega)$ در انتگرال فوریه مختلط (نمایی) روابط زیر صادق است

$$c(\omega) = \frac{1}{2}(A(\omega) - i\,B(\omega))$$
$$c(-\omega) = \frac{1}{2}(A(\omega) + i\,B(\omega))$$

$$A(\omega) = c(\omega) + c(-\omega)$$

$$B(\omega) = i(c(\omega) - c(-\omega))$$

مثال ۲۹: انتگرال فوریه مختلط تابع $f(x) = e^{-K|x|}, K > 0$ را تعیین کنید سپس ضرایب انتگرال فوریه حقیقی را به دست آورید.

پاسخ:

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{kx} e^{-i\omega x} dx + \int_0^\infty e^{-kx} e^{-i\omega x} dx\right)$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{k - i\omega} e^{(k-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{k + i\omega} e^{-(k+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty}\right]$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{K - i\omega} + \frac{1}{K + i\omega}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{k}{k^2 + \omega^2}$$

انتگرال فوریه مختلط (نمایی):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega$$

$$c(-\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{K}{K^2+\omega^2}$$

$$A(\omega) = c(\omega) + c(-\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{K}{K^2+\omega^2}$$

$$B(\omega) = i(c(\omega) - c(-\omega)) = 0$$

نتیجه‌ی حاصل برای $A(\omega)$ با مثال (21) مطابقت دارد.

نکته 21: در محاسبه انتگرال فوریه‌ی بعضی توابع از $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos\omega x dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ استفاده می‌کنیم.

۱ـ معادله‌ی انتگرالی مقابل را در نظر می‌گیریم: $\int_0^\infty f(\omega)\sin\omega x\,d\omega = \begin{cases} 1-x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$ **در اینصورت** $f(\omega)$ **برابر است با:**

1) $\frac{2(\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$
2) $\frac{2(\omega+\sin\omega)}{\pi\omega^2}$
3) $\frac{2(\omega-2\cos\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$
4) $\frac{2(2\cos\omega-\omega-\sin\omega)}{\pi\omega^2}$

۲ـ چه رابطه‌ای بین توابع $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ **و** $F(\lambda)=\frac{2\sin\lambda}{\lambda}$ **برقرار است؟**

1) $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$
2) $F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda^2 x}dx$
3) $F(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda^2 x}dx$
4) $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

۳ـ تابع f مطلقاً انتگرال‌پذیر و در بازه $[-L,L]$ تکه‌ای هموار است. اگر نمایش انتگرال فوریه این تابع به صورت $f(x)=\int_0^a (a-\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$ **باشد ($a>0$ ثابت) آن‌گاه نمایش انتگرال فوریه تابع $xf(x)$ برابر است با:**

1) $\int_0^a \sin(\omega x)\,d\omega$
2) $\int_0^a \cos(\omega x)\,d\omega$
3) $\int_0^a \omega\cos(\omega x)\,d\omega$
4) $\int_0^a \omega\sin(\omega x)\,d\omega$

۴ـ با توجه به این که $\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>1 \\ \frac{\pi}{4} & x=1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$ **می‌باشد.** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ **چقدر است؟**

1) π
2) $\frac{\pi}{2}$
3) 2π
4) $\frac{\pi}{4}$

۵ـ اگر $\int_0^\infty g(\omega)\sin\omega x\,d\omega = \begin{cases} 0 & x>1 \\ 1 & 0<x<1 \\ -1 & -1<x<0 \\ 0 & x<-1 \end{cases}$ **باشد، حاصل** $\frac{d}{d\omega}[\omega g(\omega)]$ **کدام است؟**

1) $\frac{\sin\omega}{\pi}$
2) $\frac{\cos\omega}{\pi}$
3) $\frac{2\sin\omega}{\pi}$
4) $\frac{2\cos\omega}{\pi}$

۶ـ اگر $f(x)$ در رابطه‌ی انتگرالی $\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx + \int_0^\infty x f(x)\cos(\omega x)dx = 0$ صدق کند و $f(1)=1$، در این صورت $f(x)$ برابر است با:

1) $\frac{2x}{x^2+1}$ 2) $\frac{2x}{x^4+1}$ 3) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ 4) $\frac{4x^3}{(x^2+1)^2}$

۷ـ هرگاه $\int_0^\infty g(t)\cos(tx)dt = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$ باشد، $g(0)$ کدام گزینه است؟

1) $2a$ 2) $\frac{a}{\pi}$ 3) $\frac{2}{\pi}$ 4) $\frac{2a}{\pi}$

۸ـ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , & |x|<1 \\ 0 & , & |x|>1 \end{cases}$ برابر است با:

1) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x \sin\omega}{\omega}d\omega$ 2) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\omega \sin\omega x}{\omega}d\omega$

3) $f(x) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\omega x \cos\omega}{\omega}d\omega$ 4) $f(x) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\omega x \sin\omega}{\omega}d\omega$

۹ـ انتگرال فوریه تابع e^{-x^2} کدام است؟

1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\omega^2}{4}} e^{-i\omega x}d\omega$ 2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega e^{-i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\omega^2}}{\omega^2} e^{-i\omega x}d\omega$ 4) انتگرال فوریه ندارد

۱۰ـ هرگاه $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)d\omega$ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , & |x|<1 \\ 0 & , & |x|>1 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه مقدار انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{\sin x - \sin\frac{x}{2}}{x}dx$ برابر است با:

1) صفر 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $-\frac{\pi}{2}$

۱۱ـ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ کدام است؟

1) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ 2) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin\omega x + \omega\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

3) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin\omega x + \cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$ 4) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\omega(\sin\omega x + \cos\omega x)}{1+\omega^2}d\omega$

۱۲ـ انتگرال فوریه تابع $f(t) = \begin{cases} 1 & -1<t<1 \\ 0 & t>1, t<-1 \end{cases}$ عبارت است از

1) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega)\sin(\omega t)}{\omega}d\omega$ 2) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)\cos(\omega t)}{\omega}d\omega$

3) $\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega^2}d\omega + \int_0^\infty \frac{\cos\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega\right]$ 4) $\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin^2\omega\cos\omega t}{\omega t}d\omega + \int_0^\infty \frac{\cos^2\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega\right]$

۱۳ـ در معادله انتگرالی $\int_0 f(\omega)\sin \omega x d\omega = \begin{cases} \ \\ 0 & x > \pi \end{cases}$ ، تابع $f(\omega)$ کدام است؟

1) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$ 2) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1+\cos\omega\pi)$ 3) $\frac{2}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$ 4) $\frac{2\omega}{\pi(\omega^2-1)}(1-\cos\omega\pi)$

۱۴ـ اگر $\int_0^\infty g(\omega)\cos\omega x d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{d}{d\omega}\left[(1-\omega^2)g(\omega)\right]$ کدام گزینه است؟

1) $-\sin\frac{\pi\omega}{2}$ 2) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$ 4) $\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\omega}{2}-\frac{\omega}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}$

۱۵ـ مقدار انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{\pi}$ 3) π 4) $\frac{\pi}{4}$

۱۶ـ انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$ عبارتست از:

1) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1+\omega^2}dx$ 2) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

3) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1-\omega^2}dx$ 4) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1+\cos\pi\omega)\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega$

۱۷ـ تابع f بر R مطلقاً انتگرال‌پذیر و در هر بازه‌ی کراندار قطعه‌ای پیوسته است. اگر $f(2^+)=10$ ، $f(2^-)=12$، مقدار $\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos a(x-2)\,dx\,da$ کدام است؟

1) 5π 2) 6 3) 11π 4) 22

پاسخ

1) گزینه 1

انتگرال فوریه سینوسی تابع $g(x)=\begin{cases}1-x\,, & 0\le x\le 1\\ 0 & ,x>1\end{cases}$ مشخص شده است.

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}g(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-x)\sin\omega x dx$$

$$f(\omega)=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x}{\omega}\cos\omega x+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega-\sin\omega}{\omega^2}\right)$$

2) گزینه 4

برای $f(x)$ انتگرال فوریه مختلط را می‌نویسیم:

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{-1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1}$$

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega}-e^{i\omega})=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

3) گزینه 1

$$f(x)=\int_0^{a}(a-\omega)\cos(\omega x)d\omega\Rightarrow\qquad a-\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx$$

از رابطه‌ی فوق نسبت به ω مشتق می‌گیریم:

$$-1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}-x f(x)\sin(\omega x)dx$$

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}xf(x)\sin(\omega x)dx\Rightarrow xf(x)=\int_0^{a}\sin(\omega x)d\omega$$

4) گزینه 2

مقدار $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است ولی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>1\\ \frac{\pi}{4} & x=1\\ 0 & x<1\end{cases}$ انتگرال فوریه ندارد چون $\int_0^\infty f^2(x)\,dx$ همگرا نمی‌باشد.

5) گزینه 3

تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & 0<x<1\\ -1 & -1<x<0\\ 0 & x<-1\end{cases}$ فرد است بنابراین

$$A(\omega)=0$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos\omega x}{\omega}\right]_0^1$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\Rightarrow g(\omega)=B(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

$$\omega g(\omega)=\frac{2}{\pi}(1-\cos\omega)\Rightarrow\frac{d}{d\omega}\left[\omega g(\omega)\right]=\frac{2}{\pi}\sin\omega$$

6) گزینه 1

$$g(\omega)=\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx\Rightarrow\frac{dg(\omega)}{d\omega}=\int_0^\infty x\,f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega}+g(\omega)=0\Rightarrow g(\omega)=Ke^{-\omega}$$

$$\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx=Ke^{-\omega}\Rightarrow B(\omega)=\frac{2}{\pi}Ke^{-\omega}$$

$$f(x)=\frac{2K}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega}\sin(\omega x)d\omega$$

$$L(\sin at)=\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,dt=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\omega}\sin(\omega x)\,d\omega=\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{2K}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$$

$$f(1)=1\Rightarrow k=\pi\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

7) گزینه 4

انتگرال فوریه تابع زوج $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ موردنظر است.

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a} f(x)\cos(tx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\cos(tx)\,dx$$

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(tx)}{t}\bigg|_{0}^{a}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(ta)}{t}\Rightarrow g(0)=\lim_{t\to 0} g(t)=\frac{2a}{\pi}$$

8) گزینه 1

$$B(\omega)=0$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega x}{\omega}\bigg|_{0}^{1}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}x\,d\omega$$

9) گزینه 1

از انتگرال نکته (21) استفاده می‌کنیم:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{\pi}{4a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$B(\omega)=0$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$c(\omega)=\frac{1}{2}(A(\omega)-i\,B(\omega))=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

انتگرال فوریه مختلط تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{i\omega x}d\omega$$

چون بخش موهومی انتگرال فوق برابر صفر است بنابراین می‌توانیم به جای $e^{i\omega x}$ از $e^{-i\omega x}$ استفاده کنیم

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4}}e^{-i\omega x}d\omega$$

10) گزینه 1

در انتگرال فوریه مقدار $x=0$ را در نظر می‌گیریم:

$$1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{x}{2} \Rightarrow d\omega = \frac{1}{2}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\frac{1}{2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x - \sin\frac{x}{2}}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

11) گزینه 1

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi e^{-x}\cos\omega x dx$$

$$A(\omega) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x dx = L(\cos\omega x)\Big|_{s=1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-x}\sin\omega x dx$$

$$B(\omega) = \int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x dx = L(\sin\omega x)\Big|_{s=1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

12) گزینه 2

پاسخ مشابه تست شماره‌ی (8) می‌باشد.

13) گزینه 2

انتگرال فوریه سینوسی تابع $g(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$ موردنظر است.

$$f(\omega) = B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin\omega x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(\omega+1)x + \sin(\omega-1)x]dx$$

$$f(\omega) = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{\cos(\omega+1)x}{\omega+1} + \frac{\cos(\omega-1)x}{\omega-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}(1+\cos\omega\pi)\left[\frac{1}{\omega+1} + \frac{1}{\omega-1}\right]$$

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi}(1+\cos\omega\pi)\frac{\omega}{\omega^2-1}$$

14) گزینه 3

انتگرال فوریه کسینوسی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ موردنظر است:

$$g(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\cos\omega x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(\omega+1)x+\cos(\omega-1)x\right]dx$$

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\omega+1)x}{\omega+1}+\frac{\sin(\omega-1)x}{\omega-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\pi}\cos\frac{\omega\pi}{2}\left[\frac{1}{\omega+1}-\frac{1}{\omega-1}\right]$$

$$g(\omega)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\omega\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\omega^2}\right)\Rightarrow(1-\omega^2)g(\omega)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\omega\pi}{2}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[(1-\omega^2)g(\omega)\right]=-\frac{1}{2}\sin\frac{\omega\pi}{2}$$

15) گزینه 1

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(-1)^-}f(x)+\lim_{x\to(-1)^+}f(x)\right]=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

16) گزینه 4

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+\omega)x+\sin(1-\omega)x\right]dx$$

$$A(\omega)=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\cos(1-\omega)x}{1-\omega}\right]_0^{\pi}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}(1+\cos\omega\pi)\left(\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1-\omega}\right)=\frac{2}{\pi}(1+\cos\omega\pi)\frac{1}{1-\omega^2}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1+\cos\omega\pi)\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega$$

17) گزینه 3

$$I=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos a(x-2)dxda$$

$$I=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[\cos ax\cos 2a+\sin ax\sin 2a\right]dxda$$

$$I=\int_0^{\infty}\left[\cos 2a\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos ax dx+\sin 2a\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin ax dx\right]da$$

$$I=\pi\int_0^{\infty}\left[\cos(2a)A(a)+\sin(2a)B(a)\right]da$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\right]d\omega$$

مقدار انتگرال فوریه در $x=2$ $=\frac{1}{2}(f(2^-)+f(2^+))=\frac{1}{2}(12+10)=11$

$$I=11\pi$$

[illegible]) تبدیل فوریه

تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

تبدیل فوریه $f(x)$ را با نمادهای $\bar{f}(\omega)$، $\hat{f}(\omega)$ یا $F(f(x))$ نیز نمایش می‌دهند.

$f(x)$ را تبدیل فوریه‌ی معکوس $F(\omega)$ می‌نامیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

نکته 22: اگر تابع $f(x)$ در هر بازه‌ی متناهی هموار قطعه‌ای بوده و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد آنگاه تبدیل فوریـه‌ی $f(x)$ موجود است و آنگاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=0\ ,\ \lim_{\omega\to\pm\infty}|F(\omega)|=0$$

نکته 23: ضرایب تبدیل فوریه و معکوس آن در کتب ریاضی به صورت‌های زیر نیز در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \end{cases}$$

تبدیل فوریه سینوسی:

برای تابع $f(x)\ ,\ x>0$ تبدیل فوریه سینوسی و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_s(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega$$

در روابط فوق ممکن است ضریب هر دو انتگرال را $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ در نظر بگیریم.

تبدیل فوریه کسینوسی

برای تابع $f(x), x>0$ تبدیل فوریه کسینوسی و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_c(\omega) = \int_0 f(x) \cos \omega x dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega x d\omega$$

در روابط فوق ممکن است ضریب هر دو انتگرال را $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ در نظر بگیریم.

نکته 24: اگر $f(x)$ در هر زیر بازه از $(0,\infty)$ هموار قطعه‌ای بوده و انتگرال $\int_0^\infty |f(x)| dx$ همگرا باشد آنگاه تبدیل فوریه‌ی سینوسی و کسینوسی موجود هستند.

خواص تبدیل فوریه:

اگر $F(\omega)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد آنگاه

1) تراکم یا انبساط

$$F(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

2) انتقال

$$F(f(x-a)) = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

3) ضرب e^{iax} در تابع $f(x)$

$$F(f(x)e^{iax}) = F(\omega - a)$$

4) ضرب $\mathbf{x}$ در تابع $f(x)$

$$F(xf(x)) = iF'(\omega)$$

$$F(x^n f(x)) = (i)^n F^{(n)}(\omega)$$

5) تبدیل فوریه مشتق $f(x)$

اگر $f(x)$، $f'(x)$، $f''(x)$، ...، $f^{(n-1)}(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,\infty)$ پیوسته بوده و $f^{(n)}(x)$ در هر بازه‌ی متناهی پیوسته‌ی قطعه‌ای باشد و ضمناً $f(x)$، $f'(x)$، ...، $f^{(n)}(x)$

در بازه‌ی $(-\infty,\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند آنگاه

$$F(f^{(n)}(x)) = (i\omega)^n F(\omega)$$

$$F(f'(x)) = i\omega F(\omega)$$

$$F(f''(x)) = -\omega^2 F(\omega)$$

$$F_s(f''(x)) = \omega f(0^+) - \omega^2 F_s(f(x))$$
$$F_s(f''(x)) = -f'(0^+) - \omega^2 F_c(f(x))$$

7) برای دو تابع $g(x),f(x)$ کانولوشن (پیچش) به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)du$$

اگر تابع g,f در بازه‌ی $(0,\infty)$ تعریف شده باشند آنگاه

$$f(x)*g(x) = \int_{0}^{x} f(u)g(x-u)du = \int_{0}^{x} g(u)f(x-u)du$$

اگر $F(\omega)$ و $G(\omega)$ تبدیلات فوریه‌ی $g(x),f(x)$ باشند آنگاه

$$F(f(x)*g(x)) = F(\omega)G(\omega)$$
$$F(f(x)g(x)) = \frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$$

8) تساوی پارسوال

اگر $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

اگر $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 dx$$

9) اگر تابع حقیقی $f(x)$ را به صورت مجموع توابع زوج و فرد بنویسیم در اینصورت روابط زیر را داریم

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

$$F(f_e(x)) = \mathrm{Re}(F(\omega))$$

$$F(f_o(x)) = i\,\mathrm{Im}(F(\omega))$$

10) اگر $f(x)$ تابعی حقیقی باشد آنگاه $\mathrm{Re}(F(\omega))$ تابعی زوج و $\mathrm{Im}(F(\omega))$ تابعی فرد است.

بنابراین تبدیل فوریه‌ی تابع زوج، تابعی حقیقی و زوج می‌باشد و تبدیل فوریه‌ی تابع فرد، تابعی موهومی و فرد است.

11) اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد در اینصورت $F(f(x)) = 2F_c(f(x))$ اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد در اینصورت

$$F(f(x)) = -2iF_s(f(x))$$

12) خاصیت دوگان

$$F(F(x)) = 2\pi f(-\omega)$$

13) ارتباط تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس

اگر $f(x)$ در بازه‌ی $(0,\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر بوده و $f(x) = 0\ ;\ x < 0$ در اینصورت روابط زیر صادق است

$$F(\omega) = L(f(x))\Big|_{S = i\omega}$$

$$F_C(f(x)) = \mathrm{Re}(F(\omega))$$

$$F_s(f(x)) = -\mathrm{Im}(F(\omega))$$

اگر $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,0)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر بوده و $f(x) = 0\ ;\ x > 0$ در اینصورت رابطه‌ی زیر صادق است.

$$F(\omega) = L(f(-x))\Big|_{S = -i\omega}$$

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌های $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد در اینصورت ارتباط تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} ,\quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = L(f_1(x))\Big|_{S = i\omega} + L(f_2(-x))\Big|_{s = -i\omega}$$

مثال ۳۰: تبدیل فوریه پاسخ معادله $y' - 4y = \begin{cases} e^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ **چیست اگر** $y(\omega)$ **تبدیل فوریه** $y(t)$ **باشد؟ (کامپیوتر ــ ۷۸)**

1) $\dfrac{-1}{16+\omega^2}$ 2) $\dfrac{1}{4-i\omega}$ 3) $\dfrac{1}{4+i\omega}$ 4) $\dfrac{1}{16-\omega^2}$

پاسخ: گزینه 1

$$g(t) = \begin{cases} e^{-4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow L(g(t)) = \frac{1}{S+4}$$

$$F(g(t)) = \frac{1}{S+4}\Big|_{S = i\omega} = \frac{1}{4+i\omega}$$

$$F(y') = i\omega y(\omega)$$

$$i\omega y(\omega) - 4y(\omega) = \frac{1}{4+i\omega} \Rightarrow y(\omega) = \frac{1}{i\omega - 4}\,\frac{1}{i\omega + 4} = \frac{1}{i^2\omega^2 - 16}$$

$$y(\omega) = -\frac{\quad}{\omega^2 + 16}$$

مثال ۳۱: اگر $F(f(x)) = F(\omega)$ **باشد در اینصورت تبدیل فوریه‌ی تابع** $f'(2-\frac{t}{4})$ **را بر حسب** $F(\omega)$ **تعیین کنید.**

پاسخ:

$$F(f'(t)) = i\omega F(\omega)$$

$$F(f'(t+2)) = i\omega F(\omega)e^{2i\omega}$$

$$F(f'(-\frac{t}{4}+2)) = \frac{1}{\left|-\frac{1}{4}\right|} i(-4\omega)F(-4\omega)e^{2i(-4\omega)}$$

$$F(f'(-\frac{t}{4}+2)) = -16i\omega F(-4\omega)e^{-8i\omega}$$

مثال ۳۲: تبدیل فوریه‌ی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = e^{-K|x|}, K > 0$

ب) $f(x) == \frac{1}{K^2+x^2}$

ج) $f(x) = e^{-Kx^2} \quad ; \quad K > 0$

پاسخ:

الف)

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-Kx} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ e^{kx} & x < 0 \end{cases}$$

$$F(f_1(x)) = L(f_1(-x))\Big|_{S=i\omega} = \frac{1}{i\omega+K}$$

$$f_2(-x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-Kx} & x > 0 \end{cases}$$

$$F(f_2(x)) = L(f_2(-x))\Big|_{S=-i\omega} = \frac{1}{-i\omega+K}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i\omega+K} + \frac{1}{-i\omega+K} = \frac{2K}{K^2+\omega^2}$$

ب) از خاصیت دوگان استفاده می‌کنیم

$$F(e^{-K|x|}) = \frac{2K}{K^2+\omega^2} \Rightarrow F(\frac{2K}{K^2+x^2}) = 2\pi e^{-K|-\omega|} = 2\pi e^{-K|\omega|}$$

$$F(\frac{1}{K^2+x^2}) = \frac{1}{2K} 2\pi e^{\ldots} = \frac{\pi}{K} e^{\ldots}$$

ج)

$$F(e^{-Kx^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Kx^2} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} \cos\omega x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} \sin\omega x dx$$

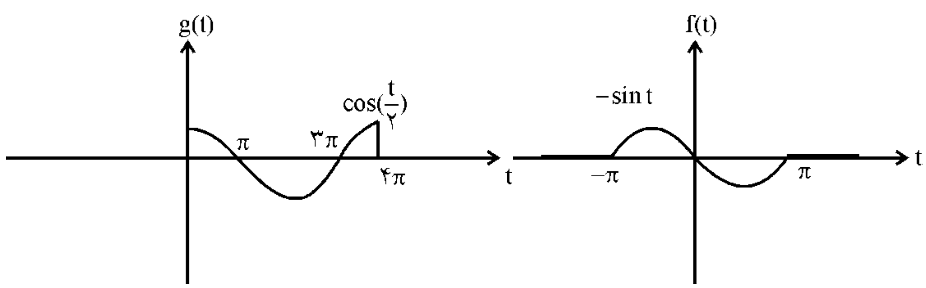
چون $e^{-kx^2}\sin\omega x$ تابعی فرد است بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Kx^2} \sin\omega x dx = 0$$

$$F(e^{-Kx^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Kx^2} \cos\omega x dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-Kx^2} \cos\omega x dx$$

$$F(e^{-Kx^2}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{4K}} e^{-\frac{\omega^2}{4K}} = \sqrt{\frac{\pi}{K}} e^{-\frac{\omega^2}{4K}}$$

مثال ۳۳: اگر توابع $f(t), g(t)$ به شکل زیر باشند، تبدیل فوریه تابع $g(t)$ $(G(\omega))$، بر حسب $F(\omega)$ برابر است با



1) $2F(2\omega)e^{-j\omega\pi}$ 2) $2F(2\omega)e^{-j2\omega\pi}$ 3) $2j\omega F(\omega)e^{-j\omega\pi}$ 4) $4j\omega F(2\omega)e^{-j2\omega\pi}$

پاسخ: گزینه 4

$$f(t) = \begin{cases} -\sin t & , \ -\pi < t < \pi \\ 0 & , \ t > \pi, t < -\pi \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \cos\frac{t}{2} & , \ 0 < t < 4\pi \\ 0 & , \ t < 0, t > 4\pi \end{cases}$$

$$F(f(t)) = F(\omega) \Rightarrow F(f(t-\pi)) = e^{-j\omega\pi}F(\omega)$$

$$F(f(\frac{t}{2}-\pi)) = 2e^{-j2\omega\pi}F(2\omega)$$

$$f(\frac{t}{2}-\pi) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2} & , 0 < t < 4\pi \\ 0 & , t < 0, t > 4\pi \end{cases}$$

$$g(t) = 2(f(\frac{t}{2}-\pi))'$$

$$F(g(t)) = 2j\omega F(f(\frac{t}{2}-\pi)) = 2j\omega\left[2e^{-j2\omega\pi}F(2\omega)\right]$$

$F(g(t)) = 4j\omega e \quad F(2\omega)$

نکته 25: تابع ضربه دارای خواص زیر می‌باشد

1)

$$\delta(Kx) = \frac{1}{|K|}\delta(x)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

2)

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

3)

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\int_{0^-}^{0^+} f(x)\,\delta(x)dx = f(0)$$

4) تابع پله واحد

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$u'(x) = \delta(x)$$

5)

$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$$
$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) = f(x) * g'(x)$$

نکته 26: رابطه‌ی زیر در مورد تبدیل فوریه صادق است

$$F\left(\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{i\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

مثال ۳۴: تبدیل فوریه توابع $\delta(x), 1, u(x), \sin ax, \cos ax$ **را تعیین کنید.**

پاسخ:

$$F(\delta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,e^{-i\omega x}dx = e^{-i\omega x}\Big|_{x=0} = 1$$

تبدیل فوریه $f(x) = 1$ را از خاصیت دوگان تعیین می‌کنیم:

$$F(\delta(x)) = 1 \Rightarrow F(1) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$F(1) = 2\pi\delta(\omega)$

$$F(u(x)) = F(\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx) = \frac{1}{i\omega} F(\delta(x)) + \pi(F(\delta(x))\Big|_{\omega=0})\delta(\omega)$$

$$F(u(x)) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$F(\sin ax) = \frac{1}{2i} F(e^{iax} - e^{-iax}) = \frac{1}{2i}(2\pi\delta(\omega-a) - 2\pi\delta(\omega+a))$$

$$F(\sin ax) = -\pi i(\delta(\omega-a) - \delta(\omega+a)) = \pi i(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$$

$$F(\cos ax) = \frac{1}{2} F(e^{iax} + e^{-iax})$$

$$F(\cos ax) = \pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$$

مثال ۳۵: تبدیل فوریه تابع زیر را به دست آورید

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < -1 \\ 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

1) $\frac{1-\cos\omega}{2\omega^2}$ 2) $\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$ 3) $\frac{1-2\cos\omega}{\omega^2}$ 4) $\frac{2\cos\omega-1}{\omega^2}$

پاسخ: گزینه 2

$f(x)$ تابعی زوج است.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} f(t)\cos\omega t dt - i\int_{-1}^{1} f(t)\sin\omega t dt$$

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} f(t)\cos\omega t dt = 2\int_{0}^{1}(1-t)\mathrm{cod}\omega t dt$$

$$F(\omega) = 2\left[\frac{1-t}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\right]_0^1 = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

نکته 27: تبدیل فوریه‌های مهم

1) $F(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, a > 0$

2) $F(\frac{1}{a^2+x^2}) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$

3) $F(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$, $a > 0$

4) $F(\delta(x)) = 1$

5) $F(u(x) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$

6) $F(1) = 2\pi\delta(\omega)$

۱ــ با استفاده از فرمول $F_c[f''] = -\omega^2 F_c[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$، تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-ax}$ با شرط $a > 0$ عبارت‌ست از:

1) $\frac{1}{\omega - a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 2) $\frac{\omega\pi}{a^2 + \omega}$ 3) $\frac{a}{a^2 + \omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 4) $\frac{a}{\sqrt{\pi}(a^2 - \omega^2)}$

۲ــ اگر f تابعی فرد و به ازای xهای نامنفی $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x \ge \pi \end{cases}$ آنگاه تبدیل فوریه آن $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx$ با کدام گزینه برابر است؟

1) $\frac{2\sin(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$ 2) $\frac{2i\sin(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$ 3) $\frac{2\sin(\pi\omega)}{1 - \omega^2}$ 4) $\frac{2i\sin(\pi\omega)}{1 - \omega^2}$

۳ــ اگر $F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x)\,dx$ تبدیل فوریه‌ی $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه‌ی $2\cos ax\, f(x)$ کدام است؟

1) $F(\alpha - a) + F(\alpha + a)$ 2) $F(a - \alpha) - F(a + \alpha)$ 3) $F(a - \alpha) + F(a + \alpha)$ 4) $F(\alpha - a) - F(\alpha + a)$

۴ــ اگر تبدیل فوریه $f(t)$ با $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$ تعریف شود، آن‌گاه تبدیل فوریه تابع $f(t) = e^{-a|t|}\sin bt$، $b, a > 0$ ثابت، کدام است؟

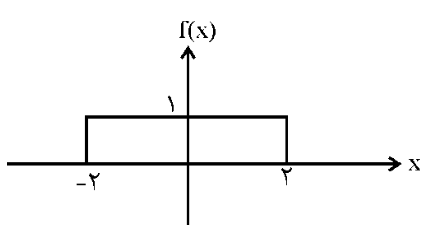
1) $\frac{-4iab\omega}{(a^2 + b^2 + \omega^2)^2 - 4b^2\omega^2}$ 2) $\frac{4ib\omega}{(a^2 + b^2 + \omega^2)^2 - 4b^2\omega^2}$

3) $\frac{4iab\omega}{(a^2 + b^2 + \omega^2)^2 - 4b^2\omega^2}$ 4) $\frac{4ab\omega}{(a^2 + b^2 + \omega^2)^2 - 4b^2\omega^2}$

۵ــ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-x}, x > 0$ عبارت‌ست از

1) $F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z}{z^2 + 1}$ 2) $F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{z^2 + 1}$ 3) $F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{z^2 - 1}$ 4) $F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z}{z^2 - 1}$

۶ــ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ که در شکل مقابل نشان داده شده، کدام است؟



1) $\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$ 2) $\frac{4\cos(2\omega)}{\omega}$ 3) $2\cos(4\omega)$ 4) $4\sin(2\omega)$

۷ـ تبدیل فوریه‌ی حل معادله دیفرانسیل $\pi y'' - \pi y = \frac{\;}{t^2+1}$ **چیست؟**

1) $y(\omega) = \omega^2 e^{-\omega}$ 2) $y(\omega) = \frac{e^{-\omega}}{\omega^2}$ 3) $y(\omega) = (\omega^2+1)e^{-\omega}$ 4) $y(\omega) = \frac{e^{-\omega}}{\omega^2+1}$

۸ـ اگر تبدیل فوریه یک تابع $f(t)$، $-\infty < t < \infty$ **دارای فرمول زیر باشد**

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt$$

آنگاه تبدیل فوریه $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ **را بیابید (راهنمایی** $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$)

1) $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0 & ,|\omega| > 1 \\ \pi & ,|\omega| \le 1 \end{cases}$ 2) $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0 & ,|\omega| > 1 \\ \frac{\pi}{2} & ,|\omega| = 1 \\ \pi & ,|\omega| < 1 \end{cases}$ 3) $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0 & ,|\omega| > 1 \\ \frac{\pi}{4} & ,|\omega| = 1 \\ \frac{\pi}{2} & ,|\omega| < 1 \end{cases}$ 4) $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0 & ,|\omega| \ge 1 \\ \pi & ,|\omega| \le 1 \end{cases}$

۹ـ تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x) = e^{-3x}$ **کدام است؟**

1) $\hat{f}(\omega) = \frac{3}{9+\omega^2}$ 2) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{9+\omega^2}$ 3) $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{3}{9+\omega^2}$ 4) $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{9+\omega^2}$

۱۰ـ اگر تبدیل فوریه تابع $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ **برابر با** $F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ **باشد، تبدیل فوریه‌ی** $g(t) = te^{-\alpha t^2}$ **عبارت خواهد بود از:**

$(j = \sqrt{-1})$

1) $\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ 2) $-\frac{\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ 3) $\frac{j\omega}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ 4) $-\frac{j\omega}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

۱۱ـ تابع $f(x) = \begin{cases} 1 , & |x| < a \\ 0 , & |x| > a \end{cases}$، $a > 0$ **ثابت، مفروض است اگر** $\hat{f}(0) = 2a$، **آن‌گاه** $\hat{f}(1)$ **چقدر است؟**

1) $\sin a$ 2) $2\sin a$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin a$ 4) $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sin a$

۱۲ـ تبدیل فوریه‌ی تابع، $a > 0$ ، $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$، **با رابطه** $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ **تعریف می‌شود، در این صورت** $\hat{f}(\omega)$:

1) برابر است با $\pi i e^{-a|\omega|}$

2) برابر است با $\pi i e^{\omega a}$

3) تابع فردی است و برابر است با $\pi i e^{\omega a}$ به ازای $\omega > 0$

4) تابع فردی است و برابر است با $\pi i e^{\omega a}$ به ازای $\omega < 0$

1) یک تابع فرد و حقیقی است　　2) یک تابع زوج و حقیقی است

3) یک تابع زوج و موهومی محض است　　4) یک تابع فرد و موهومی محض است

۱۴ــ اگر تبدیل فوریه تابع مطلقاً انتگرال‌پذیر و تکه‌ای هموار f با رابطه‌ی $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$ **تعریف شود، آن‌گاه تبدیل فوریه** $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ **کدام است؟**

1) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & , |\omega|<1\\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$　　2) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1 & , |\omega|<\pi\\ 0 & , |\omega|>\pi\end{cases}$　　3) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\pi & , |\omega|<1\\ 0 & , |\omega|>1\end{cases}$　　4) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & , |\omega|>1\\ 0 & , |\omega|<1\end{cases}$

۱۵ــ اگر $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt=\dfrac{\pi}{2}$**، آنگاه تبدیل فوریه تابع** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$**، یعنی** $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}e^{i\omega x}dx$ **برابر است با:**

1) $\begin{cases}0 & ,|\omega|\ge 1\\ \pi & ,|\omega|<1\end{cases}$　　2) $\begin{cases}0 & ,|\omega|\ge \pi\\ \pi & ,|\omega|<\pi\end{cases}$　　3) $\begin{cases}0 & ,|\omega|\ge \pi\\ \frac{\pi}{2} & ,|\omega|=\pi\\ \pi & ,|\omega|<\pi\end{cases}$　　4) $\begin{cases}0 & ,|\omega|>1\\ \frac{\pi}{2} & ,|\omega|=1\\ \pi & ,|\omega|<1\end{cases}$

۱۶ــ اگر $F(e^{-x^2})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ **(تبدیل فوریه) باشد، آنگاه تبدیل فوریه تابع** $g(x)=xe^{-x^2}$ **کدام است؟**

1) $i\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}$　　2) $i\omega e^{\frac{\omega^2}{2}}$　　3) $-i\omega e^{-\frac{i\omega^2}{2}}$　　4) $-\dfrac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

۱۷ــ تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}e^{-2x} & , x>0\\ 0 & , x<0\end{cases}$ **عبارتست از:**

1) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}(2-i\omega)}$　　2) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(2-i\omega)}$　　3) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}(2+i\omega)}$　　4) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(2+i\omega)}$

۱۸ــ تابع $f(\omega)$ **تبدیل فوریه‌ی تابع** $f(x)=e^{-x^2}$ **در کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر صادق است؟**

1) $\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}+\omega F(\omega)=0$　　2) $\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}+\dfrac{\omega^2}{2}F(\omega)=0$　　3) $\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}+\dfrac{\omega}{2}F(\omega)=0$　　4) $\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}+\dfrac{2}{\omega}F(\omega)=0$

۱۹ــ تبدیل فوریه‌ی سینوسی $f(t)=\dfrac{e^{-at}}{t}$ **برابر کدام است؟**

1) $\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$　　2) $\tan^{-1}(\dfrac{\omega}{a})$　　3) $\tan\dfrac{\omega}{a}$　　4) $\dfrac{\omega}{a^2+\omega^2}$

۲۰ـ اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{\ }{t^2+a^2}$ ($a>0$ ثابت) به صورت $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\ } f(t)\,dt$ تعریف شود $(\omega\in R)$ آنگاه $F(\omega)$ کدام است؟

1) $-\pi i e^{-\omega a}$ 2) $\pi i e^{-\omega a}$ 3) $2\pi i e^{-\omega a}$ 4) $\begin{cases}-\pi i e^{-\omega a}, & \omega>0\\ \pi i e^{\omega a}, & \omega<0\end{cases}$

۲۱ـ برای $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ و $t>0, -\infty<x<\infty$ ، $u(x,0)=f(x)$ ، $-\infty<x<\infty$، تبدیل فوریه‌ی $u(x,t)$ نسبت به متغیر x یا $U(\omega,t)$ کدام است؟

1) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega t}$ 2) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-\omega^2 t}$ 3) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-j\omega t}$ 4) $U(\omega,t)=F(\omega)e^{-j\omega^2 t}$

۲۲ـ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$ عبارتست از

1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\cos 2\omega+2\cos\omega}{\omega})$ 2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\sin 2\omega+2\sin\omega}{\omega})$ 3) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\cos 2\omega-2\cos\omega}{\omega})$ 4) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\sin 2\omega+2\sin\omega}{\omega})$

۲۳ـ تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}e^{a^2 ix} & ,-1<x<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$

1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(a^2+\omega)}{a^2+\omega}$ 2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(a^2+\omega)}{a^2+\omega}$

3) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(a^2+\omega)}{a^2-\omega}$ 4) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a^2-\omega)}{a^2-\omega}$

۲۴- تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ کدام است؟ (در صورتی که $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ را تبدیل فوریه $f(t)$ تعریف کنیم)

1) $F(\omega)=e^{-|\omega|}$ 2) $F(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$ 3) $F(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$ 4) $F(\omega)=\frac{\pi}{1+i\omega}$

۲۵) برای تابع $f(x)=\begin{cases}x\ , & -1<x<1\\ 0\ , & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ تبدیل فوریه با تعریف $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ عبارت است از:

1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2\cos\omega}{-i\omega}+\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega}+e^{i\omega}))$ 2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{\omega^2}(\omega\cos\omega-\sin\omega)$

3) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{2\cos\omega}{i\omega}+\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega}-e^{i\omega}))$ 4) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{i\cos\omega}{\omega}+\frac{i\sin\omega}{\omega^2})$

پاسخ تست

1) گزینه 3

$$f(x)=e^{-ax} \Rightarrow f'(x)=-ae^{-ax},\ f''(x)=a^2e^{-ax}$$

$$f'(0)=-a$$

$$a^2F_c\left[e^{-ax}\right]=-\omega^2F_C\left[e^{-ax}\right]+\sqrt{\frac{2}{\pi}}a \Rightarrow F_c\left[e^{-ax}\right]=\frac{a}{a^2+\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

2) گزینه 2

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$$

$f(x)\cos\omega x$ تابعی فرد است بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = 0$$

$$F(\omega)=-i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=-2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=-2i\int_{0}^{\pi}\sin x\sin\omega x dx$$

$$F(\omega)=i\int_{0}^{\pi}\left[\cos(1+\omega)x-\cos(1-\omega)x\right]dx=i\left[\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}-\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}\right]_{0}^{\pi}$$

$$F(\omega)=i(-\sin\pi\omega)\left(\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1-\omega}\right)=i(-\sin\pi\omega)\frac{2}{1-\omega^2}$$

$$F(\omega)=2i\frac{\sin\pi\omega}{\omega^2-1}$$

3) گزینه 1

$$2\cos ax=e^{iax}+e^{-iax}$$

$$F\left[2\cos ax f(x)\right]=F\left[e^{iax}f(x)+e^{-iax}f(x)\right]=F(\alpha-a)+F(\alpha+a)$$

4) گزینه 1

براساس نکته (27) و خواص تبدیل فوریه داریم:

$$F(e^{-a|t|})=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$F(f(x)e^{iax})=F(\omega-a)$$

$$F(e^{-a|t|}\sin bt)=\frac{1}{2i}F(e^{-a|t|}e^{ibt}-e^{-a|t|}e^{-ibt})$$

$$=\frac{}{2i}\left[\frac{}{a^2+(\omega-b)^2}-\frac{}{a^2+(\omega+b)^2}\right]$$

$$=\frac{a}{i}\left[\frac{1}{a^2+b^2+\omega^2-2b\omega}-\frac{1}{a^2+b^2+\omega^2+2b\omega}\right]$$

$$=-ai\frac{4b\omega}{(a^2+b^2+\omega^2)^2-4b^2\omega^2}=\frac{-4iab\omega}{(a^2+b^2+\omega^2)^2-4b^2\omega^2}$$

5) گزینه 2

از خاصیت (13) تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم ضمناً براساس گزینه‌ها ضریب تبدیل فوریه را $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ در نظر می‌گیریم.

$$F(\omega)=L(f(x))\Big|_{s=i\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{s+1}\Big|_{s=i\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i\omega+1}$$

$$F_c(f(x))=\mathrm{Re}(F(\omega))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Re}(\frac{1}{i\omega+1})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Re}(\frac{1-i\omega}{1+\omega^2})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+z^2}$$

6) گزینه 1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-2}^{2}e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{i\omega}(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega})$$

$$F(\omega)=\frac{1}{i\omega}(e^{2i\omega}-e^{-2i\omega})=\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

7) گزینه 4

نکته (27) و خاصیت (5) تبدیل فوریه: $F(y''(t))=-\omega^2Y(\omega),\ F(\frac{1}{1+t^2})=\pi e^{-|\omega|}$

$$-\pi\omega^2Y(\omega)-\pi Y(\omega)=-\pi e^{-|\omega|}$$

$$Y(\omega)=\frac{e^{-|\omega|}}{1+\omega^2}$$

8) گزینه 2

روش اول: ابتدا تبدیل فوریه‌ی تابع $g(x)=\begin{cases}1\,, & |x|<1\\ \mathbf{0}\,, & |x|>1\end{cases}$ را تعیین می‌کنیم

$$F(g(x))=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

برای تعیین تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ از خاصیت دوگان استفاده می‌کنیم

$$F\left(\frac{\qquad}{x}\right) = 2\pi g(-\omega) \Rightarrow F(f(x)) = \pi g(-\omega) = \pi g(\omega)$$

ضمناً در نقاط ناپیوستگی از میانگین حد چپ و حد راست استفاده می‌کنیم:

$$F(f(x)) = \begin{cases} 0 & |\omega| > 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & |\omega| = 1 \\ \pi & |\omega| < 1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos \omega t\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \sin \omega t\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \sin \omega t dt = 0$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos \omega t dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos \omega t\, dt$$

$F(0) = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \Rightarrow$ گزینه 3 نادرست است

در گزینه 4 برای $F(1)$ دو مقدار مشخص شده است که بی معنی است بنابراین گزینه 4 نادرست است.

$$F(1) = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cos t dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین گزینه 2 نادرست است.

9) گزینه 1

$$F_C(f(x)) = \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \int_{0}^{\infty} e^{-3x} \cos \omega x dx = L(\cos \omega x)\Big|_{s=3}$$

$$F_c(f(x)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\Big|_{s=3} = \frac{3}{9+\omega^2}$$

10) گزینه 4

$$f(t) = e^{-\alpha t^2} \Rightarrow f'(t) = -2\alpha t e^{-\alpha t^2} = -2\alpha g(t)$$

$$g(t) = -\frac{1}{2\alpha} f'(t) \Rightarrow F(g(t)) = -\frac{1}{2\alpha} F(f'(t)) = -\frac{1}{2\alpha} j\omega \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

11) گزینه 2

تبدیل فوریه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(\omega)=K\int_{-\infty} f(x)e \quad dx=K\int_{-a} e \quad dx=\frac{}{-i\omega}(e \quad -a \quad)$$

$$F(\omega)=\frac{2K\sin\omega a}{\omega}$$

$$F(0)=2Ka=2a\Rightarrow K=1\Rightarrow F(\omega)=\frac{2\sin\omega a}{\omega}$$

$$F(1)=2\sin a$$

12) گزینه 4

از خاصیت (4) تبدیل فوریه و نکته (27) استفاده می‌کنیم

$$F\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}=\begin{cases}\frac{\pi}{a}e^{-a\omega}, & \omega>0\\ \frac{\pi}{a}e^{a\omega}, & \omega<0\end{cases}$$

$$F(xf(x))=iF'(\omega)$$

$$F\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right)=i\left(\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}\right)'=\begin{cases}-\pi i e^{-a\omega}, & \omega>0\\ \pi i e^{a\omega}, & \omega<0\end{cases}$$

بنابراین تبدیل فوریه‌ی $f(x)$، تابعی فرد است و برابر است با $\pi i e^{a\omega}$ به ازای $\omega<0$

13) گزینه 4

براساس خاصیت (10) تبدیل فوریه، گزینه 4 صحیح است.

14) گزینه 3

براساس پاسخ تست (8)، گزینه 3 صحیح است.

15) گزینه 4

این تست مشابه تست (8) است ولی در این تست روش دیگری را ارائه می‌دهیم.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}e^{i\omega x}dx=\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}(\cos\omega x+i\sin\omega x)dx$$

$$F(\omega)=2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cos\omega x\,dx=\int_0^\infty \frac{\sin(1+\omega)x}{x}dx+\int_0^\infty \frac{\sin(1-\omega)x}{x}dx$$

اگر $1+\omega>0$ و $1-\omega>0$ یعنی $-1<\omega<1$ آنگاه: $F(\omega)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

$$F(\omega)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$$

اگر $\omega=1$ آنگاه: $F(\omega)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$

اگر $\omega=-1$ آنگاه: $F(\omega)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$$F(\omega)=\begin{cases}0 & , \quad |\omega|>1\\ \frac{\pi}{2} & , \quad |\omega|=1\\ \pi & , \quad |\omega|<1\end{cases}$$

16) گزینه 4

$$F(f'(x))=i\omega F(\omega)$$

$$F(e^{-x^2})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}} \Rightarrow F(-2xe^{-x^2})=\frac{i\omega}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$F(xe^{-x^2})=-\frac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

17) گزینه 4

از خاصیت (13) تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم:

$$F(\omega)=L(f(x))\Big|_{s=i\omega}=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=i\omega}=\frac{1}{i\omega+2}$$

البته براساس گزینه‌ها ضریب تبدیل فوریه $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ در نظر گرفته شده است:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega+2}$$

18) گزینه 3

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx$$

$$F'(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}-ixe^{-x^2}e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}-ie^{-i\omega x}\,d(e^{-x^2})$$

$$F'(\omega)=-\frac{1}{2}\left[-ie^{-x^2}e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\omega e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx\right]$$

$$F(\omega) = -\frac{}{2}\int_{-\infty} \omega e \quad e \quad dx = -\frac{}{2}F(\omega)$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{2}F(\omega) = 0$$

19) گزینه2

$$L(\sin \omega t) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

$$L(\frac{\sin \omega t}{t}) = \int_s^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} ds = \tan^{-1}\frac{s}{\omega}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega}$$

$$F_s(\frac{e^{-at}}{t}) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t}\sin \omega t\, dt = L(\frac{\sin \omega t}{t})\Big|_{s=a} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{a}{\omega}$$

$$F_s(\frac{e^{-at}}{t}) = \cot^{-1}\frac{a}{\omega} = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

20) گزینه 4

براساس پاسخ تست (12)، گزینه 4 صحیح است.

21) گزینه 2

از طرفین رابطه‌ی داده شده نسبت به $\mathbf{x}$ تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = (i\omega)^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

$$\frac{dU(\omega,t)}{U(\omega,t)} = -\omega^2 dt \Rightarrow \mathrm{Ln}U(\omega,t) = -\omega^2 t + c_1$$

$$U(\omega,t) = ce^{-\omega^2 t}$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow U(\omega,0) = F(\omega) \Rightarrow C = F(\omega)$$

$$U(\omega,t) = F(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

22) گزینه 2

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^1 -\cos \omega x dx + \int_1^2 \cos\omega x dx\right]$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{\sin \omega x}{\omega}\Big|_0^1 + \frac{\sin \omega x}{\omega}\Big|_1^2\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\sin 2\omega - 2\sin \omega}{\omega})$$

23) گزینه 4

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\, dx$$

$$F(\omega) = \frac{}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1} e \; e \; dx = \frac{}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1} e \; dx$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(a^2-\omega)}\left[e^{i(a^2-\omega)} - e^{-i(a^2-\omega)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin(a^2-\omega)}{a^2-\omega}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a^2-\omega)}{a^2-\omega}$$

24) گزینه 2

نکته (27):

$$F(\frac{1}{a^2+t^2}) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

$$F(\frac{1}{1+t^2}) = \pi e^{-|\omega|}$$

25) گزینه 2

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ \mathbf{0} & \text{سایر نقاط} \end{cases} \Rightarrow f(x) = x\,g(x)$$

$$F(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

$$F(g(x)) = G(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

براساس خاصیت (4) تبدیل فوریه:

$$F(f(x)) = F(xg(x)) = iG'(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}i(\frac{\sin\omega}{\omega})'$$

$$F(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{\omega^2}(\omega\cos\omega - \sin\omega)$$

فصل دوم: توابع مختلط، نگاشت‌ها

2-1) اعداد مختلط

مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود

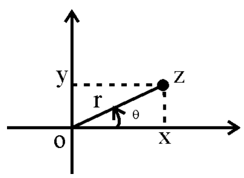
$$C=\left\{x+iy \mid x,y\in \mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\right\}$$

هر عدد مختلط $z=x+iy$ معرف یک نقطه در صفحه‌ی مختلط می‌باشد بنابراین بـه صـورت $z=(x,y)$ نیـز نمـایش داده می‌شود.

$x=\mathrm{Re}(z)=$ بخش حقیقی عدد مختلط

$y=\mathrm{Im}(z)=$ بخش موهومی عدد مختلط

عدد مختلط را به فرم قطبی $Z=(r,\theta)$ نیز می‌توان نمایش داد.



(قدر مطلق یا اندازه یا مدول عدد $\mathbf{Z}$) $= |z| = r$

(زاویه یا آرگومان عدد $\mathbf{Z}$) $= \arg(z) = \theta$

θ هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد ولی $r\geq 0$ است.

نکته 1: ارتباط فرم دکارتی و فرم قطبی

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

اگر نقطه‌ی $\mathbf{Z}$ در ربع اول یا چهارم قرار داشته باشد آنگاه $\theta=\arctan(\frac{y}{x})$ و اگر نقطه‌ی $\mathbf{Z}$ در ربع دوم یا سوم قرار داشـته باشد آنگاه $\theta=\pi+\arctan(\frac{y}{x})$ براساس روابط فوق عدد مختلط $\mathbf{Z}$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$Z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

رابطه اویلر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

براساس رابطه اویلر $e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$ بنابراین

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$$

براساس رابطه‌ی فوق، هر عدد مختلط در فرم قطبی دارای بی‌شمار آرگومان است.

نکته 2: آرگومان اصلی

مقداری از آرگومان $\mathbf{Z}$ که در فاصله‌ی $(-\pi,\pi]$ قرار دارد را آرگومان‌های اصلی می‌نامیم و با $\operatorname{Arg}(z)$ نشان می‌دهیم.

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, k \in z$$

روابط مهم در مورد $\mathbf{i}$:

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, \frac{1}{i} = -i, i^4 = 1, i = e^{i\frac{\pi}{2}}, -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

تساوی دو عدد مختلط:

$$Z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}, Z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi; k \in z$$

اعمال ریاضی روی اعداد مختلط:

1) جمع و تفریق

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

2) حاصل‌ضرب

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1}.r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

3) مزدوج یک عدد مختلط

$z = x + iy = re^{i\theta}$

$\overline{z} = x - iy = re^{-i\theta}$

$\overline{z}$ (مزدوج **z**) قرینه‌ی نقطه **Z** نسبت به محور **x** ها می‌باشد.

نکته 3:

الف)

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 \, , \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

الف)

$z = \overline{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$
$\overline{z} = -z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

$z + \overline{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z), z - \overline{z} = 2iy = 2i\operatorname{Im}(z)$

$|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$

$\operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z) \, , \operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z)$

$|\overline{z}| = |z|, \arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

ب) از روابط $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

ج)

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

4) تقسیم دو عدد مختلط

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) , \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$$

5) توان صحیح

$$z = re^{i\theta}$$

$$z^k = r^k e^{ik\theta} , k \in z$$

نکته 4:

الف) فرمول دموآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta, k \in z$$

ب)

$$\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$$

6) ریشه **n** ام $(n \in N)$

$z = re^{i(\text{Arg}z + 2k\pi)} , k \in z , \text{Arg}z =$ (آرگومان اصلی **z**)

با فرض $\theta = \text{Arg}(z)$ ریشه‌ی **n** ام به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} , K = 0, 1, 2, \ldots , n-1$$

ریشه **n** ام متناظر با آرگومان اصلی $(k = 0)$ را ریشه اصلی **z** می‌نامیم.

نکته 5:

الف) $\sqrt[n]{z}$ دارای **n** مقدار متفاوت است که همگی روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt[n]{r}$ قرار دارند بنابراین اندازه همه ریشه‌ها برابر است و اختلاف آرگومان هر نقطه با نقطه‌ی بعدی برابر $\frac{2\pi}{n}$ می‌باشد.

ب) مجموع ریشه‌های **n** ام هر عدد مختلط صفر است.

ج) حاصل ضرب ریشه‌های **n** ام عدد مختلط **Z** برابر است با

$$\begin{cases} z & , n = \text{فرد} \\ -z & , n = \text{زوج} \end{cases}$$

حل معادله جبری درجه **n**:

معادله فوق دارای **n** ریشه $z_1, z_2, \ldots, z_n$ می‌باشد و روابط زیر صادق است

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \prod_{i=1}^{n} z_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

نکته 6: اگر $P(z)$ یک چند جمله‌ای از عدد مختلط **Z** با ضرایب حقیقی باشد.

آنگاه $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

نکته 7: اگر عدد مختلط، $z_0 = x_0 + iy_0$ یک ریشه‌ی معادله جبری فوق باشد در اینصورت عدد $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ نیز ریشه معادله فوق خواهد بود. بنابراین تعداد ریشه‌های مختلط یک معادله درجه **n**، عددی زوج است پس اگر **n** عددی فرد باشد معادله حداقل یک ریشه حقیقی خواهد داشت.

نکته 8: ریشه‌های معادله‌ی $z^n = 1$ عبارتند از

$$z = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

مثال ۱: مقدار $\sqrt{i}$ کدام است؟

1) $e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}$ 2) $e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$ 3) $e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ 4) $e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

پاسخ: گزینه 1

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2})} = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}, k = 0,1$$

مثال ۲: اگر $(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5 = -(\sin\theta + i\cos\theta)^6$ آنگاه θ کدام است؟

1) $\frac{k\pi}{4}$ 2) $\frac{k\pi}{8}$ 3) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$ 4) $\frac{(2k+1)\pi}{8}$

پاسخ: گزینه 2

$$(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5 = e^{i10\theta}$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

$$e^{i10\theta}=e^{-i6\theta}\Rightarrow e^{16i\theta}=1\Rightarrow 16\theta=2k\pi\Rightarrow \theta=\frac{k\pi}{8}$$

مثال ۳: اگر a , b مقادیر حقیقی باشند و $x+iy=\frac{1-ae^{ib}}{1+ae^{ib}}$ **آنگاه:**

1) $x=\frac{1-a^2}{1+a^2+2a\cos b}$ 2) $y=\frac{2a\sin b}{1+a^2+2a\cos b}$ 3) $x=\frac{2a\cos b}{1+a^2+2a\cos b}$ 4) $y=\frac{2a}{1+a^2+2a\cos b}$

پاسخ: گزینه 1

روش 1:

$$\frac{1-ae^{ib}}{1+ae^{ib}}=\frac{1-ae^{ib}}{1+ae^{ib}}\frac{1+ae^{-ib}}{1+ae^{-ib}}=\frac{1-ae^{ib}+ae^{-ib}-a^2}{1+ae^{-ib}+ae^{ib}+a^2}=\frac{1-a^2-2ia\sin b}{1+a^2+2a\cos b}=x+iy$$

$$x=\frac{1-a^2}{1+a^2+2a\cos b},y=\frac{-2a\sin b}{1+a^2+2a\cos b}$$

روش 2: در رابطه‌ی داده شده حالت خاص $b=\frac{\pi}{2}$ را در نظر می‌گیریم

$$x+iy=\frac{1-ae^{i\frac{\pi}{2}}}{1+ae^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{1-ai}{1+ai}\frac{1-ai}{1-ai}=\frac{1-a^2-2ai}{1+a^2}$$

$$x=\frac{1-a^2}{1+a^2},y=-\frac{2a}{1+a^2}$$

اگر در گزینه‌ها $b=\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم فقط نتیجه‌ی گزینه (1) صحیح می‌باشد.

مثال ٤: اگر $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ **باشد، مقدار** $w=z^{100}(1-i)$ **برابر کدام است؟**

1) $-1-i$ 2) $1-i$ 3) $-1+i$ 4) $1+i$

پاسخ: گزینه 3

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{100}=e^{i25\pi}=\cos(25\pi)+i\sin(25\pi)=-1$$

$$w=z^{100}(1-i)=-1+i$$

مکان‌های هندسی در صفحه مختلط:

1) خط $x=a$ $\qquad z=x+iy, x=a \to z=a+iy, y\in R$

2) خط $y=b$ $\qquad z=x+iy, y=b \to z=x+ib, x\in R$

3) معادله‌ی پارامتری $z=z_1+(z_2-z_1)t$ با شرط $0\le t\le 1$، معرف پاره‌خط واصل بین نقاط z_2,z_1 می‌باشد. اگر $t\le 0$، معرف نیم‌خط سمت z_1 و اگر $t\ge 1$، معرف نیم‌خط سمت z_2 خواهد بود.

4) $|z-z_1|=|z-z_2|$ معرف عمودمنصف پاره‌خط واصل z_2,z_1 می‌باشد. عمودمنصف این پاره‌خط، صفحه مختلط را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کند، نیم‌صفحه‌ی شامل z_1 به صورت $|z-z_1|<|z-z_2|$ و نیم‌صفحه‌ی شامل z_2 به صورت $|z-z_1|>|z-z_2|$ می‌باشد.

5) دایره

دایره‌ای به مرکز $z_0=x_0+iy_0$ و شعاع $\mathbf{R}$ دارای معادله زیر در صفحه مختلط می‌باشد.

$$|z-z_0|=R \ , \ z=x+iy$$

$$z=z_0+Re^{it}, 0\le t\le 2\pi$$

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t \\ y=y_0+R\sin t \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$$

6) بیضی

مکان هندسی نقاطی در صفحه است که مجموع فواصل هر نقطه از دو نقطه ثابت z_1,z_2 (کانون‌های بیضی) مقدار ثابت $2a$ می‌باشد.

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$

$2a>|z_1-z_2| \Rightarrow$ بیضی

$2a=|z_1-z_2| \Rightarrow$ پاره‌خط واصل بین نقاط z_2,z_1

$2a<|z_1-z_2| \Rightarrow$ مجموعه تهی

6) هذلولی

مکان هندسی نقاطی در صفحه است که قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه از دو نقطه ثابت z_1,z_2 (کانون‌های هذلولی) مقدار ثابت $2a$ است.

$||z-z_1|-|z-z_2||=2a$

$2a<|z_1-z_2| \Rightarrow$ هذلولی

معادله $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$ با فرض $2a<|z_1-z_2|$ یک شاخه هذلولی را نشان می‌دهد.

$2a=|z_1-z_2| \Rightarrow$ دو نیم خط که یکی سمت z_1 و دیگری سمت z_2 می‌باشد

نکته 9: معادله هر دایره و هر خط را در صفحه مختلط می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0$$

C , a مقادیر حقیقی هستند و **b** یک ثابت مختلط است.

اگر $a=0$ باشد معادله فوق معرف یک خط راست می‌باشد اگر $a\neq 0$ باشد معادله فوق معرف یک دایره یا یک نقطه یا مجموعه تهی خواهد بود.

نواحی در صفحه مختلط:

نقاط درون دایره‌ای به مرکز **a** و شعاع **R** به صورت $|z-a|<R$ نمایش داده می‌شود که به آن قرص دایره‌ای باز می‌گوییم.

$|z-a|<R$ را یک همسایگی از نقطه‌ی **a** با شعاع **R** می‌نامیم.

$0<|z-a|<R$ که شامل نقطه‌ی **a** نمی‌باشد را یک همسایگی محذوف از نقطه‌ی **a** با شعاع **R** می‌گوئیم.

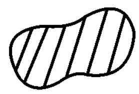
فرض کنید **s** مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط باشد. نقطه $a\in s$ را یک نقطه داخلی **s** می‌گوئیم اگر یک همسایگی از **a** وجود داشته باشد که همه نقاط آن به **s** متعلق باشد نقطه **a** یک نقطه خارجی **S** است اگر یک همسایگی از **a** یافت شود به طوریکه این همسایگی شامل هیچ نقطه‌ی داخلی **s** نباشد.

نقطه **a** را یک نقطه مرزی **s** می‌نامیم اگر **a** نه نقطه داخلی و نه نقطه خارجی آن باشد اگر **s** مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط باشد. s' را متمم **s** می‌نامیم اگر s' شامل نقاطی باشد که در **s** نیست و برعکس.

مجموعه **s** را باز می‌نامیم اگر هر نقطه متعلق به آن، یک نقطه داخلی باشد. مجموعه **s** را بسته می‌نامیم اگر s' مجموعه باز باشد.

مجموعه‌ی **S** را کراندار می‌نامیم هرگاه تمام نقاطش در دایره‌ای، با شعاع به قدر کافی بزرگ قرار داشته باشد در غیر اینصورت **s** را بی کران می‌گوییم.

مجموعه **s** را همبند می‌نامیم هرگاه هر دو نقطه دلخواه آن را بتوان با خط شکسته‌ای که از تعداد متناهی پاره‌خط



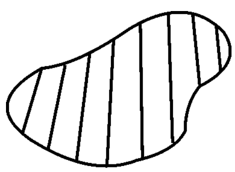
مجموعه همبند

مجموعه ناهمبند

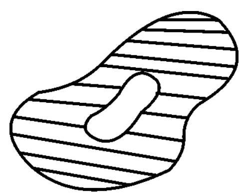
مجموعه همبند باز را، حوزه یا دامنه می‌نامیم.

مجموعه **S** را همبند ساده می‌گوییم اگر هر منحنی بسته واقع در **S** را بتوان در یک نقطه منقبض کرد که ضمن انقباض همواره در **S** واقع باشد.

به بیان دیگر مجموعه **S** را همبند ساده می‌گوییم اگر s' همبند باشد در غیر این صورت **S** را همبند مرکب می‌نامیم.



همبند ساده



همبند مرکب

ناحیه مجموعه‌ای است متشکل از یک حوزه و شاید، برخی و یا تمام نقاط مرزی آن حوزه.

مثال ٥: مجموعه‌ی s شامل نقاط z با شرایط $\mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) > 0$ می‌باشد باز یا بسته بودن s را تعیین کنید.

پاسخ:

مجموعه **S** باز نیست چون برای مثال **i** به **S** متعلق است ولی یک نقطه داخلی **S** نمی‌باشد.

مجموعه **S** بسته نیست چون برای مثال، 1 یک نقطه مرزی **S** است در حالیکه به **S** متعلق نمی‌باشد.

مثال ٦: ناحیه $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) > 1$ چه مکانی از صفحه مختلط را مشخص می‌کند؟

1) خارج دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$

2) داخل دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(-\frac{1}{2}, 0)$

3) داخل دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$

4) خارج دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(-\frac{1}{2}, 0)$

پاسخ: گزینه 3

$$\frac{}{z}=\frac{}{x+iy}=\frac{}{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{}{z})=\frac{}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2-x<0\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{4}$$

بنابراین ناحیه موردنظر داخل دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ می‌باشد.

مثال ۷: مکان هندسي نقاطي از صفحه مختلط که در رابط $\left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right|=\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند کدام است؟

1) یک خط مستقیم 2) دایره 3) بیضی 4) هذلولی

پاسخ: گزینه 1

$$\left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{z-1+i}{z-\frac{3i}{2}}\right|=1\Rightarrow|z-(1-i)|=\left|z-\frac{3i}{2}\right|$$

معادله فوق معرف عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $z_1=1-i, z_2=\frac{3i}{2}$ می‌باشد.

مثال ۸: فرض کنید z نقطه‌اي بر دایره واحد $|z|=1$ باشد $\mathrm{Arg}(\frac{1-z}{1+z})$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{4}, z\neq -1$

2) $\begin{cases}0 & \mathrm{Re}(z)>0\\ \pi & \mathrm{Re}(z)<0\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \mathrm{Im}(z)>0\\ -\frac{\pi}{2} & \mathrm{Im}(z)<0\end{cases}$

4) $\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & \mathrm{Im}(z)>0\\ \frac{\pi}{2} & \mathrm{Im}(z)<0\end{cases}$

پاسخ: گزینه 4

$$|z|=1\Rightarrow z=e^{i\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi$$

روش اول:

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(\frac{1-z}{1+z})&=\mathrm{Arc}\tan(-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})-\mathrm{Arc}\tan(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta})\\&=-\left[\mathrm{Arc}\tan(\cot\frac{\theta}{2})+\mathrm{Arc}\tan(\tan\frac{\theta}{2})\right]\\&=-\left[\mathrm{Arc}\tan(\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}))+\mathrm{Arc}\tan(\tan\frac{\theta}{2})\right]\end{aligned}$$

$$0<\theta<2\pi\Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \mathrm{Arc}\tan(\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}))=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{Arc}\tan(\tan\frac{\theta}{2})=\begin{cases}\frac{\theta}{2}\,, & 0<\theta<\pi\\ \frac{\theta}{2}-\pi, & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

$$0<\theta<\pi\Rightarrow \operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=-\frac{\pi}{2}$$

$$\pi<\theta<2\pi\Rightarrow \operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}-\pi)=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\,, & \operatorname{Im}(z)>0\\ \frac{\pi}{2}\,, & \operatorname{Im}(z)<0\end{cases}$$

روش دوم: دو نقطه‌ی $-i,i$ را روی $|z|=1$ در نظر می‌گیریم

$$z=i\Rightarrow \operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})=\operatorname{Arg}(\frac{1-i}{1+i})=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

$$z=-i\Rightarrow \operatorname{Arg}(\frac{1-z}{1+z})=\operatorname{Arg}(\frac{1+i}{1-i})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

نتایج حاصل فقط با گزینه (4) مطابقت دارد.

2-2) توابع مقدماتی مختلط

معمولاً تابع مختلط را به صورت $w=f(z)=u+iv$ معرفی می‌کنیم.

تابع نمایی:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$w=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$$

تابع نمایی را به فرم قطبی زیر نیز می‌توانیم بررسی کنیم.

$$w=e^z=e^x e^{iy}$$

$$|w|=e^x\,,\ \arg(w)=y$$

دامنه این تابع کل صفحه مختلط است.

چون $0<e^x<\infty$ بنابراین برد تابع e^z تمام صفحه مختلط غیر از مبدا مختصات می‌باشد.

نکته 10:

الف) چون $e^{2\pi i}=1$ بنابراین تابع e^z متناوب با دوره $2\pi i$ است

ب) $(e^{z}) = e^{z}$, $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

تابع لگاریتم:

$f(z) = \ln z , z = |z| e^{i\arg(z)}$

$\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$

$u = \ln|z| , v = \arg(z)$

برای $\arg(z)$ بی‌شمار مقدار وجود دارد بنابراین بی‌شمار مقدار برای $\ln z$ حاصل می‌گردد که همگی دارای بخش حقیقی ثابت $(u = \ln|z|)$ می‌باشند بنابراین مقادیر $\ln z$ در صفحه مختلط بر روی خط قائم $u = \ln|z|$ قرار دارند.

اگر از آرگومان‌های اصلی $\mathbf{Z}$ در رابطه‌ی فوق استفاده کنیم به مقدار اصلی $\ln z$ می‌رسیم که به صورت $\mathrm{Ln}z$ نمایش داده می‌شود.

$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$

$\mathrm{Ln}z$ یک تابع یک مقداری می‌باشد.

نکته 11:

الف) دامنه‌ی تعریف تابع $\mathrm{Ln}z$ (مقدار اصلی) تمام صفحه مختلط غیر از $z = 0$ می‌باشد.

ب) برد تابع $w = \mathrm{Ln}z = u + iv$ ناحیه‌ی $-\pi < V \le \pi$ می‌باشد.

ج) فرمول‌های مربوط به لگاریتم حقیقی مانند $\mathrm{Ln}(z_1z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$ در مورد مقدار اصلی لگاریتم صادق نمی‌باشند ولی رابطه‌ی $\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ قابل استفاده است به این معنی که بعضی از مقادیر سمت چپ تساوی با بعضی از مقادیر سمت راست تساوی برابر می‌باشد.

به عنوان مثال با فرض $z_1z_2 = 1 , z_1 = z_2 = -1$ داریم:

$\ln z_1 = \ln z_2 = i(\pi + 2k\pi)$, $\ln(z_1z_2) = i2k\pi$

$\mathrm{Ln}\, z_1 = \mathrm{Ln}\, z_2 = i\pi$, $\mathrm{Ln}(z_1z_2) = 0$

با توجه به مقادیر فوق رابطه‌ی $\mathrm{Ln} = (z_1z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$ صادق نمی‌باشد ولی با مقادیر $\ln(z_1z_2) = 0, \ln z_1 = i\pi , \ln z_2 = -i\pi$ رابطه‌ی $\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ صادق است.

نکته 12: برای محاسبه $z_1^{Z_2}$ از رابطه‌ی $z_1^{Z_2} = e^{Z_2 \ln Z_1}$ استفاده می‌کنیم اگر از مقدار اصلی لگاریتم $(\mathrm{Ln}z_1)$ استفاده کنیم

مثال ۹: اگر z یك عدد مختلط ناصفر، $\ln z = \ln r + i\theta, -\frac{5\pi}{6} \le \theta < \frac{7\pi}{6}$ باشد آنگاه $Ln(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ برابر است با

1) $\frac{i\pi}{3}$ 2) $-\frac{2i\pi}{3}$ 3) $-\frac{i\pi}{3}$ 4) $\ln\sqrt{3} + i\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه 2

$$\left|\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right| = 1, \arg(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$K = -1 \Rightarrow Arg(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$Ln(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = Ln1 + i(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{2i\pi}{3}$$

مثال ۱۰: مقدار اصلي $(1-i)^{4i}$ كدام است؟

1) $\exp(-2i\ln 3)\exp(-\pi)$ 2) $\exp(4i\ln 3)\exp(\pi)$ 3) $\exp(2i\ln 2)\exp(\pi)$ 4) $\exp(3i\ln 2)\exp(\pi)$

پاسخ: گزینه 3

$$(1-i)^{4i} = e^{4i\,Ln(1-i)}$$

$$|1-i| = \sqrt{2} \;, \; Arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$Ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$$

$$4i\,Ln(1-i) = \pi + i2\ln 2$$

$$(1-i)^{4i} = e^{\pi}e^{i2\ln 2} = \exp(\pi)\exp(i2\ln 2)$$

توابع مثلثاتی و هذلولی‌گون (هیپربولیک):

در مورد توابع مثلثاتی و هذلولی‌گون روابط زیر صادق می‌باشد.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \;, \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \;, \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

$$\tanh z = \frac{}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{}{e^{2z}+1}$$

(2

$$\sin(iz) = i\sinh z \ , \ \sinh(iz) = i\sin z$$

$$\cos(iz) = \cosh z \ , \ \cosh(iz) = \cos z$$

$$\tan(iz) = i\tanh z \ , \ \tanh(iz) = i\tan z$$

(3

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)$$

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

$$\sinh z = \sinh(x+iy) = \sinh x\cosh(iy) + \cosh x\sinh(iy)$$

$$\sinh z = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$$

$$\cosh z = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$$

(4

$$\left|\sin z\right|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$\left|\cos z\right|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$\left|\sinh z\right|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$\left|\cosh z\right|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

نکته 13: برای تبدیل روابط مثلثاتی به روابط هیپربولیکی از تبدیل‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin x \to i\sinh x$$
$$\cos x \to \cosh x$$
$$\tan x \to i\tanh x$$

توابع معکوس مثلثاتی و هیپربولیکی (هذلولی‌گون):

برای تعیین $\sinh^{-1} z$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$w = \sinh^{-1} z \Rightarrow z = \sinh w = \frac{1}{2}(e^{w} - e^{-w})$$

$$e^{w}-e^{-w}-2z=0\Rightarrow e^{2w}-2ze^{w}-1=0\Rightarrow e^{w}=z\pm\sqrt{z^{2}+1}$$

در محاسبات مختلط e^w می‌تواند منفی باشد.

$$w=\ln(z\pm\sqrt{z^{2}+1})=\sinh^{-1}z$$

با استفاده از روش فوق روابط زیر قابل اثبات می‌باشد.

$$\sinh^{-1}z=\ln(z\pm\sqrt{z^{2}+1})$$
$$\cosh^{-1}z=\ln(z\pm\sqrt{z^{2}-1})$$
$$\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

2)

$$\sin^{-1}z=-i\ln(iz\pm\sqrt{1-z^{2}})$$
$$\cos^{-1}z=-i\ln(z\pm i\sqrt{1-z^{2}})$$
$$\tan^{-1}z=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$$

نکته 14: روابط زیر بین توابع معکوس مثلثاتی و توابع معکوس هذلولی‌گون برقرار است

$$\sin^{-1}z=-i\sinh^{-1}(iz)\ ,\ \sinh^{-1}z=-i\sin^{-1}(iz)$$
$$\cos^{-1}z=i\cosh^{-1}z\ ,\ \cosh^{-1}z=-i\cos^{-1}z$$
$$\tan^{-1}z=-i\tanh^{-1}(iz),\tanh^{-1}z=-i\tan^{-1}(iz)$$

مثال ۱۱: کدام یك از گزاره‌هاي زیر براي معادله $\tan z=i$ درست است؟

1) معادله بی‌نهایت جواب دارد

2) معادله جواب ندارد

3) جواب‌های معادله به صورت $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$

4) جواب‌های معادله موهومی محض هستند.

پاسخ: گزینه 2

$$\tan z=\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=i\Rightarrow\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=-1$$

$$e^{2iz}-1=-e^{2iz}-1\Rightarrow e^{2iz}=-e^{2iz}\Rightarrow e^{2iz}=0$$

معادله فوق جواب ندارد چون برد تابع نمایی کل صفحه‌ی مختلط غیر از $w=0$ می‌باشد.

پاسخ:

$$\cos^{-1} z = -i\ln(z \pm i\sqrt{1-z^2})$$

$$\cos z = 2 \Rightarrow z = \cos^{-1} 2 = -i\ln(2 \pm i\sqrt{-3})$$

$$z = -i\ln(2 \mp \sqrt{3}), \ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow z = \pm i\ln(2+\sqrt{3})$$

لگاریتم فوق مختلط است بنابراین:

$$\ln(2+\sqrt{3}) = \ln\left|2+\sqrt{3}\right| + i2k\pi = \ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi$$

$$z = \pm i(\ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi) = \pm i\ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi \ , \ k \in z$$

چون $k \in z$ است بنابراین به جای $\pm 2k\pi$ از $2k\pi$ می‌توانیم استفاده کنیم.

دو دسته جواب به دست آمده است در بعضی تست‌ها فقط یکی از آن‌ها در گزینه‌ها مطرح می‌گردد.

۱) معادله $\sin z = 2$ وقتي $z = x + iy$:

1) دارای بی‌نهایت جواب به صورت $z = \frac{1}{i}\log(2+\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0,1,2,\ldots$ است.

2) دارای یک جواب به صورت $z = \frac{1}{10}\log(2 \mp \sqrt{3})$ است.

3) دارای بی‌نهایت جواب به صورت $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ است.

4) دارای یک جواب به صورت $z = \log(2 \mp \sqrt{3})$ است.

۲- اگر $Z_n = \cos\frac{\pi}{2^n} + i\sin\frac{\pi}{2^n}$ آنگاه مقدار $\prod_{m=1}^{\infty} Z_m$ كدام است؟

1) -1 2) 1 3) πi 4) $\frac{\pi}{2}$

۳- عدد مختلط Z ریشه چند جمله‌اي درجه n و غیرثابت $P(z)$ با ضرایب حقیقي است، كدام مورد برقرار است؟

1) $\bar{z}$ ریشه $P(z)$ نیست 2) $z+\bar{z}$ ریشه $P(z)$ است 3) $\bar{z}$ ریشه $P(z)$ است 4) $z-\bar{z}$ ریشه $P(z)$ است

۴- مقدار اصلي $Ln(-4)$ كدام است؟

1) $2Ln2$ 2) $2Ln2 - i\pi$ 3) $2Ln2 + i\pi$ 4) $2Ln2 - i\frac{\pi}{2}$

۵- معادله دایره به مركز $(-2,1)$ و شعاع ۴ كدام است؟

1) $|z+2-i| = 4$ 2) $|z+2+i| = 4$ 3) $|z-2+i| = 4$ 4) $|z-2-i| = 4$

۶- وقتي كه $i = \sqrt{-1}$ است آنگاه

1) $\pi^i = e^{i\ln(\pi-2k\pi)}, K = 0,1,2,\ldots$

2) $\pi^i = e^{i\ln(\pi+2k\pi)}, K = 0,1,2,\ldots$

3) $\pi^i = e^{2k\pi}\left[(\cos(\ln\pi) + i\sin(\ln\pi)\right], K = 0,1,2,\ldots$

4) $\pi^i = e^{2k\pi}\left[(\cos(\ln\pi) - i\sin(\ln\pi)\right], K = 0,1,2,\ldots$

۷- هرگاه $i = \sqrt{-1}$ باشد، مقدار $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1}$ برابر است با:

1) $-1-i$ 2) $1+i$ 3) $-1+i$ 4) $1-i$

۸- اگر $|e^{-2z}| < 1$ باشد، كدام يك از روابط زير صحيح است؟ $(z = x+iy)$

1) $y < 0$ 2) $x < 0$ 3) $y > 0$ 4) $x > 0$

۹- عبارت $|z-4i| + |z+4i| = 10$ بیان‌کننده كدام يك از اشكال هندسي مي‌باشد؟

1) لوزی 2) بیضی 3) دایره 4) هذلولی

1) $z=2k\pi+iLn(\sqrt{2}+1)$ 2) $z=(2k-1)\pi+iLn(\sqrt{2}-1)$

3) $z=(2k-1)\pi-i\ ,\ z=2k\pi+i$ 4) $z=(2k-1)\pi+iLn(\sqrt{2}-1)\ ,z=2k\pi+iLn(\sqrt{2}+1)$

۱۱ـ حاصل i^{i} کدام است؟ ($0<\theta<2\pi$)

1) -1 2) $e^{\frac{\pi}{2}}$ 3) $-i$ 4) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

۱۲ـ مکان عدد مختلط $z=x+iy$ که در تساوي $z\bar{z}+(1+i)z+\overline{(1+i)z}+1=0$ صدق کند، کدام است؟

1) محیط دایره‌ای است به مرکز $c(1,1)$ و شعاع یک

2) محیط دایره‌ای است به مرکز $c(-1,1)$ و شعاع یک

3) محیط و داخل دایره‌ای است به مرکز $c(1,1)$ و شعاع یک

4) محیط دایره‌ای است به مرکز $c(1,-1)$ و شعاع یک

۱۳ـ مجموعه نقاطي از صفحه مختلط که در تساوي $|z-1+i|=|z-1-3i|$ صدق کند، کدام است؟

1) $z=x+i$ 2) $z=1-iy$ 3) $z=x-i$ 4) $z=1+iy$

۱٤ـ معادله‌ي $\sin z=2i$ را حل کنید $(z=x+iy)$

1) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{5}-2)$ (**k** عدد صحیح دلخواه) 2) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{5}+2)$

3) $z_k=k\pi+iLn(\sqrt{5}+2(-1)^k)$ 4) $z_k=k\pi+iLn(\pm\sqrt{5}+2(-1)^k)$

۱۵ـ مجموعه جواب‌هاي معادله‌ي $(z=x+iy)\cosh z=0$ کدام‌اند؟

1) تهی است 2) $Z_k=(k\pi-\frac{\pi}{2})i\ ,\forall k\in z$

3) $Z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\forall k\in z$ 4) $Z_k=(2k\pi-\frac{\pi}{2})i\ ,\forall k\in z$

$|\sin z|$ **کدام عبارت صحیح است؟**

1) به بی‌نهایت میل می‌کند.
2) کران‌دار است و به صفر میل می‌کند.
3) کران‌دار است و به صفر میل نمی‌کند.
4) کران‌دار است و اما به سمت حدی میل نمی‌کند.

۱۷- اگر $v(x,y)$, $u(x,y)$ **به ترتیب قسمت‌هاي حقیقي و موهومي تابع مختلط** $w=\tan z$ **باشند و** $z=x+iy$ **آن‌گاه:**

1) $u=\dfrac{\sin x\cosh y}{\cosh^2 y-\sin^2 x}$, $v=\dfrac{\cos x\sinh y}{\cosh^2 y-\sin^2 x}$
2) $u=\dfrac{\sin x\cos x}{\cosh^2 y-\sin^2 x}$, $v=\dfrac{\sinh y\cosh y}{\cosh^2 y-\sin^2 x}$
3) $u=\dfrac{\cos x\sinh y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}$, $v=\dfrac{\sin x\cosh y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}$
4) $u=\dfrac{\cosh y\sinh y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}$, $v=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sinh^2 y}$

۱۸- اگر $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ **به ازاي** $z=x+iy$ **، آنگاه مقدار** $|\cosh z|^2$ **برابر است با:**

1) $\sin^2 y+(\sinh x)^2$
2) $\cos^2 y+(\sinh x)^2$
3) $\sin^2 y+(\cosh x)^2$
4) $-\sin^2 y+(\sinh x)^2$

۱۹- اگر $z=x+iy$, $\sinh(az)=b\sin z$ **متغیر مختلط، آن‌گاه:**

1) $b=1, a=i$
2) $b=i, a=1$
3) $b=i, a=i$
4) $b=-i, a=i$

۲۰- مقدار $w=(\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3}))^{3\pi i}$ **کدام است؟**

1) $w=-\exp(2\pi^2)$
2) $w=\exp(2\pi^2)$
3) $w=-\exp(\pi^2)$
4) $w=-\exp(i\pi^2)$

۲۱- فرم قطبي عدد مختلط $(\frac{6+8i}{4-3i})^2$ **کدام است؟**

1) $4e^{i\pi}$
2) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$
4) $-4e^{i\pi}$

۲۲- قدر مطلق و آرگومان عدد مختلط $w=e^{\bar{z}-i}$ **کدام‌اند؟**

1) $\arg w=-y, |w|=e^{x+1}$
2) $\arg w=y, |w|=e^{x+1}$
3) $\arg w=-(y+1), |w|=e^x$
4) $\arg w=y+1, |w|=e^x$

۲۳- جواب کلي معادله $\sin z=\text{ch}4$ **کدام است؟ (n يك عدد صحيح نامنفي است)**

1) $z=(\mp 2n+\frac{1}{4})\pi \mp 2i$
2) $z=(\mp 2n+\frac{1}{3})\pi \mp \frac{4}{3}i$
3) $z=(\mp 2n+\frac{1}{2})\pi \mp 4i$
4) $z=(\mp 2n+\frac{1}{5})\pi \mp 3i$

1) خط 2) سهمی 3) بیضی 4) مجموعه تهی

۲۵ـ قدرمطلق و آرگومان عدد مختلط e^{iz^2} به ترتیب عبارت‌اند از:

1) $2xy, e^{x^2-y^2}$ 2) $-2xy, e^{y^2-x^2}$ 3) x^2-y^2, e^{-2xy} 4) y^2-x^2, e^{2xy}

۲۶ـ مقدار $i \tan x$ برابر است با:

1) $\tan(ix)$ 2) $\cot an(ix)$ 3) $\cot anh(ix)$ 4) $\tanh(ix)$

۲۷ـ معادله $z=\dfrac{1}{4+3i}$ در مختصات قطبي كدام است؟

1) $\frac{1}{5}e^{-i\mathrm{Arc}\tan\frac{4}{3}}$ 2) $\frac{1}{5}e^{i\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4}}$

3) $\frac{1}{5}\left[\sin(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})+i\cos(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})\right]$ 4) $\frac{1}{5}\left[\cos(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})+i\sin(-\mathrm{Arc}\tan\frac{3}{4})\right]$

۲۸ـ اگر مدول $z=a+bi$ برابر ۱ باشد آنگاه z كدام است؟

1) $\dfrac{2-ix}{3+ix}$ 2) $\dfrac{1-2ix}{1+ix}$ 3) $\dfrac{1-ix}{1+ix}$ 4) $\dfrac{3-ix}{1+ix}$

– ۱۰ پاسخ تست

1) گزینه 1

$$\sin^{-1} z = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\sin z = 2 \Rightarrow z = \sin^{-1} 2 = -i\ln(2i + i\sqrt{3}) = -i\ln\left[i(2+\sqrt{3})\right]$$

$$z = -i(\ln(2+\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi) = -i\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$z = \frac{1}{i}\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2) گزینه 1

$$Z_n = e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$

$$\prod_{m=1}^{\infty} z_m = \prod_{m=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2^m}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{2^2}}\, e^{i\frac{\pi}{2^3}} \ldots = e^{i\pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\mathbf{K})}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \mathbf{K} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\prod_{m=1}^{\infty} z_m = e^{i\pi} = -1$$

3) گزینه 3

$$P(z) = \mathbf{0} \Rightarrow \overline{P(z)} = \mathbf{0} \Rightarrow P(\overline{z}) = \mathbf{0}$$

4) گزینه 3

$$\text{Ln}(-4) = \text{Ln}4 + i\pi = 2\text{Ln}2 + i\pi$$

5) گزینه 1

مرکز دایره: $z_{\mathbf{0}} = -2 + i$

$$|z - z_{\mathbf{0}}| = 4 \Rightarrow |z + 2 - i| = 4$$

6) گزینه 3

$$\pi^i = e^{i\ln\pi} = e^{i(\ln\pi + i2k\pi)} = e^{i\ln\pi} e^{-2k\pi}, k \in z$$

$$\pi^i = e^{i\ln\pi} e^{2k\pi}\ , k \in z$$

7) گزینه 2

$$i^{30} = (i^4)^7 i^2 = -1 \ , \ i^{19} = (i^4)^4 i^3 = -i$$

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = \frac{-3 + i}{2i - 1}\frac{2i + 1}{2i + 1} = \frac{-6i - 3 - 2 + i}{-5} = 1 + i$$

8) گزینه 4

$$\left|e^{-2z}\right| = \left|e^{-2x-2iy}\right| = \left|e^{-2x}\right|\left|e^{-2iy}\right| = e^{-2x}$$

$$e^{-2x} < 1 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0$$

9) گزینه 2

$$z_1 = 4i, z_2 = -4i \ , \ |z_1 - z_2| = 8 \ , 2a = 10$$

$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \ , \ |z_1 - z_2| < 2a \Rightarrow$ بیضی

10) گزینه 4

در این تست هر دو دسته جواب موردنظر است.

$$\sin^{-1} z = -i\ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$
$$\sin z = i \Rightarrow z = \sin^{-1}(i)$$

$$\sin^{-1}(i) = -i\ln(-1 + \sqrt{2}) = -i(\ln(\sqrt{2} - 1) + i2k\pi)$$

$$\sin^{-1}(i) = -i\ln(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi = i\ln(\sqrt{2} + 1) + 2k\pi$$

$$\sin^{-1}(i) = -i\ln(-1 - \sqrt{2}) = -i(\ln(\sqrt{2} + 1) + i(2k - 1)\pi)$$

$$\sin^{-1}(i) = -i\ln(\sqrt{2} + 1) + (2k - 1)\pi = i\ln(\sqrt{2} - 1) + (2k - 1)\pi$$

11) گزینه 4

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

12) گزینه 2

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + (1 + i)(x + iy) + (1 - i)(x - iy) + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + iy + ix - y + x - iy - ix - y + 1 = 0$$

$x^2+y^2+2x-2y+1=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow c(-1,1)$ محیط دایره با شعاع یک و مرکز

13) گزینه 1

$$|z-1+i|=|z-1-3i| \Rightarrow |z-(1-i)|=|z-(1+3i)|$$

معادله فوق عمودمنصف پاره‌خط واصل بین نقاط $z_1=1-i$, $z_2=1+3i$ را نشان می‌دهد. نقطه وسط پاره‌خط $z_m=\frac{z_1+z_2}{2}=1+i$ است و چون دو نقطه z_2,z_1 روی خطی قائم قرار دارند بنابراین عمودمنصف خطی افقی است.

معادله‌ی عمودمنصف: $y=1 \Rightarrow z=x+iy=x+i$

14) گزینه 3

$$\sin^{-1}z=-i\ln(iz\pm\sqrt{1-z^2})$$

$$\sin z=2i \Rightarrow z=\sin^{-1}(2i)$$

$$\sin^{-1}(2i)=-i\ln(-2+\sqrt{5})=-i(\ln(\sqrt{5}-2)+i2n\pi)$$

$$\sin^{-1}(2i)=i\ln(\sqrt{5}+2)+2n\pi \qquad (1)$$

$$\sin^{-1}(2i)=-i\ln(-2-\sqrt{5})=-i(\ln(\sqrt{5}+2)+i(2n+1)\pi)$$

$$\sin^{-1}(2i)=i\ln(\sqrt{5}-2)+(2n+1)\pi \qquad (2)$$

جواب (1) و (2) را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$z_k=\sin^{-1}(2i)=iLn(\sqrt{5}+2(-1)^K)+k\pi$$

15) گزینه 2

$$\cosh z=0 \Rightarrow z=\cosh^{-1}(0)$$

$$\cosh^{-1}(z)=\ln(z\pm\sqrt{z^2-1})$$

$$\cosh^{-1}(0)=\ln(\pm i)$$

$$\ln i=\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=i(2k\pi+\frac{\pi}{2})\ ,k\in z$$

$$\ln(-i) = \ln 1 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(2k\pi - \frac{\pi}{2}) \; , k \in z$$

دو جواب بالا به صورت رابطه‌ی زیر قابل بیان است:

$$z = \cosh^{-1}(\mathbf{0}) = i(k\pi - \frac{\pi}{2}), \; k \in z$$

16) گزینه 1

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$|y| \to \infty \Rightarrow \sinh^2 y \to \infty \Rightarrow |\sin z| \to \infty$$

17) گزینه 2

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)(\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y)}{\cos x^2 \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}$$

$$\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x(\cosh^2 y - 1) = \cosh^2 y - \sin^2 x$$

$$\tan z = \frac{\sin x \cos x \cosh^2 y - \sin x \cos x \sinh^2 y + i(\sin^2 x \sinh y \cosh y + \cos^2 x \sinh y \cosh y)}{\cosh^2 y - \sin^2 x}$$

$$\tan z = \frac{\sin x \cos x}{\cosh^2 y - \sin^2 x} + i \frac{\sinh y \cosh y}{\cosh^2 y - \sin^2 x}$$

18) گزینه 2

براساس روابط بخش توابع مثلثاتی و هذلولی‌گون، گزینه 2 صحیح است.

19) گزینه 3

$$\sinh(iz) = i \sin z \Rightarrow a = b = i$$

20) گزینه 1

$$w = e^{3\pi i \ln\left[\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]}$$

$$\frac{e}{2}(-1-i\sqrt{3}) = e.e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow w = e^{3\pi i(\mathrm{Ln} e - i\frac{2\pi}{3})}$$

$$w = e^{3\pi i}.e^{2\pi^2} = -e^{2\pi^2} = -\exp(2\pi^2)$$

21) گزینه 1

$$\frac{}{4-3i}=\frac{}{25}=2i$$

$$w=(2i)^2=-4=4e^{i\pi}$$

22) گزینه 3

$$w=e^{\bar{z}-i}=e^{x-iy-i}=e^{x}e^{-i(y+1)}\Rightarrow |w|=e^{x}\ ,\arg w=-(y+1)$$

23) گزینه 3

$$\sin^{-1}z=-i\ln(iz\pm\sqrt{1-z^2})$$

$$\sin z=\mathrm{ch}4\Rightarrow z=\sin^{-1}(\mathrm{ch}4)=-i\ln(i\,\mathrm{ch}4\pm\sqrt{1-\mathrm{ch}^2 4})$$

$$z=-i\ln(i\,\mathrm{ch}4\pm i\,\mathrm{sh}4)$$

$$z=-i\ln(i(\mathrm{ch}4+\mathrm{sh}4))=-i\left[\ln e^{4}+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi\right]=-4i+(2k+\frac{1}{2})\pi$$

$$z=-i\ln(i(\mathrm{ch}4-\mathrm{sh}4))=-i\left[\ln e^{-4}+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi\right]=4i+(2k+\frac{1}{2})\pi$$

چون **n** یک عدد صحیح نامنفی می‌باشد بنابراین جواب به صورت زیر می‌باشد:

$$z=\mathbf{m}4i+(\mathbf{m}2n+\frac{1}{2})\pi$$

24) گزینه 4

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$
$$z_1=1, z_2=-1\ , |z_1-z_2|=2\ , 2a=1$$

$|z_1-z_2|>2a\Rightarrow$ مجموعه تهی

25) گزینه 3

$$e^{iz^2}=e^{i(x+iy)^2}=e^{i(x^2-y^2+2ixy)}=e^{-2xy+i(x^2-y^2)}$$

$$e^{iz^2}=e^{-2xy}.e^{i(x^2-y^2)}$$

$$\left|e^{iz^2}\right|=e^{-2xy}\ ,\arg(e^{iz^2})=x^2-y^2$$

26) گزینه 4

$$\tanh(ix)=i\tan x$$

27) گزینه 4

$$z = \frac{}{4+3i}$$

$$4+3i = 5e^{i\text{Arc}\tan\frac{3}{4}}$$

$$z = \frac{1}{5}e^{-i\text{Arc}\tan\frac{3}{4}} = \frac{1}{5}\left[\cos(-\text{Arc}\tan\frac{3}{4}) + i\sin(-\text{Arc}\tan\frac{3}{4})\right]$$

28) گزینه 3

منظور از مدول همان اندازه یا قدرمطلق $\mathbf{Z}$ می‌باشد.

$$|z| = 1$$

$$z = \frac{2-ix}{3+ix} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{4+x^2}{9+x^2}}$$

$$z = \frac{1-2ix}{1+ix} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1+4x^2}{1+x^2}}$$

$$z = \frac{1-ix}{1+ix} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^2}} = 1$$

$$z = \frac{3-ix}{1+ix} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9+x^2}{1+x^2}}$$

حد، پیوستگی و مشتق توابع مختلط

تابع مختلط $w = f(z)$ در یک همسایگی محذوف z_0 تعریف شده است در اینصورت $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; ; \; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

تابع $w = f(z)$ را در z_0 پیوسته می‌نامیم اگر $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ باشد.

نکته 15:

الف) تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در $z_0 = x_0 + iy_0$ حد دارد اگر و تنها اگر توابع حقیقی دو متغیره‌ی $\mathbf{V, u}$ در (x_0, y_0) دارای حد باشند در اینصورت

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y)$$

ب) تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر توابع حقیقی دو متغیره‌ی V, u در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

نکته 16: درصفحه مختلط همسایگی $0 < |z - z_0| < \delta$ به صورت یک دایره با شعاع δ و مرکز z_0 است (با حذف نقطه z_0) بنابراین نقطه $\mathbf{Z}$ از بی‌نهایت مسیر به نقطه‌ی z_0 می‌تواند میل کند. حد تابع مختلط موجود است اگر مقدار حد در تمام مسیرها یکسان باشد.

نکته 17: یک روش مناسب برای بررسی وجود حد در توابع مختلط استفاده از مختصات قطبی به صورت زیر می‌باشد

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{r \to 0} f(z_0 + re^{i\theta})$$

اگر مقدار حد فوق به θ وابسته باشد تابع $f(z)$ در z_0 حد ندارد ولی اگر مقدار حد مستقل از θ حاصل شود تابع $f(z)$ در z_0 حد دارد.

نکته 18:

الف) توابع e^z، $\sin z$، $\cos z$، $\sinh z$، $\cosh z$ و چند جمله‌ای در تمام نقاط پیوسته می‌باشند.

ب) اگر $g(z), f(z)$ دو تابع پیوسته در نقطه z_0 باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ با شرط $g(z_0) \neq 0$ در نقطه z_0 پیوسته می‌باشد

ج) توابع $\mathrm{Ln} z, \sqrt[n]{z}$ (شاخه اصلی) در تمام صفحه مختلط غیر از بخش منفی محور حقیقی و مبدا مختصات پیوسته هستند بنابراین نقاط ناپیوستگی این توابع به صورت زیر می‌باشد

$$\mathrm{Im}(z) = 0, \; \mathrm{Re}(z) \le 0$$

مثال ۱۳: اگر $z = x + iy$ **در اینصورت** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ **چیست؟**

1) صفر　　2) $\frac{1}{2}$　　3) ∞　　4) وجود ندارد

پاسخ: گزینه 4

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2} = \sin\theta\cos\theta$$

با تغییر θ مقدار حد تغییر می‌کند بنابراین حد وجود ندارد.

مشتق توابع مختلط:

تابع $w = f(z)$ در یک همسایگی z_0 تعریف شده است در اینصورت

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

تابع $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر است اگر نتیجه حدفوق به ازای تمام مسیرهایی که متغیر مختلط Δz به مبدا میـل مـی‌کنـد یکسان شود.

اگر $z_0 = x_0 + iy_0 , f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ آنگاه

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i(v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0))}{\Delta x + i\Delta y}$$

نکته 19: اگر حد فوق را روی مسیر $\Delta y = 0$ در نظر بگیریم آنگاه

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) + i(v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0))}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

به طور مشابه اگر حد فوق را روی مسیر $\Delta x = 0$ در نظر بگیریم آنگاه

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}(u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))$$

دو مقدار فوق باید با هم برابر باشند که از تساوی آن‌ها به شرایط کوشی ریمان به عنوان شـرط لازم مشـتق‌پـذیری $f(z)$ می‌رسیم.

شرایط کوشی ریمان:

اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه‌ی z_0 مشتق‌پذیر باشد. آنگاه شرایط کوشی ریمان به صورت زیر در نقطـه‌ی z_0 برقرار است.

مختصات دکارتی: $u_x=v_y \;,\; v_x=-u_y$

مختصات قطبی: $u_r=\frac{1}{r}v_\theta \;,\; v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$

اگر شرایط کوشی ریمان در نقطه z_0 برقرار نباشند آنگاه $f(z)$ در این نقطـه مشـتق‌ناپـذیر اسـت. شـرایط کوشـی ریمـان هنگامی صادق است که مقدار $f'(z_0)$ بر دو مسیر $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ یکسان باشد.

نکته 20: اگر تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق آن از روابط زیر قابل محاسبه است

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$$

$$f'(z)=u_x-iu_y=v_y+iv_x$$

از روابط فوق نتیجه می‌گیریم که با مشخص بودن یکی از دو تابع v,u می‌توانیم $f'(z)$ را به دست آوریم.

$f'(z)$ در مختصات قطبی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}=\frac{1}{r}(v_\theta-iu_\theta)e^{-i\theta}$$

$$f'(z)=(u_r-i\frac{1}{r}u_\theta)e^{-i\theta}=(\frac{1}{r}v_\theta+iv_r)e^{-i\theta}$$

نکته 21: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مفروض است اگر

الف) توابع u_x,u_y,v_x,v_y در یک همسایگی نقطه‌ی z_0 پیوسته باشند.

ب) توابع v,u در نقطه‌ی z_0 در شرایط کوشی ریمان صدق کنند.

آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

نکته 22:

الف) توابع e^z، $\sin z$، $\cos z$، $\sinh z$، $\cosh z$ و چند جمله‌ای در تمام صفحه مخـتلط مشـتق‌پـذیر هسـتند و مشـتق آن‌هـا مشابه توابع حقیقی محاسبه می‌شود.

ب) توابع $\sqrt[n]{z}, \mathrm{Ln}z$ (شاخه اصلی) فقط در نقاط $\mathrm{Re}(z)\le 0 \,, \mathrm{Im}(z)=0$ مشتق‌ناپذیرند و در سایر نقاط مشتق آن‌هـا مشـابه توابع حقیقی محاسبه می‌شود.

مثال ۱٤: تابع f از متغیر z به صورت $f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$ **مفروض است.**

1) $\mathbf{f}$ در نقطه $z=0$ پیوسته نیست.

2) در $z=0$ روابط کوشی ریمان برقرار نیستند ولی تابع $\mathbf{f}$ مشتق دارد.

3) در $z=0$ تابع $\mathbf{f}$ پیوسته است و روابط کوشی ریمان نیز برقرارند.

4) در $z=0$ تابع $\mathbf{f}$ مشتق ندارد و روابط کوشی ریمان نیز برقرار نیستند.

پاسخ: گزینه 3

پیوستگی:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{r\to 0} f(re^{i\theta})=\lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{-2i\theta}}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0} re^{-3i\theta}=0$$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=f(0)=0$$

بنابراین $f(z)$ در $z=0$ پیوسته است.

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{(\bar{z})^2}{z}-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{-2i\theta}}{r^2e^{2i\theta}}=e^{-4i\theta}$$

چون به θ وابسته است بنابراین $f'(0)$ موجود نمی‌باشد.

شرایط کوشی ریمان هنگامی برقرار است که مقدار $f'(0)$ بر دو مسیر $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ یکسان باشد.

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)^2=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right)^2$$

بر هر دو مسیر $\Delta x=0, \Delta y=0$ مقدار $f'(0)=1$ حاصل می‌شود بنابراین شرایط کوشی ریمان صادق است.

مثال ۱٥: براي تابع $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$ **در مبدا مختصات روابط كوشي ريمان:**

1) صادق بوده و مشتق نیز دارد

2) صادق نبوده و مشتق ندارد

3) صادق بوده اما مشتق ندارد

4) صادق نبوده ولی مشتق دارد

پاسخ: گزینه 3

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$$

$$f'(\mathbf{0})=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\mathbf{0},\mathbf{0})}\frac{\dfrac{(\Delta x)-(\Delta y)}{(\Delta x)^2-+(\Delta y)^2}+i\dfrac{(\Delta x)+(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1+i & , \quad \Delta x=\mathbf{0}\\ 1+i & , \quad \Delta y=\mathbf{0}\\ \dfrac{1+i}{2} & , \quad \Delta y=-\Delta x\end{cases}$$

بنابراین $f'(\mathbf{0})$ موجود نیست ولی چون به ازای $\Delta x=\mathbf{0}$, $\Delta y=\mathbf{0}$ مقدار $f'(\mathbf{0})$ یکسان می‌باشد بنابراین شرایط کوشی ریمان صادق است.

6-2) توابع تحلیلی

تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی $z_{\mathbf{0}}$ تحلیلی می‌نامیم اگر همسایگی از $z_{\mathbf{0}}$ موجود باشد که $f(z)$ در تمام نقاط آن مشتق‌پذیر باشد.

اگر $f(z)$ در $z_{\mathbf{0}}$ مشتق‌پذیر نباشد آنگاه در $z_{\mathbf{0}}$ غیرتحلیلی است یعنی مشتق‌پذیری در یک نقطه شرط لازم برای تحلیلی بودن است ولی شرط کافی نمی‌باشد.

مثال ۱۶: مشتق‌پذیري و تحلیلي بودن توابع $Re(z)$ ، $Im(z)$ ، $\bar{z}$ و $|z|^2$ را بررسي کنید:

پاسخ:

$$f(z)=Re(z)=x\Rightarrow u=x \quad , \quad v=\mathbf{0}$$

$$\begin{cases}u_x=1\\ u_y=\mathbf{0}\end{cases}\quad \begin{cases}v_x=\mathbf{0}\\ v_y=\mathbf{0}\end{cases}$$

شرایط کوشی ریمان در هیچ نقطه‌ای برقرار نمی‌باشد بنابراین این تابع در هیچ نقطه‌ای نه مشتق‌پذیر است و نه تحلیلی.

به طور مشابه تابع $f(z)=Im(z)$ نیز در تمام نقاط غیرتحلیلی و مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

$$f(z)=\bar{z}=x-iy\Rightarrow u=x, V=-y$$

$$\begin{cases}u_x=1\\ u_y=\mathbf{0}\end{cases}\quad , \qquad \begin{cases}v_x=\mathbf{0}\\ v_y=-1\end{cases}$$

تابع $f(x)=\bar{z}$ در تمام نقاط غیر تحلیلی و مشتق ناپذیر است.

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2\Rightarrow u=x^2+y^2, v=\mathbf{0}$$

$$\begin{cases}u_x=2x\\ u_y=2y\end{cases}\quad \begin{cases}v_x=\mathbf{0}\\ v_y=\mathbf{0}\end{cases}$$

شرایط کوشی ریمان در $z=\mathbf{0}$ برقرار است و ضمناً مشتقات جزئی پیوسته هستند بنابراین $f(z)$ در $z=\mathbf{0}$ مشتق‌پذیر است. چون $f(z)$ در همسایگی $z=\mathbf{0}$ در همسایگی $z=\mathbf{0}$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

نکته 23: اگر تابع $f(z)$ فقط در تعدادی نقطه مجزا و یا در نقاط یک منحنی مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای

نکته 24: اگر $f(z)$ در تمام نقاط صفحه تحلیلی باشد به آن تابع تام گفته می‌شود.

نکته 25:

الف) توابع e^z، $\sin z$، $\cos z$، $\sinh z$، $\cosh z$ و چند جمله‌ای توابع تام هستند.

ب) توابع $\mathrm{Ln} z, \sqrt[n]{z}$ (شاخه اصلی) فقط در نقاط $\mathrm{Re}(z) \le 0$ و $\mathrm{Im}(z) = 0$ غیرتحلیلی می‌باشند.

ج) توابع $\mathrm{Re}(z)$، $\mathrm{Im}(z)$، $\bar{z}$، $|z|$ و $\mathrm{Arg}(z)$ در تمام نقاط غیرتحلیلی هستند.

مثال ۱۷: اگر R^2 تمام صفحه‌ي $f(z) = y^2 - x^2 + i(x^2 + y^2)\ ,\ z = x + iy$ باشد، در اینصورت:

1) $f(z)$ در R^2 تحلیلی نیست
2) $f'(z)$ در R^2 موجود است.
3) $f'(z)$ در امتداد خطوط $y = mx$ موجود است.
4) $f'(z)$ در R^2 موجود و $f(z)$ در R^2 تحلیلی است.

پاسخ: گزینه 1

$$u = y^2 - x^2\ ,\ v = x^2 + y^2$$
$$u_x = v_y \Rightarrow -2x = 2y \Rightarrow y = -x$$
$$v_x = -u_y \Rightarrow 2x = -2y \Rightarrow y = -x$$

تابع $f(z)$ فقط در نقاط خط $y = -x$ مشتق‌پذیر است بنابراین براساس نکته (23) تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نمی‌باشد.

مثال ۱۸: تعداد نقاط غیرتحلیلي تابع $f(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}(3+z)}{(z^2+2)\sin z}$ (شاخه اصلي لگاریتم) درون مرز $|z| = 2$ كدام است؟

1) 1
2) 2
3) 3
4) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳

در ریشه‌هاي مخرج تابع مشتق ناپذیر و غیرتحلیلي است.

$z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}i \Rightarrow$ درون $|z| = 2$ واقع است

$\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi \Rightarrow$ نقطه $z = 0$ درون $|z| = 2$ قرار دارد.

نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}(3+z)$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{Im}(3+z) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\mathrm{Re}(3+z) \le 0 \Rightarrow 3 + x \le 0 \Rightarrow x \le -3$$

نقاط $x \le -3, y = 0$ خارج $|z| = 2$ قرار دارند.

مثال ۱۹: فرض کنید $f(z)$ **تابعي تحليلي با قسمت حقيقي** $e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ **باشد آنگاه مقدار** $f'(1)$ **برابر است با:**

1) $-e$ 2) e 3) $-2e$ 4) $2e$

پاسخ: گزینه 4

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$$

$$u=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\Rightarrow u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$
$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$
$$z=1\Rightarrow x=1,y=0\Rightarrow u_x=2e,u_y=0\Rightarrow f'(z)=2e$$

معادله لاپلاس:

برای تابع حقیقی $u(x,y)$ معادله لاپلاس در مختصات دکارتی و قطبی به صورت زیر معرفی می‌گردد

مختصات دکارتی: $u_{xx}+u_{yy}=0$

مختصات قطبی: $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$

معادله لاپلاس به صورت $\nabla^2u=0$ نیز نمایش داده می‌شود.

مثال ۲۰: براي تابع $u(x,y)$ **مقادير** $\frac{\partial^2u}{\partial z\partial\bar{z}},\frac{\partial u}{\partial\bar{z}},\frac{\partial u}{\partial z}$ **را با فرض** $z=x+iy$ **تعيين كنيد.**

پاسخ:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}$$

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\ ,\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2i},\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}=-\frac{1}{2i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}),\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y})$$

با استفاده از نتایج فوق می‌توانیم $\frac{\partial^2u}{\partial z\partial\bar{z}}$ را تعیین کنیم:

$$\frac{}{\partial z\partial \bar{z}} = \frac{}{\partial z}(\frac{}{\partial \bar{z}}) = \frac{}{4}\Big[\frac{}{\partial x}\Big(\frac{}{\partial x} + i\frac{}{\partial y}) - i\frac{}{\partial y}(\frac{}{\partial x} + i\frac{}{\partial y})\Big)\Big]$$

با فرض $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ آنگاه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

نکته 26: در صفحه مختلط اپراتورهای زیر قابل استفاده است.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \ , \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) = \frac{1}{4}\nabla^2$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

بنابراین معادله لاپلاس در صفحه‌ی مختلط برای تابع $u(x,y)$ به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}} = 0$ نیز قابل بیان است.

تابع همساز:

اگر تابع $u(x,y)$ دارای مشتقات نسبی مرتبه دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس صدق کند، یک تابع همساز یا هارمونیک نامیده می‌شود.

نکته 27: اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه توابع v,u همساز هستند و در این حالت v را مزدوج همساز یا مزدوج هارمونیک تابع **u** می‌نامیم.

نکته 28: خواص زیر در مورد توابع تحلیلی و توابع همساز صادق هستند

1) اگر $u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه $-v + iu$ نیز تحلیلی خواهد بود به بیان دیگر اگر **v** مزدوج همساز **u** باشد آنگاه **u** مزدوج همساز $-v$ می‌باشد.

2) اگر **v** مزدوج همساز u,u نیز مزدوج همساز **v** باشد آنگاه v,u مقادیر ثابت هستند.

3) اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی بوده و توابع v,u در رابطه‌ای مانند $h(u,v) = 0$ صدق کنند آنگاه $f(z)$ تابع ثابت می‌باشد. بنابراین اگر $h(u,v) = 0$ در یک تابع غیرثابت صدق کند تابع $f(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نخواهد بود.

تابع $f(z) = y^3 + iy$ همواره غیرتحلیلی است چون $u = v^3$ می‌باشد.

4) در تابع تحلیلی $f(z)$ اگر بخش حقیقی یا موهومی یا اندازه یا آرگومان تابع ثابت باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت خواهد

.ر

5) اگر $f(z)$ تابعی همواره تحلیل باشد آنگاه فاقد متغیر $\overline{z}$ می‌باشد به همین دلیل توابعی مانند $Re(z)$، $\overline{z}$، $|z|$ و $\cos(\overline{z})$ غیرتحلیلی هستند.

6) اگر $f(x)$ تابعی حقیقی و $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

اگر $f(x)$ تابعی موهومی محض و $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه $\overline{f(z)} = -f(\overline{z})$

بنابراین اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه $\overline{f(z)}$ شامل $\overline{z}$ بوده بنابراین غیرتحلیلی است.

7) اگر یک تابع غیرثابت به صورت تابعی حقیقی یا موهومی محض باشد، تحلیلی نخواهد بود.

8) اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه دسته منحنی‌های $v(x,y) = c_2 , u(x,y) = c_1$ مسیرهای متعامد هستند.

9) اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه در آن نقطه، $f(z)$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است.

10) حاصل جمع، تفریق و حاصلضرب و ترکیب چند تابع تحلیلی، یک تابع تحلیلی می‌باشد اگر $g(z), f(z)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ تنها در نقاط $g(z) = 0$، غیرتحلیلی است.

مثال ۲۱: فرض کنید $0 \le \theta \le 2\pi , z = re^{i\theta}$ کدامیك از روابط زیر نادرست است؟

1) $\overline{\cos z} = \cos(\overline{z})$

2) $\overline{\sin z} = \sin(\overline{z})$

3) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

4) $\overline{\log z} = \log \overline{z}$ (شاخه اصلی لگاریتم)

پاسخ: گزینه 4

توابع $\sin z$، $\cos z$ و e^z در تمام نقاط تحلیلی هستند و ضمناً $\sin x$، $\cos x$ و e^x توابعی حقیقی می‌باشند بنابراین براساس نکته (28) قسمت (6) رابطه‌ی $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ صادق است.

نکته 29: تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی است آنگاه

الف) اگر تابع $f = u(x,y) + iv(x,y)$ بر حسب y, x مشخص شده باشد آنگاه $f(z)$ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$f(z) = f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}$$

ب) اگر تابع $f = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ بر حسب θ, r مشخص شده باشد آنگاه

$$f(z) = f(re^{i\theta})\Big|_{\substack{r=z \\ \theta=0}}$$

پاسخ:

$u = x^2 - y^2 + 3x \ , v = 2xy + 3y$

$\begin{cases} u_x = 2x+3 \\ u_y = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = 2x+3 \\ v_x = 2y \end{cases}$

شرایط کوشی ریمان در تمام نقاط صادق هستند و مشتقات جزئی همواره پیوسته می‌باشند بنابراین $f(z)$ در تمـام نقـاط مشتق‌پذیر و تحلیلی است.

$$f(z) = f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = z^2 + 3z$$

نکته 30: فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد و بخش حقیقی تابع $(u(x,y))$ معلم است در این صـورت برای تعیین بخش موهومی و تابع $f(z)$ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم

1) محاسبه $v(x,y)$ با استفاده از روابط کوشی ریمان:

از رابطه‌ی $v_y = u_x$ نسبت به **y** انتگرال می‌گیریم

$$v(x,y) = \int u_x(x,y)dy + g(x)$$

با جایگذاری $v(x,y)$ در رابطه‌ی $v_x = -u_y$ می‌توانیم $g(x)$ را تعیین کنیم.

2) با استفاده از $f'(z) = u_x - iu_y$ ، $f'(z)$ را به دست آورده و سپس با انتگرال‌گیری می‌توانیم $f(z)$ را تعیین کنیم.

3) محاسبه $v(x,y)$ با استفاده از دیفرانسیل

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

در رابطه‌ی فوق در تابع $-u_y$ هر عبارت شامل **y** را حذف نموده و سپس با انتگرال‌گیری تابع $v(x,y)$ را تعیین می‌کنیم.

روش‌های فوق را در مختصات قطبی نیز می‌توانیم استفاده نمائیم.

اگر بخش موهومی تابع $(v(x,y))$ معلوم باشد برای تعیین بخش حقیقی و تابع $f(z)$ از روش‌های مشابه می‌توانیم استفاده کنیم.

مثـال ۲۳: اگـر $v(x,y)$ یـک مـزدوج همسـاز تـابع $u = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشـد و داشـته باشـیم $v(0,0) = 0$ ، آنگـاه مقدار $v(1,1)$ برابر کدام گزینه است:

1) 1   2) 4   3) صفر   4) -2

پاسخ: گزینه 2

از روش (1) و (3) در نکته (30) استفاده می‌کنیم:

$$V_y = u_x = 4x(x^2 - y^2 + 1) - 8xy^2 = 4x^3 - 12xy^2 + 4x$$

$$V = \int V_y dy = 4x^3 y - 4xy^3 + 4xy + g(x)$$

$$V_x = -u_y \Rightarrow 12x^2 y - 4y^3 + 4y + g'(x) = 4y(x^2 - y^2 + 1) + 8x^2 y$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c \Rightarrow v = 4x^3 y - 4xy^3 + 4xy + c$$

$$v(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow v(x,y) = 4x^3 y - 4xy^3 + 4xy$$

$$v(1,1) = 4$$

روش استفاده از دیفرانسیل:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

$$dv = (12yx^2 - 4y^3 + 4y)\, dx + (4x^3 - 12xy^2 + 4x)\, dy$$

در تابع $12yx^2 - 4y^3 + 4y$ جملات شامل **y** را حذف می‌کنیم و از عبارت باقی‌مانده انتگرال می‌گیریم:

$$v(x,y) = \int (4x^3 - 12xy^2 + 4x)\, dy = 4x^3 y - 4xy^3 + 4xy + c$$

$$v(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow v(x,y) = 4x^3 y - 4xy^3 + 4xy$$
$$v(1,1) = 4$$

مثال ۲۴: مسیرهاي قائم خانواده منحنيهاي $x^3 y - xy^3 = c$ كدام خانواده منحنيهاي زير است؟

1) $x^4 + y^4 = K$ 2) $x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 = K$ 3) $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = K$ 4) $x^3 y + xy^3 = K$

پاسخ: گزینه 2

$$u = x^3 y - xy^3 \Rightarrow u_x = 3x^2 y - y^3 \ ,\ u_y = x^3 - 3xy^2$$
$$u_{xx} = 6xy \ ,\ u_{yy} = -6xy$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ بنابراین تابع **u** همساز است و کافی است مزدوج همساز **u** را تعیین کنیم. از روش دیفرانسیل استفاده می‌کنیم:

$$dv = -u_y dx + u_x dy = (-x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2 y - y^3)dy$$

$$V = \int -x^3 dx + (3x^2 y - y^3)dy = -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4}$$

$$v(x,y) = c \Rightarrow x^4 + y^4 - 6x^2 y^2 = K$$

$f(z)=iz^2-6z$ (4 $\qquad$ $f(z)=z^2-6iz$ (3 $\qquad$ $f(z)=iz^2+6z$ (2 $\qquad$ $f(z)=z^2+6iz$ (1

پاسخ: گزینه 2

از روش دوم در نکته (30) استفاده می‌کنیم:

$$u=6x-2xy \Rightarrow u_x=6-2y, u_y=-2x$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=6-2y+2xi$$

$$f'(z)=f'(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=6+2zi \Rightarrow f(z)=6z+iz^2$$

مثال ۲۶: کلیه توابع تحلیلی به صورت $f(z)=u(x)+iv(y)$ عبارتند از:

$f(z)=cz+a$ (4 ($\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ ثابت) $\qquad$ $f(z)=z$ (3 $\qquad$ $f(z)=\frac{1}{z^2}$ (2 $\qquad$ $f(z)=z^2+a$ (1

پاسخ: گزینه 4

شرایط کوشی ریمان:

$$v_x=-u_y \Rightarrow \mathbf{0}=\mathbf{0}$$
$$u_x=v_y \Rightarrow u'(x)=v'(y) \Rightarrow u'(x)=v'(y)=c$$

تابعی از $\mathbf{x}$ با تابعی از $\mathbf{y}$ برابر است بنابراین هر دو ثابت هستند.

$$u(x)=cx+k_1, v(y)=cy+k_2$$

$$f(z)=cx+K_1+ciy+ik_2 \Rightarrow f(z)=cz+a$$

قضیه اصل ماکزیمم

اگر تابع $f(z)$ در داخل یک ناحیه، تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ هیچ مقدار ماکزیممی در داخل این ناحیه نخواهد داشت. بنابراین اگر $f(z)$ در ناحیه بسته وکرانداری پیوسته بوده و در داخل آن تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را بر مرز این نحایه اختیار می‌کند نه در داخل آن.

قضیه لیوویل:

اگر تابع $f(z)$ تام بوده و در صفحه مختلط کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

با: (A_3, A_2, A_1, B, A **ثابت‌اند)**

1) $AZ+B$ 2) $|A_1|<\frac{c}{2}, A_1z^2+A_2z+A_3$

3) $\frac{c}{2}z^2+AZ+B$ 4) در حالت کلی نمی‌توان شکل تابع $f(z)$ را نوشت

پاسخ: گزینه 2

چون $f(z)$ تام است بنابراین $f''(z)$ نیز تام می‌باشد و ضمناً $f''(z)$ کراندار است براساس قضیه لیوویل $f''(z)$ باید تابعی ثابت باشد.

$$f''(z)=k\ ,\ |K|<c$$
$$f'(z)=kz+c_1\ , f(z)=\frac{k}{2}z^2+c_1z+c_2$$

با جایگذاری $\frac{k}{2}=A_1\ ,\ c_1=A_2\ , C_2=A_3$ داریم:

$f(z)=A_1z^2+A_2z+A_3\ , |2A_1|<c$ یا $|A_1|<\frac{c}{2}$

۱) اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز و تابع مختلط تحلیلی متناظر، $f(z)$ کدام است؟

1) $f(z)=2^z+i\lambda \quad , \quad v(x,y)=2^x i\sin(y\ln 2)+\lambda$

2) $f(z)=2^z\sin(z\ln 2)+i\lambda \quad , \quad v(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)+\lambda$

3) $f(z)=2^z+i\lambda \quad , \quad v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+\lambda$

4) $f(z)=2^z\cos(z\ln 2)+i\lambda \quad , \quad v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+\lambda$

۲- با کدام مقادیر b , a تابع $u(x,y)=x^2+ay^2+bxy$ **همساز است؟**

1) $a=b=1$ 2) $a=-1$, b دلخواه 3) $a=-1$ و فقط $b=0$ 4) هیچ مقدار **b , a**

۳- کدام تابع در ناحیه محصور توسط دایره $\gamma:|z|=1$ **تحلیلی است؟**

1) $f(z)=x+y+ixy$ 2) $f(z)=x^2-y^2+i2xy$ 3) $f(z)=xy+i(x+y)$ 4) $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$

۴- اگر $f(z)=u+iv$ **و** $\overline{f(z)}$ **هر دو تحلیلی باشند کدام مورد صحیح است؟**

1) **u** فقط تابعی از **y** است 2) **u** فقط تابعی از **x** است 3) **u** مقداری است ثابت 4) **u** تابعی از **y, x** است

۵- اگر $u=x^2-y^2+2x$ **، مزدوج همساز و تابع متناظر آن** $w=f(z)$ **کدام‌اند؟**

1) $f(z)=2z(z-1), v=2xy$ 2) $f(z)=2z(z+1), v=xy+2y$

3) $f(z)=z(z+2), v=2xy-2y$ 4) $f(z)=z^2+2z, v=y(2x+2)$

۶ــــ اگـــر v,u **دارای مشـــتقات جزئـــی مرتبـــه دوم پیوســـته باشـــند، آن‌گـــاه شـــرط لازم بـــرای آن کـــه عبارت** $w=(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x})+i(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})$ **تابعی تحلیلی از متغیر مختلط z باشد، کدام است؟** $(z=x+iy)$

1) $u_{xx}-u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}=0$ 2) $u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}=0$

3) $u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}-v_{yy}=0$ 4) $u_{xx}-u_{yy}=0, v_{xx}-v_{yy}=0$

۷- اگر Lnz شاخه اصلی لگاریتم باشد $(-\pi<\arg z<\pi)$ **تابع** $\mathrm{Ln}(1+z^2)$ **در چه ناحیه‌ای تحلیلی نیست؟**

1) $\{z \mid \mathrm{Re}\, z=0, |\mathrm{Im}\, z|\geq 1\}$ 2) $\{z \mid \mathrm{Re}\, z=0, \mathrm{Im}\, z\geq 0\}$

3) $\{z \mid \mathrm{Re}\, z=0, |\mathrm{Im}\, z|\leq 1\}$ 4) $\{z \mid z=x+iy, y=0, x\leq 0\}$

۸- فرض کنید $z=x+iy$ **و** $u=x^3-3y^2$ **و** $f(z)=u+iv$ **تحلیلی باشد، f کدام است؟**

1) iz 2) z^3 3) ze^z 4) z^3+3z^2+1

$U(x,y) = e^{u(x,y)}\cos(V(x,y))$ ، مزدوج همساز تابع U عبارت است از:

1) $V(x,y) = e^{u(x,y)}\sin(v(x,y))$ 2) $V(x,y) = e^{v(x,y)}\sin(u(x,y))$

3) $V(x,y) = e^{u(x,y)}\sin(u(x,y))$ 4) $V(x,y) = e^{v(x,y)}\sin(v(x,y))$

۱۰- اگر $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ به ازاي $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ يك تابع تحليلي باشد، كدام يك از گزينه‌هاي زير صحيح است؟ $(j^2 = -1)$

1) $v(x,y) = 3x^2y$ 2) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ 3) $v(x,y) = 3y^2x$ 4) $v(x,y) = 3y^2x - x^3$

۱۱- براي اين كه تابع $u(x,y) = x^3 + \alpha x^2y + \beta xy^2 + y^3$ همساز باشد بايد:

1) $\beta = \alpha = -3$ 2) $\alpha = -2 = \beta$ 3) $\beta = -3 \ , \ \alpha = 3$ 4) $\beta = 3 \ , \ \alpha = -3$

۱۲ـ اگر $U = u(x,y)$ در يك ناحيه D از صفحه xoy همساز و $z = x + iy$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}$ برابر است با:

1) صفر 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{4i}$ 4) $-\frac{1}{4}$

۱۳- تابع f با ضابطه $f(x+iy) = x^2 + iy^2$ در كدام نقاط صفحه مختلط تحليلي است.

1) فقط در مبدا 2) $\{(1+i)x : x \in R\}$ 3) $\{(1-i)x : x \in R\}$ 4) هيچ نقطه

۱٤- تعيين كنيد تابع $f(z) = x^2 - y^2 + i2|xy|$ در كجا تحليلي است؟

1) فقط در ربع اول 2) در تمام صفحه

3) در ربع اول و سوم 4) در هيچ جا تحليلی نيست.

۱۵- تابع مختلط $w = f(z) = (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ را در نظر مي‌گيريم. اگر يك دور كامل حول دايره بسته $|z - i| = 1$ در صفحه مختلط بزنيم، آن‌گاه تغيير عبارت $\arg w$ برابر است با:

1) صفر 2) 2π 3) -2π 4) π

1) y^2-3x^2y　2) $3x^2y-y^3$　3) $3x^2y+y^3$　4) $3x^2y+3y^2x$

۱۷ـ اگر تابع $u(x,y)$ همساز باشد و $v(x,y)=xu(x,y)$ ، آن‌گاه $\nabla^4V=\nabla^2(\nabla^2V)$ برابر است با:

1) صفر　2) xu_{xx}　3) xu_{yy}　4) $x(u_{xx}-u_{yy})$

۱۸ـ قسمت حقيقي يك تابع تحليلي f در صفحه مختلط z به صورت $\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=\alpha x^2y-y^3-\beta y$ مي‌باشد، كه در آن β,α ثابت حقيقي‌اند. در اين صورت:

1) فقط $\alpha=3$ و فقط $\beta=1$　2) فقط $\alpha=-3$ و فقط $\beta=1$　3) $\alpha=-3$ و β دلخواه است　4) $\alpha=3$ و β دلخواه است.

۱۹ـ اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعي تحليلي باشد، براي عبارت $|f'(z)|^2$ كدام عبارت درست است؟

1) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x^2}$　2) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2$　3) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2$　4) $(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$

۲۰ـ براي اينكه $u(x,y)=x^3+\alpha x^2y+\beta xy^2+y^3$ قسمت حقيقي يك تابع تحليلي $f(z)=u+iv$ باشد بايد:

1) $\alpha=\beta=-3$　2) $\alpha=\beta=-2$　3) $\alpha=-3\ ,\ \beta=3$　4) $\alpha=3\ ,\ \beta=-3$

۲۱ـ اگر W يك تابع مختلط باشد، آنگاه $w=u(x,y)+iv(x,y)$ در تابع $w=\frac{1}{1-z}$ مقادير $v(x,y),u(x,y)$ كدام است؟

1) $v(x,y)=\frac{1-y}{1-x}\ ,\ u(x,y)=\frac{1-x}{1+y}$　2) $v(x,y)=\frac{x}{1-y}\ ,\ u(x,y)=\frac{y}{1-x}$

3) $v(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}\ ,\ u(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$　4) $v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\ ,\ u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$

۲۲ـ اگر $f(z)$ يك تابع تحليلي با قسمت حقيقي $u(x,y)=x+e^x\cos y$ باشد، $f'(1)$ برابر است با:

1) $1+e$　2) $1-e$　3) $e+2i$　4) $1+e+i$

۲۳ـ تابع $g(z)=z\left|z^2\right|$:

1) در مجموعه تک عضوی $\{0\}$ تحلیلی است　2) در مجموعه تک عضوی $\{0\}$ مشتق‌پذیر است

3) در تمام $\mathbf{C}$ تحلیلی است　4) در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

۲۴ـ اگر V مزدوج همساز u باشد كدام گزينه درست نيست؟

1) v_y مزدوج همساز u_y است.　2) v_x مزدوج همساز u_x است.

3) u_y مزدوج همساز v_y است.　4) u_x مزدوج همساز $-v_x$ است.

1) صفر   2) $\sqrt{2}$ 3) 2   4) $\sqrt{2}+1$

۲۶- اگر u در حوزه D همساز باشد آنگاه تابع $f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ **در حوزه D:**

1) تحلیلی است   2) تحلیلی نمی‌باشد

3) یک تابع ثابت است   4) فقط در یک نقطه تحلیلی است.

۲۷- اگر $v(x,y)$ **مزدوج همساز** $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$ **باشد و** $v(0,0)=1$ **آنگاه** $v(1,1)$ **برابر است با:**

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

۲۸- اگر $w=f(z)=\cos\bar{z}$ **وقتي** $z=x+iy$ **باشد آنگاه:**

1) $f(z)$ در کلیه نقاط به جز $z=0$ تحلیلی است

2) $f(z)$ فقط در نقاط درون دایره واحد و $z\neq 0$ تحلیلی است

3) $f(z)$ در نقاط خارج دایره واحد تحلیل است

4) هیچکدام

۲۹- اگر $v(x,y)$ **يك مزدوج همساز تابع** $u(x,y)=2x(3-y)$ **باشد و داشته باشيم** $v(2,1)=6$ **آنگاه مقدار** $v(1,2)$ **عبارت است از:**

1) $v(1,2)=10$ 2) $v(1,2)=6$ 3) $v(1,2)=12$ 4) $v(1,2)=16$

۳۰- فرض کنید $v(x,y)=y^3-3x^2y$ **و تابع** $f(z)=u(x,y)-iV(x,y)$ **تحليلي باشد و** $f(0)=0$ **. تابع** $u(x,y)$ **کدام است؟**

1) $3xy^2-x^2$ 2) x^3-3x^2y 3) x^3-3xy^2 4) y^3-3xy^2

۳۱- کدام تابع همساز است؟

1) $u=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ 2) $u=x^3-3y^2x+\operatorname{ch}y\cos x$

3) $u=(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}$ 4) $u=\sqrt{x^2+y^2}+x$

۳۲- فرض کنید $f(z)$ **تابعي تحليلي با قسمت حقيقي** $u(x,y)=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ **است.** $f'(1)$ **برابر است با**

1) $2\cos 1+2i\sin 1$ 2) $\cos 1-2i\sin 1$ 3) $2\cos 1+i\sin 1$ 4) $\cos 1-i\sin 1$

۳۳- مزدوج همساز (هارمونيك) تابع $u(x,y)=ax^3+by^3$ **وقتي که b , a اعداد حقيقي ثابت هستند عبارت است از:**

1) $v(x,y)=c$ 2) $v(x,y)=-bx^3+ay^3$

3) $v(x,y)=3ax^2+3by^2+3ab(x+y)$ 4) $v(x,y)=3ax^2+3by^2-3ab(x+y)$

۳۴ـ هرگاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آنگاه مقدار A در تساوی $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2 = A|f'(z)|^2$ برابر است با:

(1 $A=2$ (2 $A=1$ (3 $A=4$ (4 $A=9$

۳۵ـ اگر $u+iv$ که در آن v,u هر دو توابعي از x , y هستند در شرايط كوشي ريمان صدق كند آنگاه در صورتي $v+iu$ تحليلي است كه:

(1 $u=f(x)\ ,v=g(y)$ (2 $u=const\ ,v=const$

(3 $u=f(y)\ ,v=g(x)$ (4 بدون شرط خاصی همواره تحلیلی است.

۳۶ـ آيا تابع $V=-\sin x sh y$ مي‌تواند قسمت موهومي يك تابع تحليلي f باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، تابع هارمونيك $u=Re(f(z))$ را نيز به دست آوريد؟

1) بله، چون تابع $w=\sin z$ تحلیلی است. $u=\cos x ch y+g(y)$

2) بله، چون تابع $w=chz$ یک تابع تحلیلی است و $u=chx\sin y$

3) بله، چون در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مشتقات جزئی اوّل و دوّم پیوسته است و $u=\cos x ch y+c$

4) بله، چون تابع $w=\sin z$ تحلیلی است. $u=\cos x ch y+g(y)$

۳۷ـ كدام يك از گزاره‌هاي زير، در مورد تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^3}{z^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ صحيح است؟

1) در مبدأ 0 پیوسته نیست.

2) در مبدأ 0 مشتق‌پذیر نیست. اما در روابط کشی ـ ریمان در این نقطه صدق می‌کند.

3) در مبدأ 0 مشتق‌پذیر نیست و در روابط کشی ـ ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند.

4) در مبدأ پیوسته است و در روابط کشی ـ ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.

۳۸ـ فرض كنيد $v(x,y)=Ln(x^2+y^2)$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحليلي باشد، در اين صورت $u(x,y)$ كدام است؟

(1 $\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$ (2 $\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ (3 $2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ (4 $2\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$

۳۹ـ ناحيه بسته شامل درون و روي اضلاع چهارضلعي با رئوس جواب‌هاي معادله‌ي $z^4+1=0$ را D مي‌ناميم، مقدار ماكزيمم تابع $|\sin z|^2$ روي ناحيه D كدام است؟

(1 $\frac{1}{2}+\sinh^2\frac{1}{2}$ (2 $\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3 $\cosh^2\frac{\pi}{2}$ (4 $\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}+\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

... $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ... $\sin(2xy)$ ... $v(x,y)=e$ ... مي‌باشد ...

1) $f(z)=\exp(z^2)$ 2) $f(z)=\exp(-z^2)$ 3) $f(z)=-\exp(\overline{z}^2)$ 4) $f(z)=\exp(\overline{z}^2)$

۴۱ـ تابع مختلط $f(z)$ پس از جايگزيني $z=x+iy$ به صورت $f(z)=ax^3+bxy^2+i(x^2y+cy^3)$ در آمده است، به ازاي كدام ثابت‌هاي حقيقي c,b,a تابع $f(z)$ نسبت به متغير z مشتق‌پذير است؟

1) $b=-1\,,\ a=0=c$ 2) به ازای هرمقدار برای **a, b , c** تابع $f(z)$ نسبت به **Z** مشتق ندارد

3) $c=-\frac{1}{3}\,,b=-1,a=\frac{1}{3}$ 4) $b=0=c,a=1$

۴۲ـ اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (v,u حقيقي و $z=x+iy$) و $u(x,y)=\alpha x\cosh x\cos y+\beta y\sinh x\sin y$ ، آنگاه به ازاي كدام β,α ثابت، تابع f تحليلي است؟

1) $\alpha\beta=0$ 2) $\beta=-\alpha$ 3) $\alpha=\beta=1$ 4) $\beta=\alpha$

۴۳ـ فرض كنيد f تابعي تام باشد، كه مقادير آن خارج دايره واحدند. در اين صورت f ...

1) چند جمله‌ای از درجه بیش از 1 است. 2) متناوب است.

3) ثابت است 4) خطی کسری است

1) گزینه 3

$$v_y = u_x = 2^x \mathrm{Ln}2\cos(y\ln 2) \Rightarrow v = 2^x \sin(y\ln 2) + g(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 2^x \mathrm{Ln}2\sin(y\ln 2) + g'(x) = 2^x \ln 2\sin(y\ln 2)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \lambda \Rightarrow v = 2^x \sin(y\ln 2) + \lambda$$

$$f(z) = u + iv = 2^x \cos(y\ln 2) + i2^x \sin(y\ln 2) + i\lambda$$

$$f(z) = 2^x e^{iy\ln 2} + i\lambda = 2^x 2^{iy} + i\lambda = 2^{x+iy} + i\lambda$$

$$f(z) = 2^z + i\lambda$$

2) گزینه 2

$$u_x = 2x + by \ , \ u_{xx} = 2$$
$$u_y = 2ay + bx \ , \ u_{yy} = 2a$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$$

b هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

3) گزینه 2

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$u_x = v_y = 2x \ , \ v_x = -u_y = 2y$$

بنابراین این تابع در تمام نقاط صفحه تحلیلی است.

4) گزینه 3

براساس نکته (28) اگر $f(z)$ تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه $\overline{f(z)}$ غیرتحلیلی است. در این تست چون $\overline{f(z)}, f(z)$ هر دو تحلیلی می‌باشند بنابراین $f(z)$ تابع ثابت خواهد بود.

5) گزینه 4

$$dv = v_x\,dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

$$dv = 2y dx + (2x+2) dy$$

تابع $2y$ را حذف کرده و از عبارت باقی‌مانده انتگرال می‌گیریم:

$$v = \int (2x+2)\,dy = (2x+2)\,y$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + iy(2x+2) = f(x+iy)$$

$$f(z) = f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}} = x^2 - y^2 + 2x + iy(2x+2)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}} = z^2 + 2z$$

6) گزینه 2

باید شرایط کوشی ـ ریمان در مورد **w** صدق کند

$$w = (u_y - v_x) + i(u_x + v_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_y - v_x) = \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) \Rightarrow u_{yx} - v_{xx} = u_{xy} + v_{yy}$$

چون v,u دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته هستند بنابراین

$$u_{yx} = u_{xy}\,,\ v_{xy} = v_{yx}$$

با توجه به $u_{xy} = u_{yx}$ از رابطه‌ی فوق داریم:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(u_y - v_x) \Rightarrow u_{xx} + v_{yx} = -u_{yy} + v_{xy}$$

$$v_{xy} = v_{yx} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

7) گزینه 1

$$w = \mathrm{Ln}(1+z^2)$$
$$\mathrm{Im}(1+z^2) = 0\ ,\ \ \mathrm{Re}(1+z^2) \le 0$$

$$1+z^2 = 1+(x+iy)^2 = 1+x^2-y^2+2ixy$$

$\mathrm{Im}(1+z^2) = 0 \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $y = 0$

$$\mathrm{Re}(1+z^2) \le 0 \Rightarrow 1+x^2-y^2 \le 0$$

$$x = 0, 1+x^2-y^2 \le 0 \Rightarrow y^2 \ge 1 \Rightarrow |y| \ge 1 \Rightarrow |\mathrm{Im}\, z| \ge 1$$

$y = 0, 1+x^2-y^2 \le 0 \Rightarrow 1+x^2 \le 0$ جواب ندارد

نواحی غیرتحلیلی: $\{z \mid \mathrm{Re}\, z = 0, |\mathrm{Im}\, z| \ge 1\}$

8) گزینه 2

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = 3x^2 + i6y$$

$$f'(z) = 3x^2 + i6y\Big|_{\substack{x=z\\y=0}} = 3z^2 \Rightarrow f(z) = z^3$$

9) گزینه 1

$$W=e^{f(z)}=e^{u(x,y)+iv(x,y)}=e^{u(x,y)}\left[\cos(v(x,y))+i\sin(v(x,y))\right]$$

$$W=e^{u(x,y)}\cos(v(x,y))+ie^{u(x,y)}\sin(v(x,y))=U(x,y)+iV(x,y)$$

بنابراین:

$$V(x,y)=e^{u(x,y)}\sin(v(x,y))$$

10) گزینه 2

$$dV=v_x dx+v_y dy=-u_y dx+u_x dy=6xydx+(3x^2-3y^2)dy$$

عبارت $6xy$ را حذف کرده و از عبارت باقی‌مانده انتگرال می‌گیریم:

$$v=\int(3x^2-3y^2)dy=3x^2y-y^3$$

11) گزینه 1

$$u_x=3x^2+2\alpha xy+\beta y^2\,,\ u_{xx}=6x+2\alpha y$$

$$u_y=\alpha x^2+2\beta xy+3y^2\,,\ u_{yy}=2\beta x+6y$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0\Rightarrow(6+2\beta)x+(2\alpha+6)y=0\Rightarrow\alpha=\beta=-3$$

12) گزینه 1

براساس نکته (26):

$$\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\nabla^2U$$

چون $\mathbf{U}$ تابعی همساز است بنابراین $\nabla^2U=0$ می‌باشد.

13) گزینه 4

$$u=x^2\,,v=y^2$$

$$\begin{cases}u_x=2x\\u_y=0\end{cases}\ ,\ \begin{cases}v_x=0\\v_y=2y\end{cases}$$

$$u_x=v_y\Rightarrow x=y,\ v_x=-u_y\Rightarrow 0=0$$

بنابراین $f(z)$ بر روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است. اگر یک تابع فقط بر روی یک منحنی مشتق‌پذیر باشد آنگاه در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست چون اگر برای هر نقطه روی منحنی یک همسایگی در نظر بگیریم، $f(z)$ فقط در بعضی از نقاط این همسایگی مشتق دارد.

$xy > 0 \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$

$u_x = v_y = 2x, v_x = -u_y = 2y$

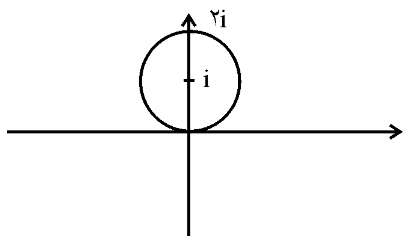
بنابراین در ربع اول و سوم تابع مشتق‌پذیر است اگرتابع در یک حوزه مشتق‌پذیر باشد آنگاه در آن حوزه تحلیلی است.

$xy < 0 \Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = -2xy$

$u_x = 2x, v_y = -2x, u_y = -2y, v_x = -2y$

بنابراین اگر $xy < 0$ (ربع دوم و چهارم) تابع مشتق‌ناپذیر و غیرتحلیلی است.

15) گزینه 4



$\arg(w) = \frac{1}{2}\arg(1+z^2)$

$1+z^2 = 1+x^2-y^2+2ixy$

$\arg(1+z^2)$ را در چهار نقطه روی دایره‌ی فوق تعیین می‌کنیم.

$x \to 0^+, y \to 0^+ \Rightarrow 1+z^2 = 1+i(0^+) \Rightarrow \arg(1+z^2) = 0^+$

$x \to 0^+, y \to 2^- \Rightarrow 1+z^2 = -3+i(0^+) \Rightarrow \arg(1+z^2) = \pi^-$

$x \to 0^-, y \to 2^- \Rightarrow 1+z^2 = -3+i(0^-) \Rightarrow \arg(1+z^2) = (-\pi)^+$

$x \to 0^-, y \to 0^+ \Rightarrow 1+z^2 = 1+i(0^-) \Rightarrow \arg(1+z^2) = 0^-$

$\arg(1+z^2)$ از $-\pi$ تا π یعنی به اندازه‌ی 2π تغییر می‌کند بنابراین $\arg(1+z^2)^{\frac{1}{2}}$ به اندازه‌ی π تغییر خواهد کرد.

16) گزینه 2

این تست مشابه تست (10) می‌باشد.

17) گزینه 1

$v(x,y) = xu(x,y) \Rightarrow v_{yy} = xu_{yy}$

$v_x = u + xu_x, v_{xx} = u_x + u_x + xu_{xx} = 2u_x + xu_{xx}$

چون $\mathbf{u}$ همساز است بنابراین:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow \nabla^2 v=2u_x$$

$$\nabla^4 v=\nabla^2(2u_x)=2\nabla^2(u_x)=2\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right]$$

$$\nabla^4 v=2\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}+u_{yy})=0$$

18) گزینه 4

$$u_x=2\alpha xy, u_{xx}=2\alpha y, u_y=\alpha x^2-3y^2-\beta \quad , u_{yy}=-6y$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow 2\alpha y-6y=0 \Rightarrow \alpha=3$$

β مقدار دلخواه می‌باشد.

19) گزینه 3

$$f'(z)=u_x+iv_x \Rightarrow |f'(z)|^2=(u_x)^2+(v_x)^2$$

20) گزینه 1

$$u_x=3x^2+2\alpha xy+\beta y^2, u_{xx}=6x+2\alpha y$$
$$u_x=\alpha x^2+2\beta xy+3y^2, u_{yy}=2\beta x+6y$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow (2\beta+6)x+(2\alpha+6)y=0 \Rightarrow \alpha=\beta=-3$$

21) گزینه 4

$$w=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-x-iy}=\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$$

$$u=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \quad , v=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

22) گزینه 1

$$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$$

$$f'(z)=1+e^x\cos y-i(-e^x\sin y)=1+e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$x=1, y=0 \Rightarrow f'(1)=1+e$$

23) گزینه 2

$$g(z)=z|z^2|=z|z|^2=(x+iy)(x^2+y^2)=(x^3+xy^2)+i(yx^2+y^3)$$

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 + y^2 \\ u_y = 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = 2xy \\ v_y = x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

$$u_x = v_y \Rightarrow 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow 2x^2 = 2y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

$y = 0$ یا $v_x = -u_y \Rightarrow 2xy = -2xy \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$

$$x = 0 \ , \ y = \pm x \Rightarrow x = y = 0$$

$$y = 0 \ , \ y = \pm x \Rightarrow x = y = 0$$

تابع $g(z)$ فقط در $z = 0$ مشتق‌پذیر است بنابراین $g(z)$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نمی‌باشد.

24) گزینه 3

اگر v مزدوج همساز **u** باشد آنگاه می‌توانیم از هر دو تابع نسبت به **x** یا **y** مشتق بگیریم بنابراین v_x مزدوج همساز u_x و همچنین v_y مزدوج همساز u_y می‌باشد.

اگر v مزدوج همساز **u** باشد آنگاه **u** مزدوج همساز $-v$ می‌باشد بنابراین u_x مزدوج همساز $-v_x$ خواهد بود.

اگر **v** مزدوج همساز **u** باشد آنگاه نتیجه نمی‌گیریم **u** مزدوج همساز **v** است بنابراین u_y مزدوج همساز V_y نخواهد بود.

25) گزینه 3

چون $z^2 - z$ تابع تحلیلی و غیرثابت می‌باشد بنابراین مقدار ماکزیمم $|z^2 - z|$ بر مرز $|z| = 1$ اتفاق می‌افتد.

$$|z^2 - z| = |z||z - 1| = |z - 1|$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow |z^2 - z| = |e^{i\theta} - 1| = |\cos\theta - 1 + i\sin\theta|$$

$$|z^2 - z| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$

$$\cos\theta = -1 \Rightarrow \operatorname{Max}(|z^2 - z|) = 2$$

26) گزینه 1

$$f(z) = u_x - iu_y$$

$$(u_x)_x = u_{xx}, (-u_y)_y = -u_{yy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow (u_x)_x = (-u_y)_y \qquad (1)$$

$$(-u_y)_x = -u_{yx}, -(u_x)_y = -u_{xy}$$

$$-u_{yx} = -u_{xy} \Rightarrow (-u_y)_x = -(u_x)_y \qquad (2)$$

27) گزینه 1

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

$$dv = -6xydx + (2-3x^2+3y^2)dy$$

عبارت $-6xy$ را حذف کرده و از عبارت باقی‌مانده انتگرال می‌گیریم:

$$v = \int (2-3x^2+3y^2)\,dy = 2y - 3x^2y + y^3 + c$$

$$v = (0,0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + 1$$

$$v(1,1) = 1$$

28) گزینه 4

چون $f(z)$ شامل $\bar{z}$ می‌باشد بنابراین در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نمی‌باشد.

29) گزینه 2

از شرایط کوشی ـ ریمان استفاده می‌کنیم:

$$u = 6x - 2xy$$

$$v_y = u_x = 6 - 2y \Rightarrow v = \int (6-2y)dy + g(x) = 6y - y^2 + g(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow g'(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2 + c$$

$$v(x,y) = 6y - y^2 + x^2 + c\ ,\ v(2,1) = 6 \Rightarrow c = -3$$

$$v(x,y) = 6y - y^2 + x^2 - 3 \Rightarrow V(1,2) = 6$$

30) گزینه 3

$$f(z) = u(x,y) + i(3x^2y - y^3)$$

$$u_x = (3x^2y - y^3)_y = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow u = x^3 - 3xy^2 + g(y)$$

$$(3x^2y - y^3)_x = -u_y \Rightarrow 6xy = 6xy - g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$u = x^3 - 3xy^2 + c$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow u(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

31) گزینه 2

معادله لاپلاس را در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم:

$$u = x^3 - 3y^2x + \operatorname{ch} y \cos x$$

$u_y = -6xy + \text{sh}y \cos x \ , \ u_{yy} = -6x + \text{ch}y \cos x$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

32) گزینه 1

$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$

$f'(x+iy) = \left[-2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2) + 2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\right]$

$-i\left[-2xe^{-2xy}\sin(x^2-y^2) - 2ye^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\right]$

$x = 1, y = 0 \Rightarrow f'(1) = 2\cos 1 + 2i\sin 1$

33) گزینه 1

تابع $u(x,y)$ باید در معادله لاپلاس صدق کند بنابراین:

$u_x = 3ax^2, u_{xx} = 6ax, u_y = 3by^2, u_{yy} = 6by$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 6ax + 6by = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow u(x,y) = 0$

بنابراین $v(x,y)$ باید مقدار ثابتی باشد یعنی $v(x,y) = c$

34) گزینه 3

$f(z) = u + iv \Rightarrow |f(z)|^2 = u^2 + v^2$

$(u^2+v^2)x = 2uu_x + 2vv_x, (u^2+v^2)_{xx} = 2(u_x)^2 + 2uu_{xx} + 2(v_x)^2 + 2vv_{xx}$

$(u^2+v^2)_y = 2uu_y + 2vv_y, (u^2+v^2)_{yy} = 2(u_y)^2 + 2uu_{yy} + 2(v_y)^2 + 2vv_{yy}$

$(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2})|f(z)|^2 = 2\left[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2\right] + 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2v(v_{xx} + v_{yy})$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ تحلیلی $f(z) =$

$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y \Rightarrow |f'(z)|^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2 = (v_y)^2 + (u_y)^2$

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 \Rightarrow A = 4$

35) گزینه 2

اگر **v** مزدوج همساز **u** و همچنین **u** مزدوج همساز **v** باشد آنگاه **v , u** ثابت هستند.

36) گزینه 3

$$v_y = -\sin x ch y \Rightarrow v_{yy} = -\sin x sh y$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

چون $\mathbf{V}$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته می‌باشد بنابراین v تابع همساز است و می‌تواند قسمت موهومی تابع تحلیلی f باشد

$$u_x = v_y = -\sin x ch y \Rightarrow u = \int -\sin x ch y \, dx$$

$$u = \cos x ch y + g(y)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow -\cos x sh y = -\cos x sh y - g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$$
$$g(y) = c$$

$$u(x, y) = \cos x ch y + c$$

37) گزینه 3

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{r^3 e^{-i3\theta}}{r^2 e^{i2\theta}} = \lim_{r \to 0} r e^{-i5\theta} = 0 = f(0)$$

$f(z)$ در مبدا پیوسته است

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x - i\Delta y)^3}{(\Delta x + i\Delta y)^2}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\Delta x = 0 \Rightarrow f'(0) = -1$$
$$\Delta y = 0 \Rightarrow f'(0) = 1$$

چون به روی دو مسیر $\Delta y = 0, \Delta x = 0$ نتیجه حد فوق متفاوت است بنابراین شرایط کوشی ـ ریمان صادق نیست و تابع $f(z)$ در مبدا مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

38) گزینه 3

$$u_x = v_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow u = \int \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 2\tan^{-1}\frac{x}{y} + g(y)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + y^2} = -2\frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$$
$$g(y) = c$$

$$u(x, y) = 2\tan^{-1}\frac{x}{y} + c$$

$\sin z$ تحلیلی و غیرثابت است بنابراین براساس قضـیه اصـل مـاکزیمم مقـدار مـاکزیمم $|\sin z|^2$ بـه روی مـرز ناحیـه رخ می‌دهد.

$$z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}=e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

نقاط فوق رئوس یک مربع می‌باشند که یک ضلع آن به صورت $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد.

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y \Rightarrow \mathrm{Max}(|\sin z|^2)=\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}+\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

40) گزینه 1

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x$$

$$f'(x+iy)=(-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy))+i(2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy))$$

$$f'(z)=f'(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}=2ze^{z^2}\Rightarrow f(z)=e^{z^2}=\exp(z^2)$$

41) گزینه 3

$$u=ax^3+bxy^2\Rightarrow u_x=3ax^2+by^2, u_{xx}=6ax, u_y=2bxy, u_{yy}=2bx$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0\Rightarrow b=-3a$$

$$v=x^2y+cy^3\Rightarrow v_x=2xy, v_{xx}=2y, v_y=x^2+3cy^2, v_{yy}=6cy$$

$$v_{xx}+v_{yy}=0\Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

$$u=ax^3-3axy^2, v=x^2y-\frac{1}{3}y^3$$

$$u_x=v_y\Rightarrow 3ax^2-3ay^2=x^2-y^2\Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$b=-1$$

42) گزینه 2

$$u_x=\alpha \mathrm{ch}x\cos y+\alpha x\,\mathrm{sh}x\cos y+\beta y\,\mathrm{ch}x\sin y$$

$$u_{xx}=2\alpha\,\mathrm{sh}x\cos y+\alpha x\,\mathrm{ch}x\cos y+\beta y\,\mathrm{sh}x\sin y$$

$$u_y=-\alpha x\,\mathrm{ch}x\sin y+\beta\,\mathrm{sh}x\sin y+\beta y\,\mathrm{sh}x\cos y$$

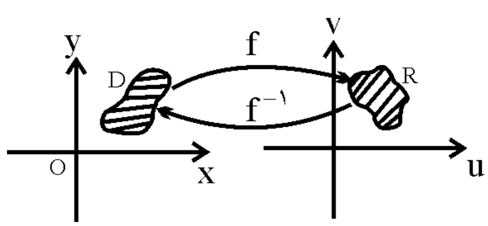
$$u_{yy}=-\alpha x\,\mathrm{ch}x\cos y+2\beta\,\mathrm{sh}x\cos y-\beta y\,\mathrm{sh}x\sin y$$

43) گزینه 3

تابع مختلط $w=f(z)$ را در نظر می‌گیریم اگر $z=x+iy$ یک نقطه از دامنه‌ی تعریف تابع و $w=u+iv$ مقدار تابع بـه ازای z باشد در اینصورت می‌گوییم تابع f نقطه‌ی **z** را از صفحه‌ی **xy** به نقطه‌ی **w** در صفحه‌ی **uv** تصویر می‌کند.

اگر f مجموعه نقاط **D** از صفحه‌ی مختلط **xy** را به مجموعه نقاط **R** در صفحه‌ی **uv**، تبدیل کند در اینصورت نگاشت f را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

اگـر تـابع f وارون‌پـذیر باشـد در اینصـورت تـابع f^{-1}، ناحیـه‌ی **R** را بـه ناحیـه **D** مـی‌نگـارد. در تـابع مخـتلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ برای تعیین تصویر منحنی $g(x,y)=0$ واقع در صفحه‌ی **xy**، ابتدا متغیرهـای **x , y** را بـر حسب **u ,v** محاسبه کرده و نتایج حاصل را در ضابطه‌ی $g(x,y)=0$ قرار می‌دهیم.



مثال ۲۸: تصویر خط $x=2$ توسط نگاشت $w=2z^2$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$w=2z^2=2(x+iy)^2=2(x^2-y^2+2ixy)=2(x^2-y^2)+4ixy$$

$$u=2(x^2-y^2),\ v=4xy$$

$$x=2\Rightarrow u=8-2y^2,\ v=8y$$

$$v^2=64y^2\Rightarrow 2y^2=\frac{v^2}{32}\Rightarrow u=8-\frac{v^2}{32}$$

بنابراین با حذف **y**، سهمی افقی $u=8-\frac{v^2}{32}$ تصویر خط $x=2$ می‌باشد.

برای بررسی عملکرد نگاشت $w=f(z)=u+iv$، معمولاً تصویر منحنی‌های خاص زیر را به دست می‌آوریم:

الف) خطوط قائم و افقی $y=b, x=a$ را در صفحه‌ی **xy** در نظر می‌گیـریم و تصـویر آن‌هـا را تحـت نگاشـت $w=f(z)$ تعیین می‌کنیم.

ب) منحنی‌های تراز $u(x,y)=c_1$, $V(x,y)=c_2$ را به دست می‌آوریم تصویر این منحنی‌ها به صورت خطوط قـائم و افقـی $v=c_2 , u=c_1$ در صفحه‌ی uv می‌باشد.

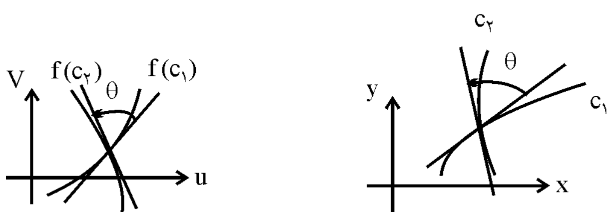
$w=f(z)$ تعیین می‌کنیم.

د) منحنی‌های قطبی را در صفحه‌ی $\mathbf{Z}$ چنان تعیین می‌کنیم که تصویر آن‌ها توسط $w=f(z)$ به صویرت دوایر $R=c_1$ یا نیم‌خط‌های $\phi=c_2$ در صفحه w باشد.

در ادامه‌ی این بخش استفاده از دسته منحنی‌های فوق را در نگاشت‌های مختلط مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نگاشت همدیس:

اگر نگاشت $w=f(z)$، زاویه‌ی بین خم‌های جهت‌دار را از نظر اندازه و جهت، ثابت نگه دارد به آن نگاشت همدیس گفته می‌شود.



نکته 31:

الف) اگر مشتق تابع تحلیلی $f(z)$ در حوزه‌ی $\mathbf{R}$ مخالف صفر باشد آنگاه $f(z)$ در این حوزه همدیس می‌باشد.

ب) اگر $f(z)$ یک نگاشت همدیس در حوزه‌ی R باشد در اینصورت طول منحنی‌ها و اندازه‌ی مساحت‌ها در همسایگی نقطه‌ی $z_0\in R$، تحت این نگاشت به ترتیب در $|f'(z_0)|$, $|f'(z_0)|^2$ ضرب می‌شود.

نگاشت‌های مهم:

1) نگاشت $w=z+b$

$$z=x+iy\ ,\ b=b_x+ib_y\ ,w=u+iv$$

$$u+iv=(x+b_x)+i(y+b_y)$$
$$\begin{cases}u=x+b_x\\ v=y+b_y\end{cases}$$

بنابراین این نگاشت نقطه‌ی (x,y) را به اندازه‌ی بردار (b_x,b_y) انتقال می‌دهد. این نگاشت در تمام صفحه مختلط همدیس است.

2) نگاشت $w=az$

$$a=|a|e^{i\arg(a)}\quad a\neq 0, z=|z|e^{i\arg(z)}$$

بنابراین این نگاشت متشکل از دوران بردار $\mathbf{Z}$ حول مبدا مختصات به اندازه‌ی $\arg(a)$ و نیز تجانس (انبساط یا انقباض) به مرکز مبدا و ضریب تجانس $|a|$ می‌باشد.

3) نگاشت خطی $w = az + b$

این نگاشت ترکیبی است از دوران و تجانس (az) و به دنبال آن انتقال به اندازه‌ی $\mathbf{b}$.

با فرض $a \neq 0$ ، نگاشت خطی همدیس می‌باشد.

مثال ۲۹: تبدیل سهمی $y = x^2$ را تحت نگاشت $w = iz + 1 + i$ تعیین کنید.

پاسخ:

$$w = i(x+iy) + 1 + i = 1 - y + i(1+x)$$

$$u = 1 - y, v = 1 + x \Rightarrow y = 1 - u, x = v - 1$$

$$y = x^2 \Rightarrow 1 - u = (v-1)^2 \Rightarrow u = 2v - v^2$$

مثال ۳۰: تصویر منحنی $y = x, 1 \le x \le 2$ را توسط نگاشت $w = (1+i)z + 2i$ تعیین کنید.

پاسخ:

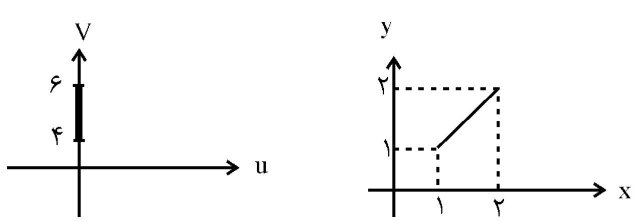
$$w = (1+i)(x+iy) + 2i = x + iy + ix - y + 2i$$

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y + 2 \end{cases}$$

$$x = y \Rightarrow u = 0, v = 2x + 2$$

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow 4 \le v \le 6$$

تصویر به صورت پاره‌خط $u = 0, 4 \le v \le 6$ می‌باشد.



نگاشت خطی، خطوط را به خطوط و دوایر را به دوایر تصویر می‌کند.

نقاط ثابت:

در نگاشت $w = f(z)$ ، نقاطی که تصویرشان بر خود آن‌ها منطبق است را نقاط ثابت می‌نامیم برای تعیین نقاط ثابت

با فرض $a \neq 1$، نگاشت خطی $w = az + b$ دارای یک نقطه‌ی ثابت به صورت $z = \frac{b}{1-a}$ می‌باشد.

4) نگاشت $w = z^n$ $(n \in N)$

$z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\phi}$

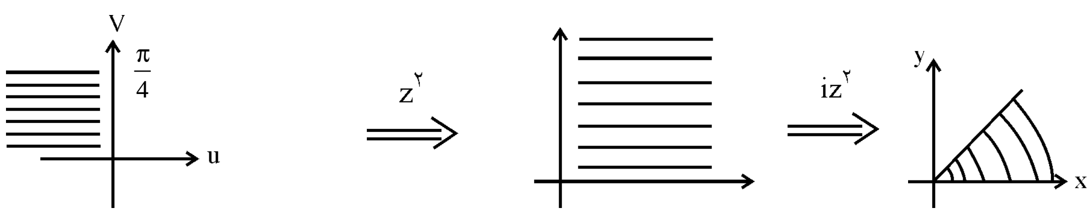
$R = r^n$, $\phi = n\theta$

بنابراین این نگاشت ناحیه‌ی $-\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}$ را به $-\pi < \arg(w) \leq \pi$ یعنی به کل صفحه مختلط تصویر می‌کند.

مثال ۳۱: تصویر ناحیه $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ توسط تابع $w = iz^2$ کدام است؟

1) ربع اول مختصات　　2) ربع دوم مختصات　　3) ربع سوم مختصات　　4) ناحیه بین $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه 2



بنابراین تصویر نهایی، ربع دوم مختصات می‌باشد.

مثال ۳۲: تابع تحلیلی $f(z)$ که ناحیه زاویه‌ای $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ را بر روی ناحیه $u < 4$ می‌نگارد عبارتست از:

1) $w = -iz^2 + 4$　　2) $w = iz^4 + 4$　　3) $w = iz^2 - 4$　　4) $w = -iz^4 + 4$

پاسخ: گزینه 2

$w_1 = z^4$, $w_2 = iz^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} z^4$, $w = w_2 + 4 = iz^4 + 4$

$0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \arg w_1 < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{3\pi}{2}$

اگر $w_2 = u_2 + iv_2$، $\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{3\pi}{2}$ به معنی $u_2 < 0$ می‌باشد.

$w = w_2 + 4 \Rightarrow u = u_2 + 4, v = v_2$
$u_2 < 0 \Rightarrow u < 4$

[illegible]

دایره‌ای به مرکز $z = 0$ تبدیل می‌شود به

1) خط مستقیم　　2) یک نقطه　　3) دایره‌ای به مرکز $w = 0$　　4) دایره‌ای به مرکز $w = 3$

پاسخ: گزینه 4

اگر $z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\phi}$ باشد، نگاشت $w_1 = z^2$ دایره‌ی $r = r_0$ را به دایـره‌ی $R = r_0^2$ تبـدیل مـی‌کنـد یعنـی دایـره‌ای بـه مرکز $z = 0$ به دایره‌ای به مرکز $w = 0$ تصویر می‌شود.

نگاشت $w = w_1 + 3 = z^2 + 3$ دایره‌ی حاصل را به اندازه‌ی 3 واحد به سمت راست انتقال می‌دهد بنابراین نتیجـه دایـره‌ای به مرکز $w = 3$ خواهد بود.

نکته 32:

الف) نگاشت $w = z^n, n \geq 2$ در تمام نقاط صفحه غیر از مبدا مختصات، همدیس می‌باشد.

ب) نگاشت $w = z^n$ دارای **n** نقطه ثابت است که ریشه‌های معادله $z^n = z$ می‌باشـند نقـاط ثابـت نگاشـت $w = z^2$، نقـاط $z = 0,1$ می‌باشد.

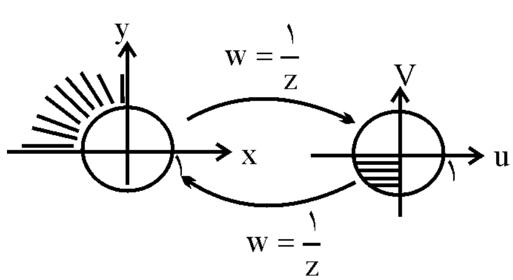
5) نگاشت $w = \frac{1}{z}$

مختصات قطبی:

$$z = re^{i\theta}, w = Re^{i\phi}$$

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} \Rightarrow R = \frac{1}{r}, \phi = -\theta$$

بنابراین این نگاشت نقاط خارج دایره‌ی واحد را به داخل دایره واحد و نقاط داخل دایره واحـد را بـه خـارج دایـره واحـد تصویر کرده و سپس قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به محور حقیقی به دست می‌آورد.



$z = x + iy\ ,\ \ w = u + iv$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2 + v^2} \\ y = -\dfrac{v}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

نکته 33: هر خط راست یا دایره واقع در صفحه $\mathbf{z}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0\ ,\ (a, b, c, d \in R)$$

با استفاده از روابط فوق برای y, x، تصویر خطوط و دوایر تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به صورت زیر می‌باشد

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

الف) اگر $a \neq 0\ ,\ d \neq 0$ یعنی دایره از مبدا مختصات عبور نکند، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، دایره را به دایره‌ای که از مبدا نمی‌گذرد تصویر می‌کند.

ب) اگر $a \neq 0\ ,\ d = 0$ یعنی دایره از مبدا مختصات عبور کند، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، دایره را به خط راستی که از مبدا نمی‌گذرد تصویر می‌کند.

ج) اگر $a = 0\ ,\ d \neq 0$ یعنی خط راستی که از مبدا مختصات عبور نمی‌کند، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، خط را به دایره‌ای که از مبدا می‌گذرد تصویر می‌کند.

د) اگر $a = d = 0$ یعنی خط راستی که از مبدا مختصات عبور می‌کند، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، خط را به خط راستی که از مبدا می‌گذرد تصویر می‌کند.

هـ) اگر $a = b = 0$ یعنی خط افقی $y = -\frac{d}{c}$ را در نظر بگیریم، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، این خط را به دایره‌ای تصویر می‌کند که مرکز آن روی محور $\mathbf{V}$ بوده و بر محور $\mathbf{u}$ مماس است اگر خط افقی بالای محور $\mathbf{x}$ قرار داشته باشد دایره پایین محور $\mathbf{u}$ خواهد بود و بالعکس اگر دایره توصیف شده را در صفحه‌ی $\mathbf{xy}$ در نظر بگیریم، تصویر آن به صورت خط افقی خواهد بود.

ی) اگر $a = c = 0$ یعنی خط قائم $x = -\frac{d}{b}$ را در نظر بگیریم، نگاشت $w = \frac{1}{z}$، این خط را به دایره‌ای تصویر می‌کند که مرکز آن روی محور $\mathbf{u}$ بوده و بر محور $\mathbf{v}$ مماس است اگر خط قائم سمت راست محور $\mathbf{y}$ قرار داشته باشد دایره سمت راست

اگر دایره‌ی توصیف شده را در صفحه‌ی **xy** در نظر بگیریم، تصویر آن به صورت خط قائم خواهد بود.

نکته 34:

الف) نگاشت $w=\frac{1}{z}$ در کلیه نقاط $z\neq 0$، همدیس است.

ب) نقاط ثابت $w=\frac{1}{z}$، نقاط $z=\pm 1$ می‌باشند.

ج) چون معکوس $w=\frac{1}{z}$ با خودش برابر است بنابراین اگر این نگاشت ناحیه‌ی **D** را به ناحیــه‌ی **R** تصـویر نمایـد آنگـاه ناحیه‌ی **R** را نیز به ناحیه‌ی **D** تصویر خواهد کرد.

مثال ۳۴: تصویر خط $y=x+\frac{1}{2}$ بوسیله نگاشت $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

1) خطی است که از مبدا می‌گذرد
2) خطی است که از مبدا نمی‌گذرد
3) دایره‌ای است که از مبدا می‌گذرد
4) دایره‌ای است که از مبدا نمی‌گذرد

پاسخ: گزینه 3

براساس نکته (33) قسمت (ج) تصویر خط راستی که از مبدا نمی‌گذرد، دایره‌ای است که از مبدا می‌گذرد.

مثال ۵: تبدیل ناحیه‌ی محصور بین دو دایره $|z-i|=1\,,\,|z-1|=1$ توسط تابع $w=\frac{1}{z}$ عبارت است از:

1) $v>\frac{1}{2}\ ,\ u>\frac{1}{2}$
2) $v<-\frac{1}{2}\ ,\ u>\frac{1}{2}$
3) $v<-\frac{1}{2}\ ,\ u<\frac{1}{2}$
4) $v>-\frac{1}{2}\ ,\ u<\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه 2

$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{1}{w},\ w=u+iv$$

$$|z-1|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{w}-1\right|<1\Rightarrow\left|\frac{1-w}{w}\right|<1\Rightarrow|w-1|<|w|$$

$$|u-1+iv|<|u+iv|\Rightarrow(u-1)^2+v^2<u^2+v^2\Rightarrow 1-2u<0\Rightarrow u>\frac{1}{2}$$

$$|z-i|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{w}-i\right|<1\Rightarrow\left|\frac{1-iw}{w}\right|<1\Rightarrow|1-iw|<|w|$$

$$|1-iu+v|<|u+iv|\Rightarrow(1+v)^2+u^2<u^2+v^2\Rightarrow 1+2v<0\Rightarrow v<-\frac{1}{2}$$

بنابراین $v<-\frac{1}{2},u>\frac{1}{2}$ تصویر می‌باشد.

و) نگاشت کسری خطی (موبیوس) $w = \frac{az+b}{cz+d}$

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, c \neq 0 , ad - bc \neq 0$$

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

چون $ad - bc \neq 0$ بنابراین $w' \neq 0$ بوده و نگاشت موبیوس (دو خطی کسری) یک نگاشت همدیس می‌باشد.

نگاشت موبیوس را به صورت ترکیب چند نگاشت می‌توانیم بنویسیم.

$$w_1 = cz + d , w_2 = \frac{1}{w_1} \ , \ w = \frac{a}{c} + (\frac{bc-ad}{c}) w_2$$

نکته 35: برای تبدیل نقاط متمایز z_1, z_2, z_3 به ترتیب به نقاط w_1, w_2, w_3 یک نگاشت موبیوس به صورت زیر موجود است.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

اگر یکی از نقاط مانند w_1 برابر ∞ باشد آنگاه کسر مربوط به w_1 برابر یک می‌شود $\frac{w-w_1}{w_2-w_1} = 1$

نکته 36: نگاشت‌های خطی و معکوس خطوط یا دوایر را به خطوط یا دوایر تصویر می‌کنند بنابراین نگاشت موبیوس نیز خطوط یا دوایر را به خطوط یا دوایر تبدیل می‌کند. اگر خط یا دایره موردنظر از نقطه $z = -\frac{d}{c}$ عبور کند، تصویر آن یک خط می‌باشد و در غیر اینصورت تصویر آن دایره است.

نکته 37: در نگاشت موبیوس $w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ (θ دلخواه) دو حالت زیر را داریم.

الف) اگر نقطه‌ی z_0 بالای محور حقیقی قرار داشته باشد آنگاه نیم صفحه‌ی بالای محور حقیقی به درون دایره‌ی واحد و نیم صفحه‌ی پایین محور حقیقی به خارج دایره‌ی واحد تصویر می‌شود.

ب) اگر نقطه‌ی z_0 پایین محور حقیقی قرار داشته باشد آنگاه نیم‌صفحه‌ی پایین محور حقیقی به درون دایره‌ی واحد و نیم صفحه‌ی بالای محور حقیقی به خارج دایره‌ی واحد تصویر می‌شود. در دو حالت فوق تصویر یک ربع مختصات، درون یا خارج یک نیم‌دایره می‌باشد برای تعیین نیم‌دایره‌ی موردنظر می‌توانیم تصویر یک نقطه‌ی خاص را تعیین کنیم.

نکته 38:

الف) اگر نقطه‌ی z_0 داخل دایره‌ی واحد باشد آنگاه نگاشت $w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z\overline{z}_0 - 1}$، درون دایره واحد را به درون دایره واحد تصویر می‌کند.

ب) با فرض $ad-bc>0$، نگاشت $w=\frac{\quad}{cz+d}$، نیم‌صفحه‌ی بالای محور حقیقی را به نیم‌صفحه‌ی بالای محور حقیقی تصویر می‌کند.

ج) اگر نقطه‌ی z_0 پایین محور حقیقی باشد آنگاه نگاشت $w=\frac{zz_0-\bar{z}_0e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}$، داخل دایره‌ی واحد را به نیم‌صفحه‌ی بالای محور حقیقی تصویر می‌کند.

مثال ۳۶: نگاشت $w=2\frac{z-i}{z+i}$ نیم‌صفحه بالایی $(\operatorname{Im} z>0)$ را به صورت همدیس بر ناحیه‌ی زیر می‌نگارد

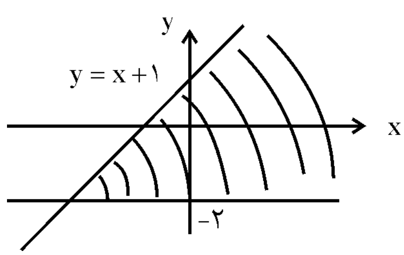
1) داخل دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد
2) خارج دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد
3) داخل دایره به مرکز مبدا و شعاع دو
4) خارج دایره به مرکز مبدا و شعاع دو

پاسخ: گزینه 3

$$w_1=\frac{z-i}{z+i}=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\Rightarrow \theta=0, z_0=i$$

چون $\mathbf{i}$ بالای محور حقیقی است بنابراین $\operatorname{Im} z>0$ به داخل دایره واحد تصویر می‌شود بنابراین تصویر ناشی از $w=2w_1=2\frac{z-i}{z+i}$، داخل دایره به مرکز مبدا و شعاع 2 می‌باشد.

مثال ۳۷: کدامیک از نگاشت‌های داده شده ناحیه‌ی زیر را بر روی نقاط داخلی دایره‌ی واحد تصویر می‌کند؟



1) $f(z)=\frac{z^4-(3+2i)}{-iz^4+2+3i}$
2) $f(z)=\frac{(z-3-2i)^4-i}{-i(z-3-2i)^4+1}$
3) $f(z)=\left[\frac{z-(3+2i)}{z+(3-2i)}\right]^4$
4) $f(z)=\frac{(z+3+2i)^4-i}{-i(z+3+2i)^4+1}$

پاسخ: گزینه 4

محل برخورد دو خط نقطه‌ی $A(-3,-2)$ می‌باشد ابتدا باید این نقطه را به مبدا انتقال دهیم بنابراین $w_1=z+3+2i$ (تا همین مرحله فقط گزینه 4 صحیح است)

با انتقال نقطه‌ی $\mathbf{A}$ به مبدا، $0<\arg w_1<\frac{\pi}{4}$ می‌باشد با نگاشت $w_2=w_1^4=(z+3+2i)^4$ به ناحیه‌ی $0<\arg w_2<\pi$ یعنی نیم‌صفحه‌ی بالایی می‌رسیم.

$$w = e^{i\theta}\frac{w_2 - i}{w_2 + i} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4 - i}{(z+3+2i)^4 + i}$$

θ دلخواه است آن را $\frac{\pi}{2}$ انتخاب می‌کنیم $(e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$:

$$f(z) = i\frac{(z+3+2i)^4 - i}{(z+3+2i)^4 + f} = \frac{(z+3+2i)^4 - i}{-i(z+3+2i)^4 + 1}$$

مثال ۳۸: تبدیل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که نقاط $z = 1, i, -1$ را به ترتیب به نقاط $w = i, 0, -i$ تبدیل می‌کند، ناحیـــه‌ی $|z| < 1$ را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند؟

1) $u > 0$ 2) $u < 0$ 3) $V > 0$ 4) $V < 0$

پاسخ: گزینه 1

$$\frac{w-i}{w+i}\frac{0+i}{0-i} = \frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1} \quad , \quad \frac{i+1}{i-1} = -i$$

$$\frac{w-i}{w+i} = i\frac{z-1}{z+1} = \frac{iz-i}{z+1} \Rightarrow (w-i)(z+1) = (w+i)(iz-i)$$

$$w = \frac{(i-1)z+i+1}{(1-i)z+i+1} = \frac{(i-1)(z-i)}{-(i-1)(z+i)} \Rightarrow w = -\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow z = i\frac{1-w}{1+w}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1-w}{1+w}\right| < 1 \Rightarrow |1-w| < |1+w|$$

$$|1-u-iv| < |1+u+iv| \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 < (1+u)^2 + v^2$$

$$-2u < 2u \Rightarrow u > 0$$

7) نگاشت جاکوفسکی $w = z + \frac{1}{z}$

$$z = re^{i\theta}, \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, w = u + iv$$

$$u + iv = r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - i\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\begin{cases} u = (r + \frac{1}{r})\cos\theta \\ v = (r - \frac{1}{r})\sin\theta \end{cases}$$

تصویر دایره‌ی $r = r_0 \neq 1$

$$u = (r_0 + \frac{1}{r_0})\cos\theta \ , \ v = (r_0 - \frac{1}{r_0})\sin\theta$$

$\frac{}{(r_0+\frac{1}{r_0})^2}+\frac{}{(r_0-\frac{1}{r_0})^2}=1$ بیضی افقی:

$a=r_0+\frac{1}{r_0} \quad , \; b=\left|r_0-\frac{1}{r_0}\right|$

کانون‌های بیضی: $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow c=2 \Rightarrow z=2, z=-2$

بنابراین تصویر دایره‌ای $r=r_0 \neq 1$، بیضی است که مرکز آن مبدا مختصات بوده و کانون‌های آن نقاط $z=\pm 2$ می‌باشد اگر شعاع دایره (r_0) افزایش یابد طول نیم‌قطرهای بیضی افزایش می‌یابد.

نکته 39:

الف) تصویر دایره واحد ($|z|=1$) توسط $w=z+\frac{1}{z}$، پاره‌خط $v=0, -2\le u\le 2$ می‌باشد.

ب) نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ در تمام صفحه به غیر از $z=\pm 1$، همدیس می‌باشد.

مثال ۳۹: خم c_1 با معادله $0\le\theta\le 2\pi, z=e^{i\theta}$، در صفحه xy به خم c_2 در صفحه uv توسط تبدیل $w=z+\frac{1}{z}$ نگاشته می‌شود. خم c_2 کدام است؟

1) قطعه خط $-1\le u\le 1$ بر محور افقی **u**

2) قطعه خط $-2\le u\le 2$ بر محور افقی **u**

3) دایره

4) بیضی

پاسخ: گزینه 2

خم c_1 همان دایره واحد می‌باشد بنابراین براساس نکته (39)، تصویر آن پاره‌خط افقی $v=0, -2\le u\le 2$ می‌باشد.

مثال ۴۰: نقاط ثابت در تبدیل $f(z)=\frac{z-1}{4z+1}$ چگونه‌اند؟

1) دو نقطه متمایز روی محور موهومی

2) یک نقطه در صفحه‌ی **xy**

3) یک نقطه روی محور حقیقی و یک نقطه روی محور موهومی

4) فاقد نقطه ثابت

پاسخ: گزینه 1

$$\frac{z-1}{4z+1}=z \Rightarrow 4z^2+z=z-1 \Rightarrow z^2=-\frac{1}{4} \Rightarrow z=\pm\frac{i}{2}$$

8) نگاشت نمایی $w=e^z$

مختصات دکارتی:

$z=x+iy \; , \; w=u+iv$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

در نگاشت $w = e^z$ مناسب‌تر است که **w** را در مختصات قطبی در نظر بگیریم:

$z = x + iy, w = Re^{i\phi}$

$Re^{i\phi} = e^{x+iy} \Rightarrow |w| = R = e^x, \arg(w) = \phi = y$

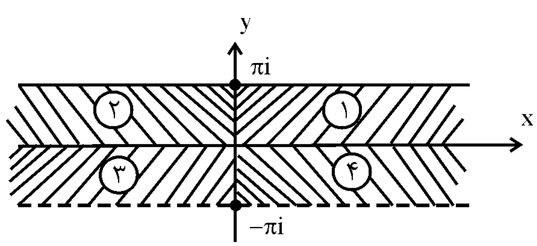
پاره‌خط قائم $x = x_0$، $-\pi < y \leq \pi$ به دایره‌ی $|w| = e^{x_0}$ تصویر می‌شود.

خط افقی $y = y_0$ به نیم‌خط $\arg(w) = y_0$ تصویر می‌شود.

نوار افقی $-\pi < y \leq \pi$ در صفحه‌ی **xy**، نوار اصلی نگاشت $w = e^z$ نامیده می‌شود.

$-\pi < y \leq \pi \Rightarrow -\pi < \arg(w) \leq \pi$

$-\infty < x < \infty \Rightarrow 0 < |w| < \infty$



بنابراین تصویر نوار اصلی $(-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi)$، کل صفحه‌ی **uv** غیر از نقطه‌ی $w = 0$ (مبدا) می‌باشد.

تصویر قسمت (1) $(x > 0, 0 < y < \pi)$، نیمه بالایی خارج دایره‌ی واحد $(0 < \arg(w) < \pi, |W| > 1)$ می‌باشد.

تصویر قسمت (2) $(x < 0, 0 < y < \pi)$، نیم‌دایره‌ی بالایی دایره‌ی واحد $(0 < \arg(w) < \pi$ و $|w| < 1)$ می‌باشد.

تصویر قسمت (3) $(x < 0, -\pi < y < 0)$، نیم‌دایره‌ی پایینی دایره‌ی واحد $(-\pi < \arg(w) < 0, |w| < 1)$ می‌باشد.

تصویر قسمت (4) $(x > 0, -\pi < y < 0)$، نیمه پایینی خارج دایره‌ی واحد $(-\pi < \arg(w) < 0, |w| > 1)$ می‌باشد.

تصویر خط $y = 0$، بخش مثبت محور حقیقی ($\arg(w) = 0$ یا $v = 0, u > 0$) و تصویر خط $y = \pi$، بخش منفی محور حقیقی ($\arg(w) = \pi$ یا $v = 0, u < 0$) می‌باشد.

تصویر پاره‌خط قائم $x = 0, -\pi < y \leq \pi$، دایره واحد $|w| = 1$ می‌باشد.

چون $w = e^z$ دارای دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشد بنابراین اگر نوار اصلی به اندازه‌ی 2π در راستای قائم انتقال یابد، نتایج فوق برای نوار افقی جدید نیز صادق است.

9) نگاشت لگاریتم $w = Lnz$

$z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$

$u + iv = \mathrm{Ln}r + i\theta, -\pi < \theta \le \pi$

$$\begin{cases} u = \mathrm{Ln}r \\ v = \theta \quad , -\pi < \theta \le \pi \end{cases}$$

این نگاشت دایره‌ی $|z| = r_0$ را به پاره‌خط قائم $u = \mathrm{Ln}r_0, -\pi < v \le \pi$ و نیم‌خط شعاعی $\arg(z) = \theta_0$ را به خط افقی $v = \theta_0$ تبدیل می‌کند.

نگاشت $w = \mathrm{Ln}z$، کل صفحه مختلط غیر از $z = 0$ را به نوار اصلی $(-\infty < u < \infty \ , \ -\pi < v \le \pi)$ تصویر می‌نماید.

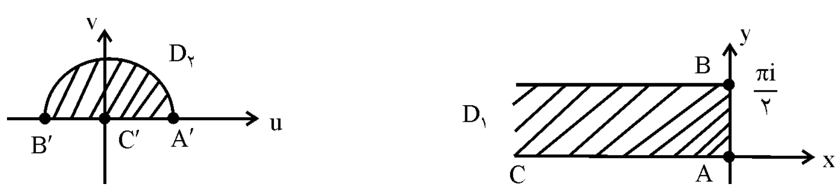
نکته 40:

الف) نگاشت $w = e^z$ در کل صفحه، همدیس است. نگاشت $w = \mathrm{Ln}z$ در نقاطی که تحلیلی است (کل صفحه غیر از نقاط $\mathrm{Re}(z) \le 0, \mathrm{Im}(z) = 0$)، همدیس می‌باشد.

ب) دامنه تعریف e^z کل صفحه و برد آن کل صفحه غیر از مبدا مختصات می‌باشد.

دامنه تعریف **Lnz** کل صفحه غیر از مبدا مختصات و برد آن نوار اصلی $(-\infty < u < \infty$ و $-\pi < v \le \pi)$ می‌باشد.

مثال ۴۱: تبدیلی که حوزه D_1 را به حوزه D_2 بصورت زیر می‌نگارد عبارتست از



1) $w = e^z$ 2) $w = z + \frac{1}{z}$ 3) $w = \frac{\pi i}{\pi i - 4z}$ 4) $w = e^{2z}$

پاسخ: گزینه 4

نوار $x < 0$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ توسط $w_1 = 2z$ به نوار $0 < \mathrm{Im}(w_1) < \pi$, $\mathrm{Re}(w_1) < 0$ تصویر می‌شود و این نوار توسط تابع نمایی $w = e^{w_1} = e^{2z}$ به ناحیه‌ی $|w| < 1$, $0 < \arg(w) < \pi$ یعنی به نیم‌دایره‌ی فوقانی دایره‌ی واحد تبدیل می‌گردد بنابراین $w = e^{2z}$، ناحیه‌ی D_1 را به D_2 تصویر می‌کند.

نگاشت، به ناحیه $u \geq 0\ ,\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ از صفحه W تصویر می‌شود؟

1) $|z| > 1\ ,\ 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ 2) $|z| \geq 1\ ,\ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ 3) $|z| \geq 1\ ,\ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ 4) $|z| \geq 0\ ,\ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه 3

$$w = 2Lnz = 2Lnr + 2i\theta = u + iv$$

$$u = 2Lnr , u \geq 0 \Rightarrow 2Lnr \geq 0 \Rightarrow r \geq 1 \Rightarrow |z| \geq 1$$

$$v = 2\theta , 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

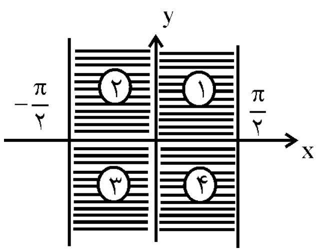
10) نگاشت $w = \sin z$

$$z = x + iy , w = u + iv$$

$$w = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sin hy \end{cases}$$

نوار قائم $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ در صفحه‌ی **xy** را به عنوان نوار اصلی $w = \sin z$ در نظر می‌گیریم.



نگاشت $w = \sin z$، نواحی (1)، (2)، (3) و (4) را به ترتیب به ربع اول، دوم، سوم و چهارم مختصات تصویر می‌کند.

اگر نوار $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ در نظر گرفته شود از رابطه‌ی $\sin z = -\sin(z - \pi)$ استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال برای تعیین تصویر نوار $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\ ,\ y \geq 0$، ابتدا نگاشت $z - \pi$، این نوار را به قسمت (1) در نوار اصلی $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ y \geq 0)$ تصویر می‌کند سپس نگاشت $\sin(z - \pi)$ آن را به ربع اول مختصات می‌نگارد و در نهایت نگاشت $\sin z = -\sin(z - \pi)$ قرینه‌ی ربع اول را نسبت به مبدا به دست می‌آورد بنابراین تصویر نهایی ربع سوم مختصات خواهد بود.

تصویر خط قائم $x = c , 0 < c < \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر می‌باشد:

$\{ v = \cos c \sinh y$

$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ هذلولی افقی: $(u > 0)$ شاخه سمت راست

کانون‌های هذلولی فوق نقاط $(-1,0)(1,0)$ می‌باشد.

تصویر خط قائم $x = c, -\frac{\pi}{2} < c < 0$، شاخه سمت چپ $(u < 0)$ هذلولی فوق می‌باشد.

تصویر پاره‌خط افقی $y = c > 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh c \\ v = \cos x \sinh c \ , \ V \ge 0 \end{cases}$$

نیمه فوقاني $(v \ge 0)$ بیضي افقي:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

با افزایش c، طول قطرهاي بیضي نیز افزایش مي‌یابد.

تصویر پاره‌خط افقي $y = c < 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، نیمه تحتاني $(v \le 0)$ بیضي فوق مي‌باشد.

کانون‌هاي بیضي، نقاط $(1,0)$, $(-1,0)$ مي‌باشد.

پاره‌خط $y = 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ به پاره‌خط $v = 0, -1 \le u \le 1$ تصویر مي‌گردد.

خطوط $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$ به ترتیب به نیم‌خط‌هاي $(v = 0, u \le -1)$, $(v = 0, u \ge 1)$ تصویر مي‌شوند.

۱۱) نگاشت‌هاي $w = \cos z, w = \sinh z, w = \cosh z, w = \tan z$

نگاشت‌های $\cos z$، $\sinh z$ و $\cosh z$ را به $\sin z$ براساس روابط زیر تبدیل می‌کنیم.

$$w = \sinh z = -i \sin(iz)$$

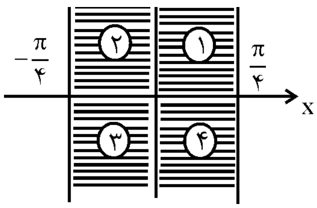
$$w = \cosh z = \cos(iz) = \sin(iz + \frac{\pi}{2})$$

$$w = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$$

براي بررسي نگاشت $w = \tan z$ از نگاشت‌هاي نمايي و موبیوس به صورت زیر استفاده مي‌کنیم

$$w = \tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

نکته 41: در نگاشت $w = \tan z$، نوار زیر را در نظر می‌گیریم $(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4})$ نواحی (1)، (2)، (3) و (4) در نوار مقابل بـه ترتیب به ربع اول، دوم، سوم و چهارم داخل دایره‌ی واحد تصویر می‌شوند



به عنوان مثال نوار $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $y \ge 0$ به ناحیه‌ی $|w| \le 1$, $0 \le \arg(w) \le \frac{\pi}{2}$ تصویر می‌شود.

نکته 42: نگاشت $w = \sin z$ در تمام صفحه مختلط به غیر از نقاط $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، همدیس می‌باشد.

مثال 43: تبدیل $w = \dfrac{i + \cos(\frac{\pi}{a} z)}{i - \cos(\frac{\pi}{a} z)}$ ناحیه‌ی نیم‌نوار $0 \le x \le a$, $y \ge 0$ را به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌کند؟ (کامپیوتر ـ 74)

1) نیم صفحه‌ی بالایی
2) نیم‌دایره بالای محور حقیقی
3) ناحیه‌ی خارج نیم‌دایره بالای محور حقیقی
4) قرص دایره واحد

پاسخ: گزینه ٤

$$\cos(\frac{\pi}{a} z) = -\sin(\frac{\pi}{a} z - \frac{\pi}{2})$$

$$w = \frac{i + w_2}{i - w_2}, w_2 = -\sin w_1 \ , \ w_1 = \frac{\pi}{a} z - \frac{\pi}{2}$$

نگاشت $w_1 = \frac{\pi}{a} z - \frac{\pi}{2}$، ناحیه‌ی $0 \le x \le a$, $y \ge 0$ را به ناحیه‌ی $-\frac{\pi}{2} \le u_1 \le \frac{\pi}{2}, v_1 \ge 0$ $(w_1 = u_1 + iv_1)$ تبدیل می‌کند این ناحیه، قسمت فوقانی نوار اصلی $\sin$ می‌باشد بنابراین توسط نگاشت $\sin w_1$ به نیم‌صفحه‌ی فوقانی صفحه و توسط $w_2 = -\sin w_1$ به نیم‌صفحه‌ی تحتانی صفحه تبدیل می‌گردد.

$$w = \frac{i + w_2}{i - w_2} = -\frac{w_2 + i}{w_2 - i}$$

نگاشت فوق مشابه نکته (37)$(z_0 = -i, \theta = \pi)$ پایین محور حقیقی) می‌باشد بنابراین نیم صفحه تحتانی را به داخل دایره‌ی واحد تصویر می‌کند.

تصویر نهایی داخل دایره‌ی واحد (قرص دایره واحد) می‌باشد.

مثال ۴۴: هرگاه $z=x+iy$ ، $w=u+iv$ ، آنگاه تحت نگاشت $w=\sin z$ خط $x=\frac{\pi}{4}$ به منحنی زیر در صفحه تبدیل می‌شود

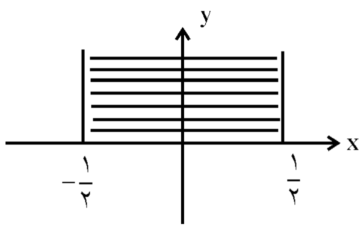
1) $u^2+v^2=\frac{1}{2}$ 2) $u^2+v^2=\frac{1}{4}$ 3) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ 4) $u^2-v^2=\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه 3

$$\begin{cases} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh y \quad ,u>0 \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh y \end{cases}$$

شاخه سمت راست هذلولي افقي: $\frac{u^2}{\frac{1}{2}}-\frac{v^2}{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}$

مثال ۴۵: ناحیه نشان داده شده در شکل از صفحه‌ی Z تحت نگاشت $w=(1+j)\sin(\pi z)$ به کدام ناحیه از صفحه‌ی مختلط w تبدیل می‌شود؟ $(w=u+iv)$



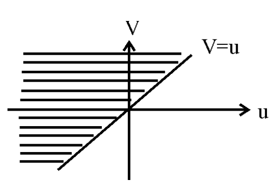
1) $v-u\geq 0$ 2) $u+v\geq 0$ 3) $v-u\leq 0$ 4) $v+u\leq 0$

پاسخ: گزینه 1

$w_1=\pi z\ ,\ w_2=\sin w_1\ \ ,\ w=(1+j)w_2$

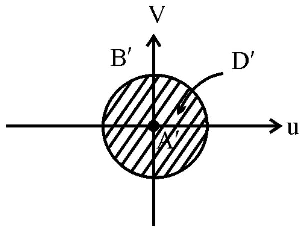
نگاشت $w_1=u_1+iv_1=\pi z$ ناحیه مشخص شده را به $-\frac{\pi}{2}\leq u_1\leq\frac{\pi}{2}$ و $v_1\geq 0$ تبدیل می‌کند و این ناحیه توسط $w_2=\sin w_1$ به نیم‌صفحه‌ی فوقانی صفحه‌ی w_2، تصویر می‌گردد.

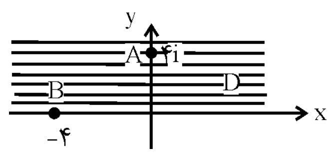
تحت نگاشت $w=(1+j)w_2$، نیم‌صفحه‌ی فوقانی فقط به اندازه‌ی $\arg(1+j)=\frac{\pi}{4}$ دوران می‌کند بنابراین:



$v\geq u\Rightarrow v-u\geq 0$

۱ـ تابع تحلیلی که حوزه‌ی D را به حوزه‌ی D' تبدیل کند به طوری که نقاط B, A مطابق شکل به نقاط B', A' دایره یکه تصویر شوند، کدام است؟





1) $w = \dfrac{z-i}{-iz+1}$ 2) $w = \dfrac{z+4i}{z-4i}$ 3) $w = -\dfrac{z^2+i}{iz^2+2}$ 4) $w = \dfrac{z-4i}{z+4i}$

۲ـ نگاشت $w = \mathrm{Ln}z$ ناحیه $\mathrm{Re}(z) > 0$ از صفحه z را به کدام ناحیه در صفحه w تبدیل می‌کند.

1) $\mathrm{Im}(w) > 0$ 2) $\mathrm{Im}(w) < 0$ 3) $0 < \mathrm{Im}(w) < \pi$ 4) $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(w) < \dfrac{\pi}{2}$

۳ـ نگاشت $w = (1+i)z$ کدام ویژگی را دارد؟

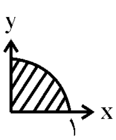
1) ابعاد را 2 برابر می‌کند و شکل را $\dfrac{\pi}{4}$ دوران می‌دهد

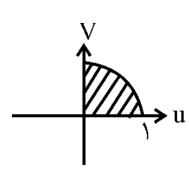
2) ابعاد را $\sqrt{2}$ برابر می‌کند و شکل را $-\dfrac{\pi}{4}$ دوران می‌دهد

3) ابعاد را $\sqrt{2}$ برابر می‌کند و شکل را $\dfrac{\pi}{4}$ دوران می‌دهد

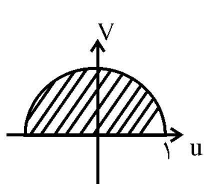
4ـ ابعاد را 2 برابر می‌کند و شکل را $-\dfrac{\pi}{4}$ دوران می‌دهد

۴) نگاشت ناحیه زیر تحت تابع $f(z) = z^2$ کدام است؟

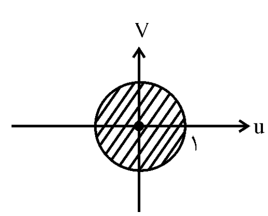




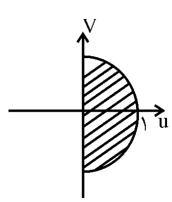
(1



(2



(3

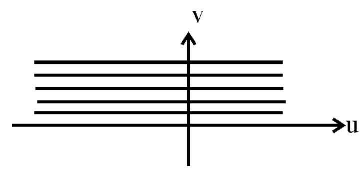


(4

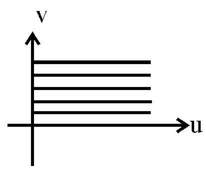
w تصویر می‌کند کدام است؟

1) $w=\frac{z+1}{z-i}$ 2) $w=\sqrt{2}\frac{z+1}{z-i}$ 3) $w=\frac{z-i}{z+1}$ 4) $w=\frac{1}{2}\frac{z+1}{z-i}$

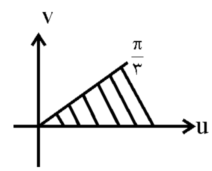
۶ـ نگاشت $w=z^{\frac{1}{3}}$ ناحیه $0\le\theta\le\pi$ را روی کدام ناحیه می‌نگارد؟



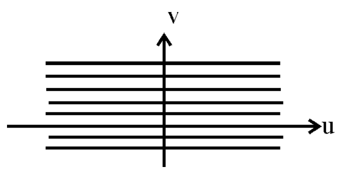
(1



(2

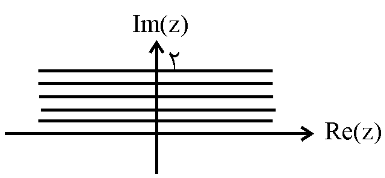


(3



(4

۷ـ ناحیه‌ی هاشورزده شده در صفحه z، $(0<\operatorname{Im}(z)<2)$ با نگاشت $w=e^{\frac{\pi z}{2}}$ به کدام ناحیه از صفحه مختلط w تبدیل می‌شود؟



1) $\operatorname{Im}(w)<0$ 2) $\operatorname{Im}(w)>0$ 3) $\operatorname{Re}(w)>0$ 4) $\operatorname{Re}(w)<0$

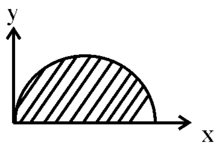
۸ـ نوار عمودی $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $y\ge 0$ تحت تبدیل $w=\sin z$ به چه ناحیه‌ای در صفحه (u,v) تبدیل می‌شود؟

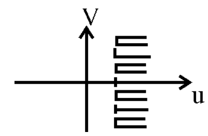
1) نیم‌صفحه‌ی پایینی 2) نیم‌صفحه‌ی فوقانی 3) ربع اول 4) ربع اول و سوم

۹ـ نگاشت $w=1+z^2$، خط $x=1$ از صفحه z را در صفحه w به چه منحنی تبدیل می‌کند؟

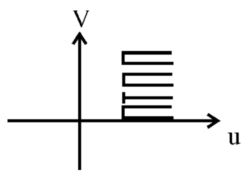
1) $v^2=4(2+u)$ 2) $v^2=4(2-u)$ 3) $v^2=2(2-u)$ 4) $v^2=2(2+u)$

۱۰ـ مبدل نقاط داخل نیم‌دایره با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟

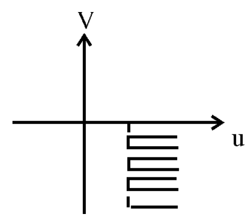




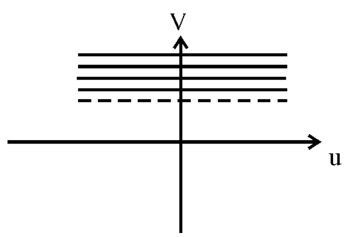
(1



(2

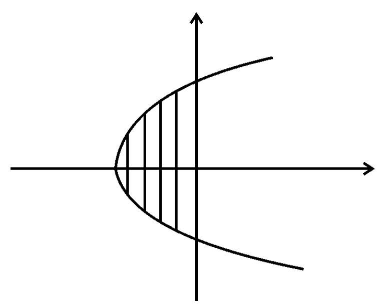


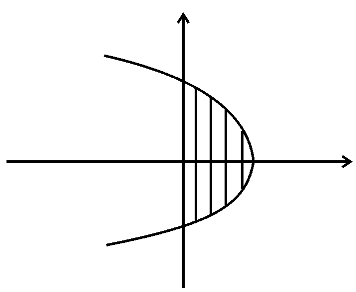
(3

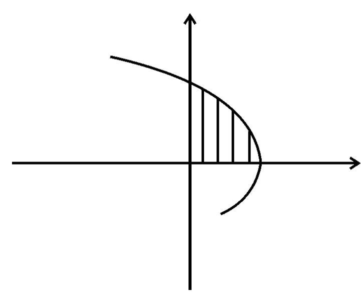


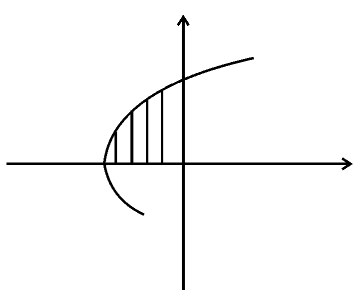
(4

۱۱ـ مبدل مثلث محدود به سه خط $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$ با تبدیل $w = z^2$ کدام ناحیه است؟

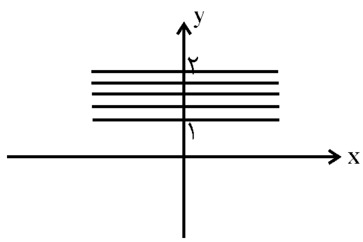

(1

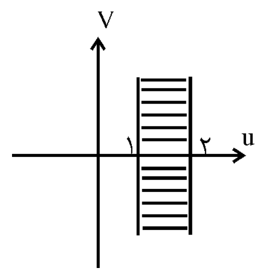

(2


(3

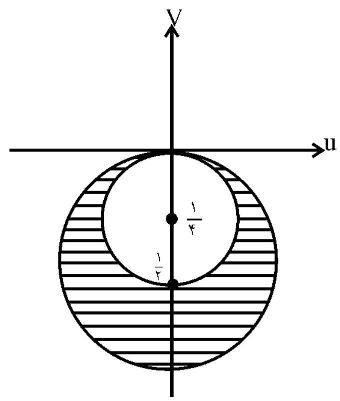

(4

۱۲ـ تصویر ناحیه هاشورخورده‌ی زیر تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ مطابق با کدام شکل است؟

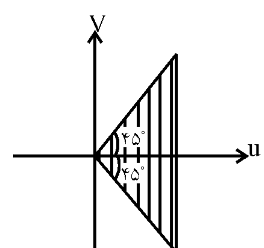




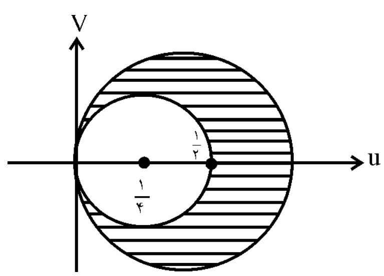
(1



(2



(3



(4

۱۳ـ با کدام تبدیل می‌توان ناحیه $D=\{(x,y); y\le 0\}$ از صفحه‌ی Z را به درون دایره یکه به مرکز مبـدا تصـویر کرد؟

1) $w=e^{i\theta}\frac{z^2-i}{z^2+i}$ 2) $w=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$ 3) $w=e^{i\theta}\frac{z^2+i}{z^2-i}$ 4) $w=e^{i\theta}\frac{z+i}{z-i}$

۱۴ـ تصویر ناحیه‌ی $y>0$ از صفحه $(z=x+iy)$ تحت نگاشت $w=\ln\frac{z-1}{z+1}$ کدام گزینه است؟ $(w=u+iv)$

1) نوار $0<v<\pi$ 2) نوار $0<v<\frac{\pi}{2}$ 3) ناحیه‌ی $u<0, v>0$ 4) ناحیه‌ی $u>0, v>0$

۱۵ـ نگاشت $w=\tan z$ نوار عمودی $|x|<\frac{\pi}{4}$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

1) $|w|<1$ 2) $\mathrm{Re}(w)>0$ 3) $\mathrm{Re}(w)<0$ 4) $\mathrm{Im}(w)>0$

۱۶ـ نگاشت $\dfrac{\ \ }{z+1}$ = w ناحیه‌ی $\operatorname{Re}(z) > 0$ را به کدام ناحیه می‌نگارد؟

1) $\operatorname{Im}(w) > 0$　2) $\operatorname{Re}(w) > 0$　3) $|w| > 1$　4) $|w| < 1$

۱۷ـ تصویر مجموعه $D = \left\{(x, y)\ ;\ 1 \le x \le 2, \frac{\pi}{2} \le y \le \pi\right\}$ **تحت نگاشت** e^z **کدام مجموعه است؟**

1) $\left\{re^{i\theta}, 1 \le r \le 2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}$　2) $\left\{re^{i\theta}, e \le r \le e^2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}$

3) $\left\{re^{i\theta}, e \le r \le e^2\right\}$　4) $\left\{re^{i\theta}, e \le r \le e^2, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$

۱۸ـ تصویر ناحیه بین دو دایره $|z-1| = 1$, $|z-i| = 1$ **توسط نگاشت** $w = \frac{i}{z}$ **عبارت است از:**

1) $v < \frac{1}{2}, u > \frac{1}{2}$　2) $v > \frac{1}{2}, u > \frac{1}{2}$　3) $v > \frac{1}{2}, u < \frac{1}{2}$　4) $v < \frac{1}{2}, u < \frac{1}{2}$

۱۹ـ نگاشت $w = (1+i)\cos \pi z$ **، نیم‌نوار** $(0 \le x \le 1\ ,\ y \ge 0)$ **از صفحه‌ی z را به چه ناحیه‌ای در صفحه** w **تبدیل می‌کند؟**

1) $u - v \ge 0$　2) $u - v \le 0$　3) $u + v \ge 0$　4) $u + v \le 0$

۲۰ـ ناحیه‌ی $\left\{z : \frac{\pi}{2} \le \operatorname{Re}(z) \le \pi\ ,\ \operatorname{Im}(z) \ge 0\right\}$ **از صفحه‌ی مختلط z تحت نگاشت** $w = -\cos z$ **به کدام ناحیه در صفحه‌ی مختلط W تصویر می‌شود؟**

1) ربع چهارم　2) ربع سوم　3) ربع دوم　4) ربع اول

۲۱ـ تبدیل $W = T(z) = k\frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$ **مفروض است که در آن** K, $z_0 \ne 0$ **ثابت‌اند و** $|z_0| < 1, |K| = 1$**. این تبدیل داخل دایره به مرکز 0 و به شعاع واحد در صفحه z را می‌نگارد (تصویر می‌کند) بر:**

1) یک نیم‌صفحه در صفحه مختلط **W**

2) درون دایره به مرکز 1 و به شعاع $|z_0|$

3) درون دایره به مرکز 0 و به شعاع $\frac{1}{|z_0|}$ در صفحه مختلط W

4) درون دایره به مرکز 0 و به شعاع واحد در صفحه مختلط W

۲۲ـ تصویر دایره‌ی $|z| = R$ $(R \ne 1)$ **تحت نگاشت** $w = z + \frac{1}{z}$ **عبارت است از:**

1) دایره　2) هذلولی　3) یک بیضی　4) خط مستقیم

۲۳ــ کدام نگاشت موبیوس نقاط $\infty,1,0$ را به ترتیب به نقاط $0,\frac{}{2},1$ می‌نگارد:

1) $\frac{i}{z+i}$ 2) $\frac{-i}{z-i}$ 3) $\frac{iz+2}{iz+1}-1$ 4) $\frac{iz+2}{iz+i}-1$

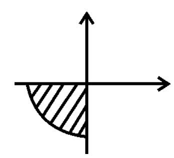
۲۴ــ تصویر دایره $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{1}{z}$ کدام است؟

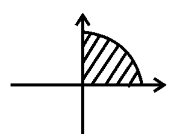
1) $v=u+\frac{1}{2}$ 2) $u+v+\frac{1}{2}=0$ 3) $(u+1)^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}$ 4) $(u-1)^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}$

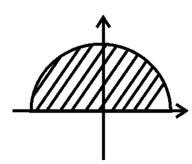
۲۵ــ نگاشت $w=\frac{z-1}{z-2}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=3$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟

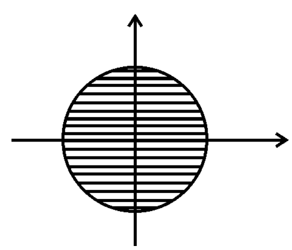
1) خطی موازی محور مختلط
2) یک دایره که از مبدا مختصات می‌گذرد
3) یک دایره که از مبدا مختصات نمی‌گذرد
4) خطی که از مبدا مختصات می‌گذرد

۲۶ــ نگاشت e^z ناحیه $\left\{z : Re(z) \le 0, 0 \le Im(z) \le \frac{\pi}{2}\right\}$ را به کدام ناحیه زیر تصویر می‌کند؟

1) 

2) 

3) 

4) 

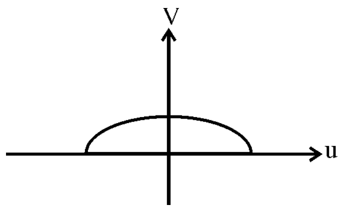
۲۷ــ تصویر خط $y=\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w=\cosh z$ کدام است؟ $(w=u+jv)$

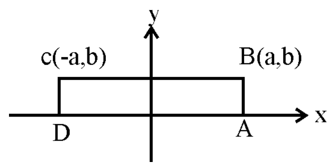
1) $u^2-v^2=1$ 2) $v^2-u^2=1$ 3) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ 4) $v^2-u^2=\frac{1}{2}$

۲۸ــ تصویر سهمی $y=x^2$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟ $(w=u+iv, z=x+iy)$

1) $v(u^2+v^2)=-u$ 2) $v(u+v)=-u$ 3) $v(u^2+v^2)=u^2$ 4) $v(u^2+v^2)=-u^2$

ناحیه درون نیمه بالایی یک قرص بیضوی. مقدار ثابت a چیست؟





1) $-\frac{\pi}{2}$ 2) 1 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) π

۳۰ـ کدام تبدیل نوار محدود به $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ و $y \ge 0$ را به درون قرص واحد می‌نگارد؟

1) $w = \frac{\sin^2 z + 2i + 1}{\sin^2 z - 2i + 1}$ 2) $w = \frac{\sin^2 z - 2i + 1}{\sin^2 z + 2i + 1}$ 3) $w = \frac{\sin^2 z - 2i + 1}{\sin^2 z - 2i - 1}$ 4) $w = \frac{\cos^2 z + 2i - 1}{\cos^2 z - 2i + 1}$

۳۱ـ تصویر ناحیه‌ی $\frac{1}{2} < |z| < \sqrt{2}$ تحت نگاشت $w = z^2$ عبارتست از ناحیه‌ی:

1) $\frac{1}{4} < |w| < 2$ 2) $-\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} < |w| < 2$ 4) $\frac{\pi}{2} < \arg w < \pi$

۳۲ـ نگاشت $w = \frac{2iz - 1}{z + 2i}$ چه نقاطی را ثابت نگه می‌دارد؟

1) $z = -1 + i$ 2) $z = 1 - i$ 3) $z = 1 + i$ 4) $z = mi$

۳۳ـ ناحیه قطاعی $r \le 2$ و $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ از صفحه‌ی Z را با نگاشت $w = z^2$ تبدیل می‌کنیم مساحت شکل حاصل از تبدیل در صفحه‌ی W برابر است با:

1) $\frac{4\pi}{3}$ 2) $\frac{8\pi}{3}$ 3) $\frac{16\pi}{3}$ 4) $\frac{32\pi}{3}$

۳۴ـ تصویر خط $x = \frac{\pi}{6}$ تحت نگاشت $w = \sin z$ کدام است؟

1) خط 2) بیضی 3) دایره 4) هذلولی

۳۵ـ تحت نگاشت $w = z^K + \frac{1}{z^k}$ دایره‌ی $|z| = d$ به چه شکلی تبدیل می‌شود؟ (k عدد طبیعی و $d > 1$)

1) یک هذلولی با کانون‌های $w = \pm 2$

2) یک هذلولی با کانون‌های $w = -2^k , w = 2^k$

3) یک بیضی با کانون‌های $w = \pm 2$

4) یک بیضی با کانون‌های $w = -2^k , w = 2^k$

۳۶ـ تحت تبدیل $w = \dfrac{\quad}{3z}$ چه نقاطی ثابت می‌مانند؟

1) $\pm\frac{1}{2}(1-i)$ 2) $\pm\frac{1}{2}(1+i)$ 3) $\pm\sqrt{2}(1-i)$ 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

۳۷ـ تحت نگاشت $w = f(z) = \frac{1}{z}$ تصویر خط $2y+3x-1=0$ عبارت است از:

1) دایره‌ای که مبدا خارج از آن قرار دارد
2) دایره‌ای که از مبدا می‌گذرد
3) دایره‌ای که مبدا درون آن قرار دارد
4) هیچکدام

۳۸ـ به ازای کدام ثابت a تبدیل $w = T(z) = \frac{az-1}{z+a}$ یک تبدیل خطی کسری است؟

در این صورت نقطه (یا نقاط) ثابت تبدیل معکوس کدام‌اند؟

1) $z_0 = \pm i\ ,\ a \neq \pm i$ 2) $z_0 = \pm 1\ ,\ a \neq \pm i$ 3) $z_0 = \pm i\ ,\ a = \pm i$ 4) $a \neq \pm i$ و نقطه ثابت ندارد

۳۹ـ کدام یک از تبدیل‌های زیر نوار $(-\infty < x < \infty, 0 \le y \le \frac{\pi}{2})$ را به درون قرص واحد می‌نگارد؟

1) $\frac{e^z - i}{e^z + i}$ 2) $\frac{e^z + 2i}{e^z - 2i}$ 3) $\frac{e^{2z} + 2 - i}{e^{2z} + 2 + i}$ 4) $\frac{e^{2z} - 2 + i}{e^{2z} + 2 + i}$

۴۰ـ کدام یک از نگاشت‌های زیر ناحیه‌ی $\left\{|x| < \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 < y < \infty\right\}$ را بر داخل دایره‌ی به شعاع ۲ و مرکز $2+i$ تصویر می‌کند؟

1) $\frac{2\sin z - i}{\sin z + i} + 2 + i$ 2) $\frac{2\sin z - 2i}{\sin z + i} + 2 + i$ 3) $\frac{2\text{Ln}z - 2i}{\text{Ln}z + i} + 2 + i$ 4) $\frac{2\text{Ln}z - i}{\text{Ln}z + i} + 2 + i$

۴۱ـ تصویر دایره $|z-i| = 1$ تحت نگاشت $w = u + iv = \frac{i}{z}$ کدام است؟

1) $v = \frac{1}{2}$ 2) $u = \frac{1}{2}$ 3) $u = -\frac{1}{2}$ 4) $v = -\frac{1}{2}$

۴۲ـ تبدیل $w = \frac{i(z-i)}{z+i}$ نیم صفحه بالایی در صفحه‌ی Z ها را به کدام ناحیه در صفحه w ها می‌نگارد؟

1) درون دایره یکه   2) نیم صفحه‌ی بالایی   3) نیم‌صفحه‌ی پایینی   4) نیم‌صفحه‌ی راست

۴۳ـ تصویر ناحیه‌ی $\{z \in C : |z-1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ تحت تبدیل $w = \frac{[illegible]}{z-2}$ کدام یک از نواحی زیر است؟

1) ربع اول   2) ربع دوم   3) ربع سوم   4) ربع چهارم

۴۴ـ نگاشت $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$، دایره $|z| = 2$ را بر کدام یک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟

1) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$

2) یک بیضی که قطر آن موازی محورها نیست.

3) یک بیضی که قطر کوچک آن موازی محور حقیقی است.

4) یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

۴۵ـ نگاشت $w = \cos \pi z$، نیم نوار $0 \le x \le 1$, $y \ge 0$ از صفحه‌ی z را به چه ناحیه‌ای از صفحه‌ی w تبدیل می‌کند؟

1) $y \le 0$ 2) $x \le 0$ 3) $y \ge 0$ 4) $x \ge 0$

۴۶ـ تصویر دایره‌ای $x^2 + y^2 - ax = 0$ ($a \ne 0$ ثابت) تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ (از صفحه $z = x + iy$ به صفحه $w = u + iv$)، کدام است؟

1) $u^2 + v^2 - au = 0$ 2) $u = \frac{1}{a}$ 3) $v = a$ 4) $u^2 + v^2 + av = 0$

۴۷ـ خط $y = \frac{x}{2}$ از صفحه‌ی مختلط z، $(z = x + iy)$ تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$، به کدام منحنی در صفحه‌ی W، $(w = u + iv)$ تبدیل می‌شود؟

1) $v = -2u$ 2) $v = \frac{1}{2}u$ 3) $v = 2u$ 4) $v = -\frac{1}{2}u$

۴۸ـ تحت تبدیل $w = f(z) = \frac{z^2 + 2i}{3z}$ چه نقاطی ثابت می‌مانند؟

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

۴۹ـ کدام خانواده از دایره‌ها بیانگر نگاشت خطوط موازی $y = x + c$ (در صفحه zها) تحت تابع $w = \frac{1}{z}$ هستند؟

1) $c(u^2+v^2)+u+v=c^2$ 2) $u^2+v^2+c(u+v)=c^2$

3) $c(u^2+v^2)+u+v=0$ 4) هیچکدام

۵۰ـ تصویر ناحیه‌ی $|z-1|<1$ توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ عبارتست از:

1) $|w-1|\le 1$ 2) $v>\frac{1}{2}$ 3) $u^2+v^2\le 1$ 4) $u\ge\frac{1}{2}$

۵۱ـ خط $x=a$، $0<a<\frac{\pi}{2}$ ثابت و خط $x=\frac{\pi}{2}$ در صفحه xy توسط تبدیل $W=\sin z$ نگاشته می‌شوند به $(w=u+iv)$

1) $(\frac{u}{\sin a})^2-(\frac{v}{\cos a})^2=1$، و خط $v=0$ در صفحه w

2) $(\frac{u}{\cosh a})^2-(\frac{v}{\sinh a})^2=1$ و نیم‌خط $v=0$، $u\ge 1$ در صفحه w

3) $(\frac{u}{\sin a})^2+(\frac{v}{\cos a})^2=1$، و نیم‌خط $v=0$، $u\ge 1$ در صفحه w

4) شاخه راست هذلولی $(\frac{u}{\sin a})^2-(\frac{v}{\cos a})^2=1$ و نیم‌خط $v=0$، $u\ge 1$ در صفحه w

۵۲ـ نگاشت $w=\frac{z-1}{z-2}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=3$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟

1) دایره‌ای که مرکز آن مبدا مختصات است   2) خطی که از مبدا مختصات می‌گذرد

3) دایره‌ای که از مبدا مختصات می‌گذرد   4) خطی موازی محور مختلط

۵۳ـ کدام تبدیل، دیسک $|z|<2$ را روی ناحیه $u+v<0$ تصویر می‌کند؟

1) $w=e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{z-2i}{z+2i}$ 2) $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z+2i}{z-2i}$ 3) $w=e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{z+2i}{z-2i}$ 4) $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z-2i}{z+2i}$

۵۴ـ ناحیه $\mathrm{Im}(z)\le 1$ از صفحه Z تحت نگاشت وارونی $(w=\frac{1}{z})$ در صفحه W به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

1) $\left|w-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ 2) $\left|w-\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ 3) $\left|w+\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ 4) $\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$

۵۵ـ تصویر خط $x = \frac{\pi}{4}$ در صفحه z تحت نگاشت $w = u + iv = \sin z$ کدام است؟

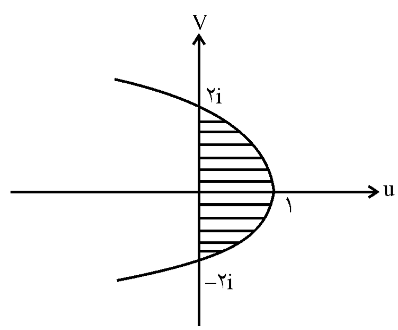
1) قسمتی از هذلولی $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ که در ربع دوم قرار دارد

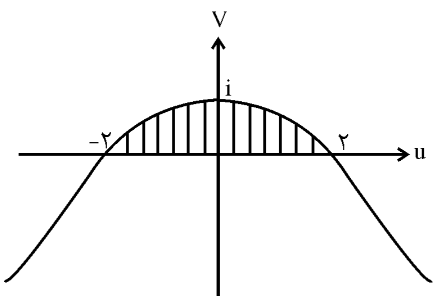
2) شاخه سمت راست هذلولی $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$

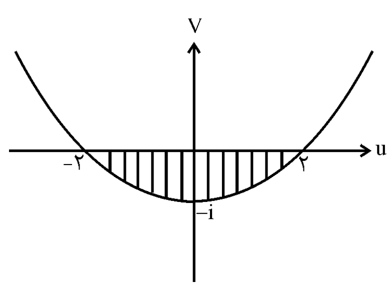
3) قسمتی از هذلولی $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ که در ربع چهارم قرار دارد

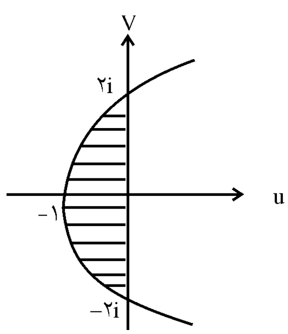
4) شاخه سمت چپ هذلولی $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$

۵۶ـ تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = 1, y = \pm x$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟

1)


2)


3)


4)


۵۷ـ فرض کنید $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ در اینصورت تابع f خطوطی را که از مبدا می‌گذرد به کدام یک از شکل‌های زیر تصویر می‌کند؟

1) خط یا دایره
2) دایره
3) خط
4) هذلولی یا جزئی از یک خط

[illegible]) پاسخ تست

1) گزینه 4

براساس نکته (37) تبدیل $w = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ اگر $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ باشد، نیم‌صفحه‌ی فوقانی را به داخل دایره واحد تصویر می‌کنـد

بنابراین با انتخاب $z_0 = 4i\ ,\ \theta = 0$:

$$w = \frac{z - 4i}{z + 4i}$$

2) گزینه 4

$$w = \ln z = \ln r + i\theta$$

$$\mathrm{Re}(z) > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(w) < \frac{\pi}{2}$$

3) گزینه 3

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\ ,\ z = |z|e^{i\arg(z)}$$

$$w = \sqrt{2}|z|e^{i(\arg(z) + \frac{\pi}{4})}$$

4) گزینه 2

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow w = z^2 = r^2e^{i2\theta} \Rightarrow |w| = r^2, \arg(w) = 2\theta$$

ناحیه موردنظر: $\left\{z = re^{i\theta}\ \ ,\ r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

تصویر: $\left\{w\ ,\ |w| \le 1, 0 \le \arg(w) \le \pi\right\}$

تصویر، نیم‌دایره‌ی فوقانی دایره واحد است.

5) گزینه 1

$$\frac{w - w_1}{w - w_3}\ \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3}\ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$$w_2 = \infty \Rightarrow \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = 1 \Rightarrow \frac{w - 0}{w - 2 - i} = \frac{z + 1}{z - 1 - i}.\frac{i - 1 - i}{i + 1}$$

$$w = \frac{(2 + i)(z + 1)}{(2 + i)z + 1 - 2i} \Rightarrow w = \frac{z + 1}{z - i}$$

6) گزینه 3

مقدار اصلی $z^{\frac{1}{3}}$: $z = re^{i\theta} \Rightarrow w = \sqrt[3]{r}\, e^{\frac{i\theta}{3}}$

$$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow \qquad 0 \le \arg(w) \le \frac{\pi}{3}$$

7) گزینه 2

$$w_1 = \frac{\pi}{2} z = u_1 + iv_1 \,, \quad w = e^{w_1} = e^{\frac{\pi}{2} z}$$

$$0 < \mathrm{Im}(z) < 2, -\infty < \mathrm{Re}(z) < \infty \Rightarrow -\infty < u_1 < \infty \,,\, 0 < V_1 < \pi$$

تصویر نوار فوق توسط تابع نمایی $w = e^{w_1}$:

$$e^{-\infty} < |w| < e^{\infty} \,,\, 0 < \arg(w) < \pi \Rightarrow 0 < |w| < \infty \,,\; 0 < \arg(w) < \pi$$

بنابراین تصویر نهایی، نیم‌صفحه‌ی فوقانی صفحه‌ی w یعنی $\mathrm{Im}(w) > 0$ می‌باشد.

8) گزینه 2

نوار $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y \ge 0$، نیمه‌ی فوقانی نوار اصلی $w = \sin z$ می‌باشد که به نیم صفحه‌ی فوقانی (رفع اول و دوم) تصویر می‌گردد.

9) گزینه 2

$$w = 1 + z^2 = 1 + x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$x = 1 \Rightarrow w = 2 - y^2 + 2iy$$

$$\begin{cases} u = 2 - y^2 \\ v = 2y \Rightarrow y^2 = \dfrac{v^2}{4} \Rightarrow u = 2 - \dfrac{v^2}{4} \Rightarrow v^2 = 4(2-u) \end{cases}$$

10) گزینه 3

اگر مرکز دایره را $z = 1$ فرض کنیم، ناحیه‌ی موردنظر به صورت زیر است:

$$|z-1| < 1 \,,\, \mathrm{Im}(z) > 0$$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow \left|\frac{1}{w} - 1\right| < 1 \Rightarrow |1-w| < |w|$$

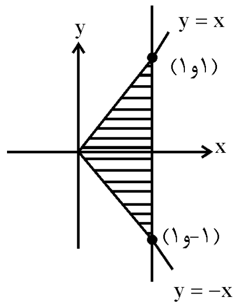
$$|1-u-iv| < |u+iv| \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 < u^2 + v^2 \Rightarrow u > \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2} \Rightarrow y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$y > 0 \Rightarrow v < 0$$

تصوی ناحیه‌ی $v<0,u>\frac{}{2}$ می‌باشد.

11) گزینه 2



$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u = x^2 - y^2 , v = 2xy$$

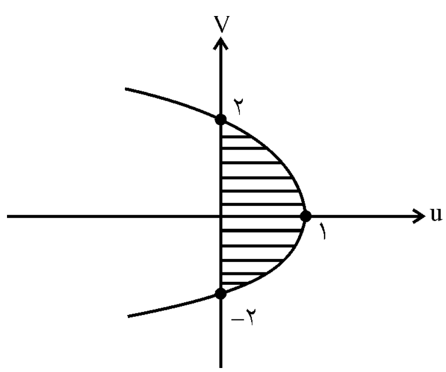
$$y = x ,\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow u = 0 , v = 2x^2 \Rightarrow u = 0 ,\ 0 \le v \le 2$$

$$y = -x ,\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow u = 0 , v = -2x^2 \Rightarrow u = 0 ,\ -2 \le v \le 0$$

بنابراین تصویر دو پاره‌خط فوق پاره‌خط $u=0, -2 \le v \le 2$ واقع بر محور موهومی می‌باشد.

$$x = 1 ,\ -1 \le y \le 1 \Rightarrow u = 1 - y^2 ,\ v = 2y$$

$$v = 2y \Rightarrow\ , y = \frac{v}{2} \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} ,\ -2 \le v \le 2$$



12) گزینه 2

تصویر $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ تحت $w=\frac{1}{z}$، $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$ می‌باشد.

$$y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow -(u^2+v^2) - v = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 + v = 0$$

$$u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

دایره به مرکز $(0, -\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

$y = 2 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow 2(u^2 + v^2) + v = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 + \frac{1}{2}v = 0$

$u^2 + (v + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$: دایره به مرکز $(0, -\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$

بنابراین ناحیه‌ی $1 \leq y \leq 2$ به سطح بین دو دایره‌ی فوق تصویر می‌گردد.

13) گزینه 4

نگاشت $w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ با فرض $Im(z_0) < 0$، نیم‌صفحه‌ی تحتانی را به داخل دایره واحد تصویر می‌کند.

$$z_0 = -i, Im(-i) < 0 \Rightarrow w = e^{i\theta}\frac{z + i}{z - i}$$

14) گزینه 1

$$w = Ln\, w_1 , w_1 = u_1 + iv_1 = \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$w_1 = \frac{z - 1}{z + 1} \Rightarrow z = \frac{1 + w_1}{1 - w_1} = \frac{1 + u_1 + iv_1}{1 - u_1 - iv_1} = \frac{1 - u_1^2 - v_1^2 + 2iv_1}{(1 - u_1)^2 + v_1^2} = x + iy$$

$$y = \frac{2v_1}{(1 - u_1)^2 + v_1^2}, y > 0 \Rightarrow v_1 > 0 \Rightarrow 0 < \arg(w_1) < \pi, 0 < |w_1| < \infty$$

$$w = Lnw_1 = Ln|w_1| + i\arg(w_1) \Rightarrow u = Ln|w_1|, v = \arg(w_1)$$

$$0 < |w_1| < \infty \Rightarrow -\infty < u < \infty$$
$$0 < \arg(w_1) < \pi \Rightarrow 0 < v < \pi$$

بنابراین تصویر نهایی نوار افقی $0 < v < \pi$ در صفحه‌ی w می‌باشد.

15) گزینه 1

براساس نکته (41)، نوار عمودی $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ تحت $w = \tan z$، به داخل دایره واحد $(|w| < 1)$ تصویر می‌شود.

16) گزینه 4

$$w = \frac{-iz + i}{z + 1} \Rightarrow z = \frac{i - w}{i + w} = \frac{i - u - iv}{i + u + iv}$$

$$z = \frac{(-u + i(1 - v))(u - i(1 + v))}{u^2 + (1 + v)^2} \Rightarrow Re(z) = \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + (1 + v)^2}$$

$$Re(z) > 0 \Rightarrow 1 - u^2 - v^2 > 0 \Rightarrow u^2 + v^2 < 1 \Rightarrow |w| < 1$$

17) گزینه 2

$$w = e^x.e^{iy} \quad , \quad w = re^{i\theta} \Rightarrow r = e^x \ , \theta = y$$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow e \le r \le e^2$

$$\frac{\pi}{2} \le y \le \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

بنابراین تصویر به صورت $\left\{re^{i\theta}, e \le r \le e^2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}$ می‌باشد.

18) گزینه 2

$$|z-1|<1, z=\frac{i}{w} \Rightarrow \left|\frac{i}{w}-1\right|<1 \Rightarrow |i-w|<|w|$$

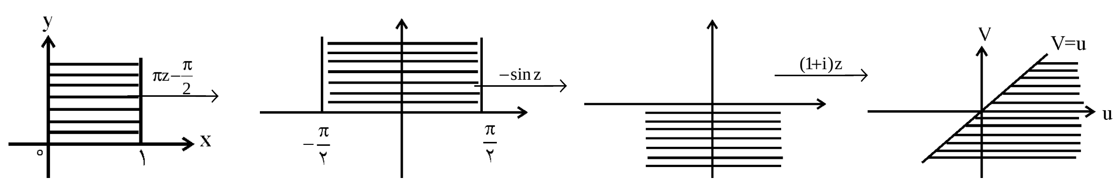
$$|i-u-iv|<|u+iv| \Rightarrow u^2+(1-v)^2<u^2+v^2 \Rightarrow v>\frac{1}{2}$$

$$|z-i|<1, z=\frac{i}{w} \Rightarrow \left|\frac{i}{w}-i\right|<1 \Rightarrow |1-w|<|w|$$

$$|1-u-iv|<|u+iv| \Rightarrow (1-u)^2+v^2<u^2+v^2 \Rightarrow u>\frac{1}{2}$$

19) گزینه 1

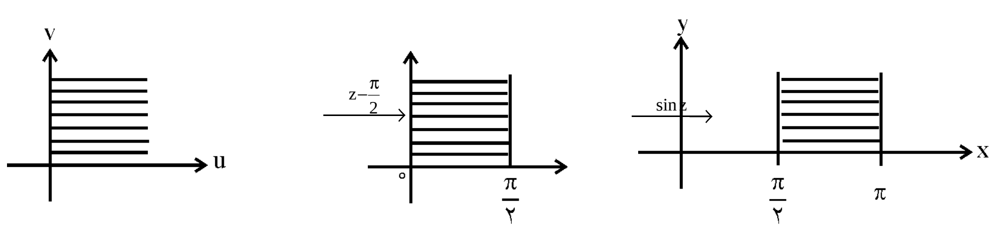
$$w=(1+i)\cos\pi z=-(1+i)\sin(\pi z-\frac{\pi}{2})$$



بنابراین تصویر نهایی $v \le u$ یا $u-v \ge 0$ می‌باشد.

20) گزینه 4

$$w=-\cos z=-\sin(\frac{\pi}{2}-z)=\sin(z-\frac{\pi}{2})$$



21) گزینه 4

براساس نکته (38)؛ نگاشت $|z_0|<1$, $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$، ناحیه درون دایره واحد را به درون دایره واحد تصویر می‌کند.

$\overline{z}_0 z-1 \qquad \overline{z}_0 z-1$

22) گزینه 3

تصویر دایره‌ی $|z|=R$ $(R\neq 1)$ تحت نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ بیضی با معادله‌ی زیر می‌باشد.

$$\frac{u^2}{(R+\frac{1}{R})^2}+\frac{v^2}{(R-\frac{1}{R})^2}=1$$

23) گزینه 2

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}.\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}.\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$z_3=\infty \Rightarrow \frac{z_2-z_3}{z-z_3}=1 \Rightarrow \frac{w-1}{w-0}\,\frac{\frac{1-i}{2}-0}{\frac{1-i}{2}-1}=\frac{z-0}{1-0} \Rightarrow w=\frac{-i}{z-i}$$

24) گزینه 2

تصویر $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ توسط $w=\frac{1}{z}$، $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$ می‌باشد.

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0 \Rightarrow 2u+2v+1=0$$
$$u+v+\frac{1}{2}=0$$

25) گزینه 1

$$w=\frac{z-1}{z-2} \Rightarrow z=\frac{2w-1}{w-1} \Rightarrow z+1=\frac{3w-2}{w-1}$$

$$|z+1|=3 \Rightarrow \frac{|3w-2|}{|w-1|}=3 \Rightarrow |3u+3iv-2|=3\,|u+iv-1|$$

$$(3u-2)^2+9v^2=9(u-1)^2+9v^2 \Rightarrow 3u-2=\pm 3(u-1) \Rightarrow u=\frac{5}{6}$$

خط $u=\frac{5}{6}$ موازی محور مختلط می‌باشد.

26) گزینه 2

$$w=e^z=e^x e^{iy} \Rightarrow |w|=e^x \ \ , \arg(w)=y$$

$$\mathrm{Re}(z)\le 0 \Rightarrow e^{-\infty}<|w|\le e^0 \Rightarrow 0<|w|\le 1$$

$$0\le \mathrm{Im}\,z\le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\le y\le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\le \arg(w)\le \frac{\pi}{2}$$

$\left\{ w : |w| \le 1 \ , \ 0 \le \arg(w) \le \frac{\pi}{2} \right\} =$ ربع اول داخل دایره واحد

27) گزینه 3

$$w = \cosh z = \cos(iz) = \cos(ix - y) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\begin{cases} u = \cosh x \cos y \\ v = \sinh x \sin y \end{cases}$$

$$y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh x \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh x \end{cases} \Rightarrow \frac{u^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \frac{v^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$$

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$$

28) گزینه 4

$$w = \frac{1}{z} \to x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$y = x^2 \Rightarrow -\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u^2}{(u^2 + v^2)} \Rightarrow -v = \frac{u^2}{u^2 + v^2} \Rightarrow v(u^2 + v^2) = -u^2$$

29) گزینه 3

نوار اصلی نگاشت $w = \sin z$، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ می‌باشد که هر پاره‌خط افقی این نوار به یک نیمه‌ی بیضی تصویر می‌گردد بنابراین باید $a = \frac{\pi}{2}$ باشد.

30) گزینه 2

$$w_1 = \sin z \ , \ w_2 = w_1^2 \ , \ w = \frac{w_2 - 2i + 1}{w_2 + 2i + 1}$$

نگاشت $w_1 = \sin z$، نوار $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ و $y \ge 0$ را به ربع اول تبدیل می‌کند و تبدیل $w_2 = w_1^2$ ربع اول را به نیم‌صفحه‌ی فوقانی تصویر می‌کند.

$$w = \frac{w_2 - (2i - 1)}{w_2 - (-2i - 1)} = \frac{w_2 - z_0}{w_2 - \overline{z}_0} \ , \ \mathrm{Im}(z_0) = 2 > 0$$

بنابراین نگاشت فوق، نیم‌صفحه‌ی فوقانی را به داخل دایره‌ی واحد تصویر می‌کند.

31) گزینه 1

$$w = z^2 \Rightarrow |w| = |z|^2$$

2 4

32) گزینه 4

$$z=\frac{2iz-1}{z+2i}\Rightarrow z^2+2iz=2iz-1\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$$

33) گزینه 3

$$w=z^2\ ,\ z=re^{i\theta}\quad ,\quad w=Re^{i\phi}$$

$$R=r^2\ ,\phi=2\theta$$

$$r\le 2\Rightarrow R\le 4\ ,-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}\le\phi\le\frac{\pi}{3}$$

$$S=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\pi(4)^2=\frac{16\pi}{3}$$

34) گزینه 4

تصویر خطوط قائم تحت نگاشت $w=\sin z$، یک شاخه از هذلولی می‌باشد.

35) گزینه 3

$$z=re^{i\theta}\ ,\ w=u+iv$$

$$w=z^k+\frac{1}{z^k}=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)+\frac{1}{r^k}(\cos k\theta-i\sin k\theta)$$

$$\begin{cases}u=(r^k+\frac{1}{r^k})\cos k\theta\\ v=(r^k-\frac{1}{r^k})\sin k\theta\end{cases}$$

$$|z|=d\Rightarrow r=d\Rightarrow\begin{cases}u=(d^k+\frac{1}{d^k})\cos k\theta\\ v=(d^k-\frac{1}{d^k})\sin k\theta\end{cases}$$

$$\frac{u^2}{(d^k+\frac{1}{d^k})^2}+\frac{v^2}{(d^k-\frac{1}{d^k})^2}=1\qquad,\quad a^2=(d^k+\frac{1}{d^k})^2\ ,\ b^2=(d^k-\frac{1}{d^k})^2$$

کانون‌های بیضی: $c^2=a^2-b^2=4\Rightarrow(2,0)(-2,0)$

تصویر یک بیضی با کانون‌های $w=\pm 2$ می‌باشد.

36) گزینه 4

$$z=\frac{z^2+2i}{3z}\Rightarrow 3z^2=z^2+2i\Rightarrow z^2=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z=e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}\quad ,k=0,1$$

$$z=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$z=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

37) گزینه 2

تصویر خطی که از مبدا نمی‌گذرد، توسط $w=\frac{1}{z}$، دایره‌ای است که از مبدا می‌گذرد.

38) گزینه 1

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ , ad-bc\neq 0\quad ,\quad c\neq 0$$

$$w=\frac{az-1}{z+a}\Rightarrow a^2+1\neq 0\Rightarrow a\neq\pm i$$

نقاط ثابت تبدیل معکوس با نقاط ثابت تابع یکسان است.

$$z=\frac{az-1}{z+a}\Rightarrow z^2+az=az-1\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$$

39) گزینه 3

ابتدا نوار موردنظر را به نیم‌صفحه‌ی فوقانی تبدیل می‌کنیم.

تبدیل $w_1=2z$، نوار را به نوار افقی $-\infty<u_1<\infty,\ 0<v_1<\pi$ تبدیل می‌کند سپس نگاشت $w_2=e^{w_1}$ آن را به $0<\arg(w_2)<\pi\ ,\ 0<|w_2|<\infty$ یعنی به نیم‌صفحه فوقانی تبدیل می‌نماید.

برای تبدیل نیم‌صفحه‌ی فوقانی به درون قرص واحد از نگاشت $w=e^{i\theta}\frac{w_2-z_0}{w_2-\bar{z}_0}$ با فرض $\mathrm{Im}(z_0)>0$ استفاده می‌کنیم در گزینه3، $z_0=-2+i, \mathrm{Im}(z_0)>0\ ,\ \theta=0$ می‌باشد که تبدیل موردنظر است.

40) گزینه 2

ابتدا نگاشتی را تعیین می‌کنیم که ناحیه موجود را به داخل دایره واحد تبدیل کند.

نگاشت $w_1=\sin z$، ناحیه موجود را به نیم‌صفحه‌ی فوقانی تبدیل می‌نماید و نگاشت $w_2=\frac{w_1-i}{w_1+i}=\frac{w_1-z_0}{w_1-\bar{z}_0}$، $z_0=i$ ($\mathrm{Im}(z_0)>1$)، نیم‌صفحه‌ی فوقانی را به داخل دایره واحد تصویر می‌کند. برای اینکه

$$w = 2w_2 + 2 + i = \frac{2(\sin z - i)}{\sin z + i} + 2 + i$$

41) گزینه 2

$$w = \frac{i}{z} \Rightarrow z = \frac{i}{w}$$

$$|z - i| = 1 \Rightarrow \left|\frac{i}{w} - i\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1-w}{w}\right| = 1 \Rightarrow |1-w| = |w|$$

$$|1 - u - iv| = |u + iv| \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

42) گزینه 1

$$w = i\frac{z-i}{z+i} = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \theta = \frac{\pi}{2}, z_0 = i, \mathrm{Im}(z_0) > 1$$

این نگاشت نیم‌صفحه‌ی بالایی را به داخل دایره‌ی واحد تصویر می‌کند.

43) گزینه 3

$$w = \frac{z}{z-2} \Rightarrow z = \frac{2w}{w-1} = \frac{2u+2iv}{u-1+iv}$$

$$z = \frac{(2u+2iv)(u-1-iv)}{(u-1)^2+v^2} \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}$$

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow v < 0$$

$$z = \frac{2w}{w-1} \Rightarrow z - 1 = \frac{w+1}{w-1}$$

$$|z-1| < 1 \Rightarrow |w+1| < |w-1| \Rightarrow |u+iv+1| < |u+iv-1|$$

$$(u+1)^2 + v^2 < (u-1)^2 + v^2 \Rightarrow 2u < -2u \Rightarrow u < 0$$

تصویر $v < 0, u < 0$ یعنی ربع سوم مختصات می‌باشد.

44) گزینه 4

نگاشت $w_1 = z + \frac{1}{z}$، دایره $|z| = 2$ را به یک بیضی افقی تبدیل می‌کند بنابراین $w = \frac{1}{2}w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ نیز دایره $|z| = 2$ را به یک بیضی افقی تبدیل می‌نماید.

45) گزینه 1

$$w = \cos \pi z = -\sin(\pi z - \frac{\pi}{2})$$

$w_1 = \pi z - \frac{\pi}{2} = u_1 + iv_1 , w = -\sin w_1$

نیم‌نوار $\{y \ge 0, 0 \le x \le 1\}$ توسط $w_1 = \pi z - \frac{\pi}{2}$ به $\left\{v_1 \ge 0 , -\frac{\pi}{2} \le u_1 \le \frac{\pi}{2}\right\}$ تبدیل می‌شود. این نوار توسط $\sin w_1$ به نیم‌صفحه‌ی فوقانی و توسط $w = -\sin w_1$ به نیم‌صفحه‌ی تحتانی صفحه‌ی w تصویر می‌گردد $(\text{Im}(w) \le 0)$

46) گزینه 2

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$$x^2+y^2-ax=0 \Rightarrow -au+1=0 \Rightarrow u=\frac{1}{a}$$

47) گزینه 4

$$a(x^2+y^2)bx+cy+d=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$$y=\frac{x}{2} \Rightarrow x-2y=0 \Rightarrow u+2v=0 \Rightarrow v=-\frac{u}{2}$$

48) گزینه 1

این تست مشابه تست (36) می‌باشد.

49) گزینه 3

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$$y=x+c \Rightarrow x-y+c=0 \Rightarrow c(u^2+v^2)+u+v=0$$

50) گزینه 4

$$|z-1|<1 \Rightarrow \left|\frac{1}{w}-1\right|<1 \Rightarrow |1-w|<|w|$$

$$|1-u-iv|<|u+iv| \Rightarrow (1-u)^2+v^2<u^2+v^2 \Rightarrow u>\frac{1}{2}$$

51) گزینه 4

براساس توضیحات بخش نگاشت $w=\sin z$، گزینه 4 صحیح می‌باشد.

52) گزینه 4

این تست، مشابه تست (25) می‌باشد.

53) گزینه 4

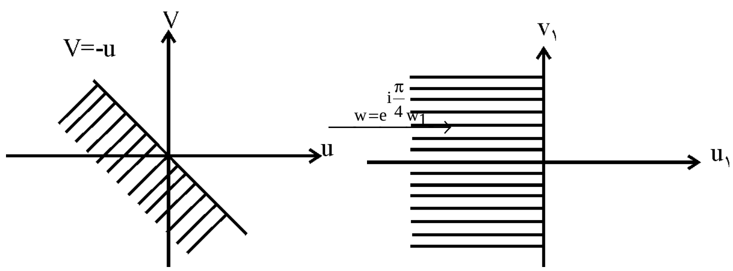
براساس گزینه‌ها ابتدا یکی از دو نگاشت $z+2i$ یا $z-2i$ را بررسی می‌کنیم.

$$w_1=\frac{z-2i}{z+2i}\Rightarrow z=-2i\frac{w_1+1}{w_1-1},\ w_1=u_1+iv_1$$

$$|z|<2\Rightarrow\left|\frac{w_1+1}{w_1-1}\right|<1\Rightarrow|u_1+iv_1+1|<|u_1+iv_1-1|$$

$(u_1+1)^2+v_1^2<(u_1-1)^2+v_1^2\Rightarrow u_1<0\Rightarrow$ نیم‌صفحه‌ی چپ محور موهومی

بنابراین توسط نگاشت $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z-2i}{z+2i}$، تصویر نهایی به صورت $v<-u$ یا $v+u<0$ می‌باشد.



54) گزینه 4

$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow z=x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{u}{u^2+v^2}\\[2mm] y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(z)\le 1\Rightarrow-\frac{v}{u^2+v^2}\le 1\Rightarrow u^2+v^2+v\ge 0$$

$$u^2+(v+\frac{1}{2})^2\ge\frac{1}{4}\Rightarrow\left|u+i(v+\frac{1}{2})\right|\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$$

55) گزینه 4

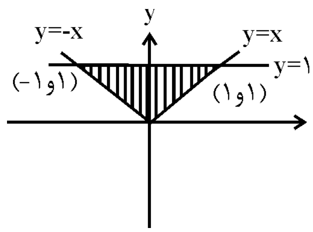
$$w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

$$x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}u=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cosh y,\ u<0\\[2mm] v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sinh y\end{cases}$$

$$\frac{u^2}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}-\frac{v^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1\Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}\quad,\quad u<0$$

شاخه سمت چپ هذلولی $u^2-v^2=\frac{1}{2}$، تصویر نهایی است.

$z = x + iy \ , w = u + iv$



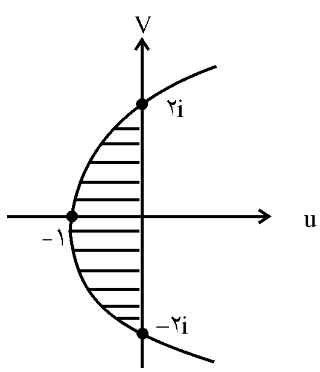
$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$

$y = x, 0 \le x \le 1 \Rightarrow u = 0, v = 2x^2 \Rightarrow u = 0 \ , \ 0 \le v \le 2$
$y = -x, -1 \le x \le 0 \Rightarrow u = 0, v = -2x^2 \Rightarrow u = 0 \ , \ -2 \le v \le 0$

بنابراین تصویر دو پاره‌خط فوق، پاره‌خط $u = 0 , -2 \le v \le 2$ روی محور مختلط صفحه‌ی W می‌باشد.

$y = 1, -1 \le x \le 1 \Rightarrow u = x^2 - 1, v = 2x , -2 \le v \le 2$

$v = 2x \Rightarrow x = \frac{v}{2} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1 \ , -2 \le v \le 2$



57) گزینه 4

خطی که از مبدا می‌گذرد دارای معادله‌ی $\theta = \theta_0$ می‌باشد.

$Z = re^{i\theta_0} \ , \ \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta_0} \ , \ w = u + iv$

$u + iv = \frac{1}{2}(re^{i\theta_0} + \frac{1}{r} e^{-i\theta_0})$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\cos\theta_0 (r + \frac{1}{r}) \\ v = \frac{1}{2}\sin\theta_0 (r - \frac{1}{r}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{4u^2}{\cos^2\theta_0} - 2 \\ r^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{4v^2}{\sin^2\theta_0} + 2 \end{cases}$$

اگر $\sin\theta_0 \ne 0 \ , \cos\theta_0 \ne 0$ آنگاه:

$$\frac{4u^2}{\cos^2\theta_0}-2=\frac{4v^2}{\sin^2\theta_0}+2 \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta_0}-\frac{v^2}{\sin^2\theta_0}=1$$

اگر $\sin\theta_0 = 0$ آنگاه تصویر، قسمتی از محور حقیقی $(v = 0)$ و اگر $\cos\theta_0 = 0$ آنگاه تصویر، قسمتی از محور موهومی $(u = 0)$ می‌باشد.

بنابراین تصویر نهایی، یک هذلولی و یا جزئی از یک خط خواهد بود.

3-1) دنباله‌ها و سری‌های عددی

دنباله‌های حقیقی $\{b_n\},\{a_n\}$ مفروض هستند در اینصورت $\{c_n = a_n + ib_n, n \in N\}$ را یک دنباله‌ی مختط می‌نامیم.

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c_0$ باشد در اینصورت دنباله‌ی $\{c_n\}$ را همگرا به c_0 می‌نامیم و اگر دنباله‌ی $\{c_n\}$دارای حد نباشد آن را واگرا می‌گوئیم.

دنباله‌ی مختلط $\{c_n = a_n + ib_n\}$ به مقدار $c_0 = a_0 + ib_0$ همگرا می‌باشد اگر و تنها اگر دنباله‌های $\{b_n\},\{a_n\}$ به ترتیب به b_0, a_0 همگرا باشند. بنابراین اگر حداقل یکی از این دو دنباله واگرا باشند آنگاه دنباله‌ی $\{c_n\}$ واگرا خواهد بود.

مثال ۱: دنباله همگرای $z_1, z_2, \ldots$ را که در آن $z_n = (1-\frac{3}{n}) + i(2+\frac{4}{n})$ است، در نظر می‌گیریم. اگر c حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج $|z_n - c| < 0/01$ می‌باشند، کدام است؟

1) 401   2) 501   3) 400   4) 500

پاسخ: گزینه 4

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n}) + i\lim_{n\to\infty}(2+\frac{4}{n}) = 1+2i \Rightarrow c = 1+2i$$

$$z_n - c = -\frac{3}{n} + i\frac{4}{n}$$

$$|z_n - c| \ge 0/01 \Rightarrow \left|-\frac{3}{n} + i\frac{4}{n}\right| \ge 0/01 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{n^2} + \frac{16}{n^2}} \ge 0/01$$

$\frac{5}{n} \ge 0/01 \Rightarrow n \le 500 \Rightarrow$ 500 جمله

سری عددی مختلط:

برای دنباله‌ی مختلط $\{c_n\}$، دنباله‌ی $\left\{S_n = \sum_{k=1}^{n} c_K\right\}$ را دنباله‌ی حاصل جمع جزئی می‌نامیم و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ را سری عددی مختلط می‌گوییم. سری مختلط $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ را به مقدار s_0 همگرا می‌نامیم اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_0$ باشد و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ موجود نباشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ را واگرا می‌گوئیم.

سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ به مقدار مختلط S_0 همگرا می‌باشد، اگر و تنها اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به ترتیب به مقادیر $\mathrm{Im}(S_0), \mathrm{Re}(S_0)$ همگرا باشند.

همگرایی مطلق و مشروط :

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$، همگرا باشد در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ نیز همگرا خواهد بود و به $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$، همگرای مطلـق مـی گـوئیم.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ واگرا باشد در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ را همگرای مشروط (شرطی) می‌نامیم.

نکته 1:

الف) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ می‌باشد بنابراین اگر $\lim_{n\to\infty}c_n\neq 0$ باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$، واگرا خواهد بود.

به بیان دیگر $\lim_{n\to\infty}c_n=0$، شرط لازم برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ می‌باشد.

ب) آزمون نسبت (دالامبر)

در سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ اگر $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ آنگاه

$L<1\Rightarrow$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ همگرای مطلق است

$L>1\Rightarrow$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ واگرا می‌باشد

$L=1\Rightarrow$ نتیجه‌ای در مورد همگرایی سری گرفته نمی‌شود

ج) آزمون ریشه (کوشی)

در سری $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ اگر $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ آنگاه نتایجی مشابه آزمون دالامبر حاصل می‌شود.

د) سری هندسی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}c^n$ (c یک ثابت مختلط) معرفـی مـی‌شـود. اگـر $|c|<1$ باشـد آنگـاه سـری هندسـی بـه مقدار $\frac{c}{1-c}$

همگرا می‌باشد و اگر $|c|\geq 1$ آنگاه سری هندسی واگرا خواهد بود.

با مشتق‌گیری از سری هندسی نسبت به c می‌توانیم رابطه‌ی زیر را به دست آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}nc^n=\frac{c}{(1-c)^2}\ ,\ |c|<1$$

مثال ۲: مقدار سری‌های زیر را در صورت همگرا بودن، تعیین کنید.

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2i}{1+2i}\right)^n \qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{i+1}{2}\right)^n$$

پاسخ:

$$\left|\frac{2i}{1+2i}\right|<1 \Rightarrow S_1=\frac{c}{(1-c)^2}=\frac{\frac{2i}{1+2i}}{\left(1-\frac{2i}{1+2i}\right)^2}=\frac{\frac{2i}{1+2i}}{\frac{1}{(1+2i)^2}}=2i(1+2i)=-4+2i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^n=\frac{c}{(1-c)^2}, |c|<1$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{i+1}{2}\right)^n \ , \ \left|\frac{i+1}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

$$S_2=\frac{\frac{i+1}{2}}{\left(1-\frac{i+1}{2}\right)^2}=-1+i$$

3-2) سری‌های توانی، تیلور و مک‌لورن

سری تابع به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ معرفی می‌گردد که $z=x+iy$ یک متغیر مختلط می‌باشد. همگرایی سری تابع به مقدار متغیر Z وابسته است.

مجموعه نقاطی از صفحه مختلط Z را که به ازای آن‌ها سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ همگرا می‌شود را ناحیه همگرایی سری می‌نامیم.

برای تعیین ناحیه‌ی همگرایی یک سری تابع معمولاً از آزمون نسبت (دالامبر) یا آزمون ریشه (کوشی) استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz^2}$ کدام است؟

1) $x^2-y^2>1$ 2) $|x|>|y|$ 3) تمام صفحه مختلط 4) $|x|<|y|$

پاسخ: گزینه 2

از آزمون دالامبر استفاده می‌کنیم.

$$f_n(z)=ne^{-nz^2} \ , \ f_{n+1}(z)=(n+1)e^{-(n+1)z^2}=(n+1)e^{-nz^2}e^{-z^2}$$

$$\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}=\frac{n+1}{n}e^{-z^2}=\frac{n+1}{n}e^{y^2-x^2-2ixy} \Rightarrow \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\left|\frac{n+1}{n}\right|e^{y^2-x^2}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=e^{y^2-x^2}$$

$L < 1 \to e^{\dots} < 1 \to y^2 - x^2 < 0 \to y^2 < x^2 \to |y| < |x|$

مثال ۴: ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z+1)}$ عبارتست از

1) $x > 0$ 2) $x > 1$ 3) $x > -2$ 4) $x > -1$

پاسخ: گزینه 4

از آزمون کوشی استفاده می‌کنیم:

$$f_n(z) = e^{-n(z+1)} = e^{-n(x+iy+1)}$$

$$f_n(z) = e^{-n(x+1)} e^{-iny} \Rightarrow |f_n(z)| = e^{-n(x+1)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = e^{-(x+1)}$$

$$L < 1 \Rightarrow e^{-(x+1)} < 1 \Rightarrow -(x+1) < 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

سری توانی:

سری توانی یک سری تابع خاص به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ می‌باشد که z_0 یک مقدار ثابت مختلط و c_n یک دنباله‌ی مختلط است.

ناحیه‌ی همگرایی سری توانی به صورت زیر می‌باشد.

آزمون نسبت (دالامبر)

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right) |z-z_0|$$

$$L < 1 \Rightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

آزمون ریشه (کوشی):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right) |z-z_0|$$

$$L < 1 \Rightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

نکته 2: سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ در قرص $|z-z_0| < R$ همگرا می‌باشد.

دایره‌ی $|z-z_0| = R$ را دایره همگرایی و $\mathbf{R}$ را شعاع همگرایی سری می‌نامیم.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

اگر $R=0$ باشد، سری توانی فقط در نقطه‌ی Z_0 همگرا می‌باشد و اگر $R=\infty$ باشد، سری توانی در تمام صفحه مختلط همگرا خواهد بود.

مثال ۵: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ برابر است با

1) $\frac{1}{4}$ 2) 4 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه 1

آزمون کوشی:

$$c_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{n}{e})^2}=4$$

$$\frac{1}{R}=4\Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

در حد فوق از هم‌ارزی زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{cases}\sqrt[n]{n!}\,:\,\frac{n}{e}\\ n\to\infty\end{cases},\quad\begin{cases}\sqrt[n]{(an)!}\,:\,(\frac{an}{e})^a\\ n\to\infty\end{cases}$$

مثال ۶: شعاع همگرایی سری توانی $\sum(1-\frac{1}{n})^{n^2}Z^n$ برابر است با

1) e^{-1} 2) e 3) 0 4) 1

پاسخ: گزینه ۲

آزمون کوشی:

$$c_n=(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}$$

$$\frac{1}{R}=e^{-1}\Rightarrow R=e$$

نکته 3: هر سری توانی در ناحیه همگرایی خود ($|z-z_0|<R\,,R\neq 0$) تحلیلی می‌باشد و از آن می‌توانیم جمله به جمله

سری تیلور:

اگر تابع $f(z)$ در یک حوزه $\mathbf{D}$ تحلیلی باشد و $z=z_0$ نقطه‌ای در $\mathbf{D}$ باشد آنگاه یک سری توانی حول نقطه‌ی z_0 موجود است که تابع $\mathbf{f(z)}$ را نشان می‌دهد. این سری به صورت زیر است:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\mathbf{K}$$

اگر کوتاهترین فاصله بین نقطه‌ی Z_0 و نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ را با $\mathbf{R}$ نشان دهیم در اینصورت سری تیلور فوق در ناحیه‌ی $|z-z_0|<R$ همگرا می‌باشد سری تیلور در حول مبدا مختصات $(z_0=0)$ را سری مک لورن می‌نامیم.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\mathbf{K}$$

نکته 4: سری مک لورن برخی از توابع به صورت زیر می‌باشد.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\mathbf{K}\quad,\ R=\infty$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\mathbf{K}\ ,\ R=\infty$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\mathbf{K}\ ,\ R=\infty$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\mathbf{K}\ ,\ R=\infty$$

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\mathbf{K}\ ,\ R=\infty$$

$$\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\mathbf{K}\quad,\ R=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=1-z^2+z^4-z^6+\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\tan^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}(-1)^n\frac{}{n+1}=z-\frac{}{2}+\frac{}{3}-\frac{}{4}+\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\mathbf{K}\ ,\ R=1$$

$$\ln(\frac{1+z}{1-z})=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=2(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\mathbf{K})\ ,\ R=1$$

$$(1+z)^P=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{P}{n}z^n\ ,\ \binom{P}{n}=\frac{P(P-1)(P-2)\mathbf{K}(P-n+1)}{n!}\ ,P\in R$$

نکته 5:

الف) برای به دست آوردن بسط تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه‌ی $z_0\neq 0$، معمولاً از تغییر متغیر $z=z_0+t$ استفاده کرده و در تابع $f(z_0+t)$، سری مک لورن را تعیین می‌کنیم.

ب) به دلیلی منحصر به فرد بودن بسط تیلور حول نقطه z_0، اگر با هر روشی یک سری توانی برای تابع تعیین کنیم، سری تیلور تابع را حول z_0 به دست آورده‌ایم. می‌توانیم در ناحیه همگرایی مشترک چند سری تیلور، بین آن‌ها عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم انجام دهیم و یا در ناحیه همگرایی یک سری تیلور می‌توانیم از مشتق یا انتگرال استفاده نماییم.

نکته 6: اگر سری تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ معلوم باشد آنگاه از رابطه‌ی $f^{(n)}(z_0)=n!c_n$، مشتق مرتبه **n** ام تابع قابل محاسبه است.

مثال ۷: سری تیلور تابع زیر را حول نقطه $z=1$ تعیین کنید.

$$f(z)=\frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}$$

پاسخ:

$$f(z)=\frac{2z^2+9z+5}{(z-3)(z+2)^2}=\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z+2)^2},z_0=1$$

$f(z)$ در $z=-2\ ,\ z=3$ غیرتحلیلی است بنابراین کوتاهترین فاصله بین z_0 تا نقاط غیرتحلیلی برابر $R=2$ می‌باشد و ناحیه همگرایی به صورت $|z-1|<2$ است

$$f_1(z)=\frac{2}{z-3}\Rightarrow f_1(1+t)=\frac{2}{t-2}\ ,\ t=z-1\ ,\ \ |t|<2$$

$$\frac{2}{t-2}=\frac{2}{-2(1-\frac{t}{2})}=\frac{-1}{1-\frac{t}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n\ ,\ \left|\frac{t}{2}\right|<1$$

$$f_1(z)=\frac{\quad}{z-3}=-\sum_{n=0}(\frac{\quad}{2})\quad,\quad |z-1|<2$$

$$f_2(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=-(\frac{1}{z+2})'$$

$$g(z)=\frac{1}{z+2}\Rightarrow g(1+t)=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3(1+\frac{t}{3})}\quad,\quad |t|<2$$

اگر $|t|<2$ آنگاه $\left|\frac{t}{3}\right|<1$ می‌باشد.

$$\frac{1}{3(1+\frac{t}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3^n}\Rightarrow\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}$$

$$(\frac{1}{z+2})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}n(z-1)^{n-1}$$

$$f_2(z)=-(\frac{1}{z+2})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+2}}(n+1)(z-1)^n$$

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}-\frac{1}{2^n}\right](z-1)^n\quad,\quad |z-1|<2$$

مثال ۸: اگر $f(z)=z\tan^{-1}z$ باشد، مقدار $f^{(50)}(0)$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\tan^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+2}}{2n+1}$$

$$c_{2n+2}=\frac{(-1)^n}{2n+1}\Rightarrow c_{50}=\frac{1}{49}$$

$$\frac{f^{(50)}(0)}{(50)!}=\frac{1}{49}\Rightarrow f^{(50)}(0)=\frac{(50)!}{49}=50\times 48!$$

مثال ۹: اگر $f(z)=\frac{1}{4-3z}$ باشد، سری تیلور آنرا حول $a=1+i$ بنویسید و ناحیه همگرایی آن را در صفحه z تعیین کنید

1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n[z-(1+i)]^n$ ، $|z-(1+i)|<\frac{3}{\sqrt{10}}$

2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[z-(1+i)]^n$ ، $|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$ ، $|z-(1+i)|<\frac{3}{\sqrt{10}}$

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$ ، $|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

تابع $f(z)$ در $z=\frac{4}{3}$ غیرتحلیلی است بنابراین

$$R=\left|\frac{4}{3}-1-i\right|=\frac{\sqrt{10}}{3}\Rightarrow \left|z-(1+i)\right|<\frac{\sqrt{10}}{3}$$:ناحیه همگرایی

$$t=z-(1+i)\Rightarrow z=1+i+t\ ,\ |t|<\frac{\sqrt{10}}{3}$$:ناحیه همگرایی

$$f(z)=f(t+1+i)=\frac{1}{4-3(t+1+i)}=\frac{1}{1-3i-3t}=\frac{1}{(1-3i)(1-\frac{3t}{1-3i})}$$

اگر $|t|<\frac{\sqrt{10}}{3}$ آنگاه $\left|\frac{3t}{1-3i}\right|<1$ می‌باشد بنابراین

$$f(z)=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^n}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}\left[z-(1+i)\right]^n\ ,\ \left|z-(1+i)\right|<\frac{\sqrt{10}}{3}$$

3-3) سری لوران

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه‌ی $r_1<|z-z_0|<r_2$ تحلیلی باشد، آنگاه می‌توان آن را به صورت سری لوران زیر نمایش داد

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

در یک ناحیه‌ی همگرایی مشخص، سری لوران فوق منحصر بفرد است و ضرایب a_n براساس انتگرال مختلط به صورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ ,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

C یک مسیر بسته مانند $|z-z_0|=r_3$، $r_1<r_3<r_2$ می‌باشد.

نکته 7: سری لوران یک تابع در یک ناحیه‌ی همگرایی مشخص، منحصر به فرد است. بنابراین برای تعیین سری لوران معمولاً از روش‌های غیرمستقیم مانند استفاده از سری‌های مک لورن، بهره می‌بریم.

نکته 8: سری لوران را به صورت مجموع دو سری زیر نیز می‌توان نشان داد

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ را جملات اصلی بسط لوران می‌نامیم.

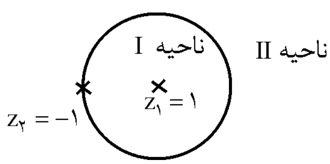
یعنی بسط لوران، شامل جملات اصلی نمی‌باشد.

مثال ۱۰: سری‌های لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ را به مرکز $z_0=1$، بنویسید.

پاسخ:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

$f(z)$ در نقاط $z_1=1$, $z_2=-1$ غیرتحلیلی است بنابراین دو سری لوران در نواحی زیر می‌توانیم بنوسیم



ناحیه **I**: $0<|z-1|<2$

ناحیه **II**: $|z-1|>2$

سری لوران در ناحیه‌ی $0<|z-1|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)},\ z=1+t\Rightarrow f(1+t)=\frac{1}{t(2+t)},\ |t|<2$$

اگر $|t|<2$ آنگاه $\left|\frac{t}{2}\right|<1$ می‌باشد بنابراین

$$f(z)=\frac{1}{t}\frac{1}{2(1+\frac{t}{2})}=\frac{1}{2t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}=\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n\ ,\ 0<|z-1|<2$$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n\ ,\ 0<|z-1|<2$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(z-1)+\mathbf{K}\ ,\ 0<|z-1|<2$$

جمله‌ی اصلی سری لوران فوق $\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$ می‌باشد.

سری لوران در ناحیه‌ی $|z-1|>2$:

$$f(1+t)=\frac{1}{t(2+t)},\ |t|>2$$

اگر $|t|>2$ آنگاه $\left|\frac{2}{t}\right|<1$ می‌باشد بنابراین

$$f(z)=\frac{}{t}\frac{}{t(t+\frac{2}{t})}=\frac{}{t^2}\sum_{n=0}(-1)^n\frac{}{t^n},\left|\frac{}{t}\right|<1$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+2}},|z-1|>2$$

تمام جملات سری فوق، جملات اصلی سری لوران تابع می‌باشند.

مثال ۱۱: سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$ حول نقطه $z=\pi$ برابر است با

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$
4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

پاسخ: گزینه 1

$$f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi},t=z-\pi\Rightarrow f(t+\pi)=\frac{\sin(\pi+t)}{t}=-\frac{\sin t}{t}$$

$$f(z)=-\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

مثال ۱۲: ضریب $\frac{1}{z-1}$ در بسط لوران تابع $\frac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $2<|z-1|<3$ برابر است با:

1) 0
2) $\frac{1}{2}$
3) $\frac{1}{8}$
4) $-\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه 4

$$f(z)=\frac{1}{z(z-5)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z})$$

$$z=1+t\Rightarrow f(1+t)=\frac{1}{5}(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t+1})\ ,\ 2<|t|<3$$

اگر $|t|<3$ آنگاه $\left|\frac{t}{4}\right|<1$ می‌باشد بنابراین

$$\frac{1}{t-4}=\frac{1}{-4(1-\frac{t}{4})}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}\ ,2<|z-1|<3$$

اگر $|t|>2$ آنگاه $\left|\frac{1}{t}\right|<1$ می‌باشد

$$-\frac{1}{t+1}=-\frac{1}{t}\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=-\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}},\ 2<|z-1|<3$$

$$f(z)=\frac{[illegible]}{5}\left[-\sum_{n=0}\frac{[illegible]}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}\frac{[illegible]}{(z-1)^{n+1}}\right],\ 2<|z-1|<3$$

سری فوق شامل $-\frac{1}{5}\frac{1}{z-1}$ می‌باشد بنابراین ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر $-\frac{1}{5}$ است.

4-3) صفرها، نقاط تکین و قطب‌ها

صفر تابع:

نقطه‌ی z_0 را صفر مرتبه‌ی $\mathbf{n}$ تابع $f(z)$ می نامیم اگر $f(z_0)=f'(z_0)=\mathbf{K}f^{(n-1)}(z_0)=0$ و $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ باشد. صفر مرتبه اول را صفر ساده می‌گوئیم.

نکته 9:

الف) اگر $f(z_0)=0$ و کوچکترین توان $z-z_0$ در سری تیلور $f(z)$ حول z_0، برابر $\mathbf{n}$ باشد آنگاه z_0 صفر مرتبه $\mathbf{n}$ تابع $f(z)$ می‌باشد.

ب) اگر z_0 صفر توابع $g(z),f(z)$ از مرتبه‌ی n_2,n_1 باشد آنگاه با فرض $n_2\neq n_1$، z_0 صفر تابع $f(z)+g(z)$ از مرتبه‌ی $\min\{n_1,n_2\}$ می‌باشد و با فرض $n_1=n_2$، z_0 صفر تابع $f(z)+g(z)$ ازمرتبه‌ی n_3 است بطوریکه $n_3\geq n_1$

ج) اگر z_0 صفر توابع $g(z),f(z)$ از مرتبه‌ی n_2,n_1 باشد آنگاه z_0، صفر تابع $f(z)g(z)$ از مرتبه‌ی n_1+n_2 می‌باشد.

صفر در بی‌نهایت:

اگر $f(\frac{1}{z})$ صفری از مرتبه $\mathbf{n}$ در نقطه $z=0$ داشته باشد آنگاه می‌گوئیم $f(z)$ صفری از مرتبه $\mathbf{n}$ در بی نهایت دارد.

مثال ۱۳: مرتبه‌ی صفر توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(z)=\frac{1}{z-1},\ f(z)=\sin z,\ f(z)=1-\cos z,\ f(z)=z-\sin z$$

پاسخ:

در تابع $f(z)=\sin z$ اگر $f(a)=0$ آنگاه $f'(a)\neq 0$ می‌باشد بنابراین $\sin z$ صفرهای ساده‌ای در $z=k\pi$ ($\mathbf{k}$ عدد صحیح) دارد.

در تابع $f(z)=1-\cos z$ اگر $f(a)=0$ آنگاه $f'(a)=0$ و $f''(a)\neq 0$ می‌باشد بنابراین $1-\cos z$ صفرهایی از مرتبه دو در نقاط $z=2k\pi$ ($\mathbf{k}$ عدد صحیح) دارد.

صفر تابع $f(z)=z-\sin z$، $z=0$ می‌باشد.

$$f'(z)=1-\cos z,\ f''(z)=\sin z,\ f'''(z)=\cos z$$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \ , \ f'''(0) \neq 0$

بنابراین $z = 0$، صفر مرتبه‌ی 3 تابع $z - \sin z$ می‌باشد.

تابع $f(z) = \frac{1}{z-1}$ در هیچ نقطه‌ی متناهی، صفر ندارد ولی تابع $f(\frac{1}{z}) = \frac{z}{1-z}$ در $z = 0$ دارای صفر ساده است بنابراین $f(z) = \frac{1}{z-1}$ در بی‌نهایت دارای صفر ساده (مرتبه 1) می‌باشد.

نقطه تنها:

نقطه‌ای از مجموعه نقاط $\mathbf{S}$ را نقطه تنهای $\mathbf{S}$ نامند هرگاه آن نقطه همسایگی‌ای داشته باشد که نقطه دیگری از $\mathbf{S}$ را در بر نگیرد. نقطه $\mathbf{b}$ را نقطه انباشتگی $\mathbf{S}$ (یا نقطه حدی $\mathbf{S}$) نامند اگر هر همسایگی $\mathbf{b}$، شامل حداقل یک نقطه (جز $\mathbf{b}$) از $\mathbf{S}$ باشد. توجه داشته باشید که خود $\mathbf{b}$ ممکن است به $\mathbf{S}$ تعلق نداشته باشد.

نکته 10: صفرهای تابع تحلیلی غیرصفر $f(z)$، تنها هستند.

نقطه تکین:

نقطه z_0 نقطه‌ی تکین (singular point) تابع $f(z)$ می‌باشد اگر و فقط اگر

1) $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد.

2) در هر همسایگی از z_0، نقاطی وجود داشته باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد نقطه تکین را نقطه منفرد نیز می‌گوئیم.

نقطه تکین تنها:

نقطه z_0 نقطه تکین تنها برای تابع $f(z)$ می‌باشد اگر و تنها اگر

1) $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

2) همسایگی از z_0 موجود باشد که $f(z)$ در تمام نقاط آن غیر از z_0، تحلیلی باشد.

نکته 11: اگر z_0 نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد آنگاه این تابع دارای سری لوران حول z_0 با ناحیه همگرایی $0 < |z - z_0| < R$ می‌باشد.

قطب:

اگر بسط لوران $f(z)$ حول نقطه تکین منفرد (z_0)، با ناحیه همگرایی $0 < |z - z_0| < R$ دارای تعداد محدود، جملات اصلی باشد آنگاه z_0 را قطب تابع می‌نامیم و بزرگترین درجه‌ی جملات اصلی را مرتبه قطب می گوئیم.

اگر این بسط لوران به صورت زیر باشد

$$f(z)=\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m},\ a_{-m}\neq 0$$

در اینصورت z_0 را قطب مرتبه $\mathbf{m}$ تابع $f(z)$ می‌نامیم. قطب مرتبه یک را قطب ساده نیز می‌گوئیم.

قطب رفع شدنی:

اگر بسط لوران فوق فاقد جملات اصلی باشد $(a_{-n}, n\in N)$ در اینصورت z_0 را قطب رفع‌شدنی (برطرف شدنی) یا قطب مرتبه صفر می‌نامیم.

تکین ضروری (ویژه اساسی):

اگر بسط لوران فوق شامل تعداد بی‌شماری جمله اصلی باشد آنگاه z_0 را نقطه تکین اساسی (منفرد اساسی یا ویژه اساسی) می‌نامیم.

نکته 12: برای تعیین مرتبه قطب می‌توان $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را به ازای $m=1,2,3,\ldots$ محاسبه کرد. مقدار m که به ازای آن برای اولین بار، حد فوق برابر مقداری متناهی شود، مرتبه قطب می‌باشد.

نکته 13: اگر توابع $g(z), f(z)$ تحلیلی باشند و $g(z_0)=0$، آنگاه در تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$، z_0 یک قطب می‌باشد. اگر z_0 ریشه‌ی مرتبه $n_1\ (n_1\geq 1)$ تابع $g(z)$ و ریشه‌ی مرتبه $n_2\ (n_2\geq 0)$ تابع $f(z)$ باشد در اینصورت با فرض $n_1>n_2$، z_0 قطب مرتبه n_1-n_2 است و با فرض $n_1\leq n_2$، z_0 قطب مرتبه صفر (رفع شدنی یا حذف شدنی) است.

مثال ۱۴: در توابع زیر نوع نقاط غیرتحلیلی را مشخص کنید.

$1)\ f(z)=\bar{z}$	$2)\ f(z)=\lvert z\rvert^2$
$3)\ f(z)=\mathrm{Ln}z$	$4)\ f(z)=\frac{1}{z}$
$5)\ f(z)=\sin(\frac{1}{z})$	$6)\ f(z)=\tan(\frac{1}{z})$
$7)\ f(z)=e^{\frac{1}{z}}$	$8)\ f(z)=\frac{1}{z(z-2)^5}+\frac{3}{(z-2)^2}$
$9)\ f(z)=\frac{z-\sin z}{z^2}$	$10)\ f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$
$11)\ f(z)=\frac{1}{(z+1)^2 e^{\frac{1}{z+1}}}$	$12)\ f(z)=z^{10}\cos(\frac{1}{z})$

پاسخ:

1) $f(z)=\bar{z}$ در تمام نقاط غیرتحلیلی است بنابراین نقطه تکین ندارد چون در هر همسایگی نقطه‌ی تکین برای $f(z)$ باید نقاط تحلیلی موجود باشد.

2) $f(z)=|z|$ در تمام نقاط غیرتحلیلی است بنابراین نقطه تکین ندارد.

3) $f(z)=\operatorname{Ln} z$ (شاخه اصلی) در نقاط $\operatorname{Re}(z)\le 0$, $\operatorname{Im}(z)=0$ غیرتحلیلی است. این نقاط تکین هستند چون در هر همسایگی از آن‌ها، نقاط تحلیلی برای تابع موجود است ولی این نقاط تکین تنها نیستند چون هیچ همسایگی محذوف از آن‌ها پیدا نمی‌شود که تابع در تمام نقاط داخل آن تحلیلی باشد. این نوع نقاط تکین را تکین غیرتنها از نوع شاخه‌ای (انشعابی) می‌نامیم.

4) $f(z)=\frac{1}{z}$ فقط در $z=0$ غیرتحلیلی است بنابراین $z=0$ تکین تنها از نوع قطب ساده (مرتبه 1) می‌باشد.

5) $f(z)=\sin(\frac{1}{z})$ فقط در $z=0$ غیرتحلیلی است بنابراین $z=0$ تکین تنها می‌باشد سری لوران حول $z=0$ به صورت زیر است

$$\sin(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots$$

بنابراین $z=0$ یک نقطه تکین ضروری (ویژه اساسی) می‌باشد.

6) تابع $f(z)=\tan(\frac{1}{z})$ در نقاط زیر غیرتحلیلی است

$$\tan(\frac{1}{z})=\frac{\sin(\frac{1}{z})}{\cos(\frac{1}{z})}, z=0 \text{ غیرتحلیلی}$$

$$\cos(\frac{1}{z})=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\frac{2}{(2K+1)\pi}=\pm\frac{2}{\pi},\pm\frac{2}{3\pi} \text{ :غیرتحلیلی}$$

تابع در نقاط $z=\pm\frac{2}{\pi},\pm\frac{2}{3\pi},\ldots$ دارای تکین تنها از نوع قطب ساده می‌باشد و در $z=0$ دارای تکین غیرتنها است چون $z=0$ نقطه‌ی حدی $z=\frac{2}{(2K+1)\pi}$ می‌باشد بنابراین هیچ همسایگی محذوف حول $z=0$ وجود ندارد که $f(z)$ در تمام نقاط داخل آن، تحلیلی باشد.

7) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ فقط در $z=0$ غیرتحلیلی است بنابراین $z=0$ نقطه تکین تنها می‌باشد. سری لوران تابع حول $z=0$ به صورت زیر است

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots$$

بنابراین $z=0$ نقطه تکین ضروری (ویژه اساسی) است.

8) تابع $f(z)=\frac{\ }{(z-2)^2}+\frac{\ }{z(z-2)^5}$ در $z=0$ قطب ساده و در $z=2$ قطب مرتبه 5 دارد.

9) $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^2}$ در $z=0$ غیرتحلیلی است. $z=0$ صفر مرتبه 2 برای z^2 و صفر مرتبـه 3 بـرای $z-\sin z$ مـی‌باشـد بنابراین براساس نکته (13)، $z=0$ قطب رفع شدنی است.

10) $z=0$ صفر مرتبه 3 برای z^3 و صفر مرتبه 2 برای $1-\cos z$ می‌باشد بنابراین $z=0$ قطب ساده (مرتبه 1) این تـابع است.

11) $f(z)$ فقط در $z=-1$ غیرتحلیلی است بنابراین در این نقطه تکین تنها می‌باشد.

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}e^{-\frac{1}{z+1}}=\frac{1}{(z+1)^2}(1-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!(z+1)^2}-\mathbf{K})$$

بنابراین $z=-1$ نقطه تکین ضروری (ویژه اساسی) می‌باشد.

12) $f(z)$ فقط در $z=0$ غیرتحلیلی است بنابراین $z=0$ تکین تنها است سری لوران این تابع مشـابه تـابع قبلـی، دارای بی‌شمار جمله اصلی می‌باشد بنابراین $z=0$ نقطه ویژه اساسی است.

نکته 14: اگر z_0 نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد در اینصورت توابع زیر در z_0، نقطه تکین اساسی (ویژه اساسی) دارند.

$$\sin(f(z))\ ,\cos(f(z)),\sinh(f(z)),\cosh(f(z)),e^{f(z)}$$

توابع زیر نیز در z_0، نقطه تکین غیرتنها (تکین انباشته) دارند.

$$\frac{1}{\sin(f(z))}\ ,\ \frac{1}{\cos(f(z))}\ ,\ \frac{1}{\sinh(f(z))}\ ,\ \frac{1}{\cosh(f(z))}\ ,\ \frac{1}{e^{f(z)}-K}(k\neq 0)$$

مثال ۱۵: برای تابع $f(z)=z^{10}e^{-\frac{1}{z^2}}$ نقطه $z=0$ چگونه نقطه است؟

1) نقطه عادی 2) تکین اساسی 3) قطب مرتبه 10 4) تکین برداشتنی

پاسخ: گزینه 2

$f(z)$ فقط در $z=0$ غیرتحلیلی است بنابراین $z=0$ تکین تنها می‌باشد.

$$f(z)=z^{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$$

سری فوق شامل بی‌شمار جمله اساسی است بنابراین $z=0$، تکین اساسی می‌باشد.

مثال ۱۶: تابع $f(z)=\frac{}{(z^2-4)^2\exp(\frac{1}{z-2})}$ **مفروض است کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟**

1) $z=0$ صفر مرتبه 7، $z=2$ قطب ساده تابع است.

2) $z=0$ صفر مرتبه 7، $z=2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

3) $z=2$ نقطه ویژه تنها نیست.

4) $z=2$ نقطه ویژه اساسی، $z=-2$ قطب مرتبه دوم تابع است.

پاسخ: گزینه 4

$$f(z)=\frac{z^7}{(z+2)^2(z-2)^2}e^{-\frac{1}{z-2}}$$

$z=0$ صفر مرتبه 7 و $z=-2$ قطب مرتبه 2 می‌باشد.

$z=2$ نقطه تکین تنها برای $-\frac{1}{z-2}$ می‌باشد بنابراین $z=2$ نقطه تکین اساسی برای $e^{-\frac{1}{z-2}}$ است (نکته (14)) پس $z=2$ نقطه تکین اساسی $f(z)$ می‌باشد.

3-5) مانده در بسط لوران

فرض کنید z_0 یک نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد در اینصورت می‌توانیم بسط لوران را اطراف z_0 با ناحیه‌ی همگرایی $0<|z-z_0|<R$ در نظر بگیریم، ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ را در این بسط لوران (a_{-1}) مانده بسط می‌نامیم.

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z_0}(f(z))$$

نقطه‌ی تکین تنها می‌تواند حذف شدنی یا قطب یا ویژه اساسی باشد که در هر حالت مانده به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

1) اگر z_0 قطب رفع‌شدنی باشد در اینصورت مانده در این نقطه برابر صفر خواهد بود.

2) اگر z_0 نقطه ویژه اساسی (تکین اساسی) باشد برای تعیین مانده باید سری لوران را بنویسیم.

3) اگر z_0 قطب تابع $f(z)$ باشد علاوه بر سری لوران می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم.

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f(z))=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

در رابطه‌ی فوق $\mathbf{n}$ می‌تواند مرتبه قطب یا مرتبه ریشه‌ی مخرج تابع باشد.

اگر z_0 قطب ساده (مرتبه 1) باشد آنگاه به رابطه‌ی ساده زیر می‌رسیم.

$z_0 \qquad z \to z_0$

در این حالت اگر $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ ، $f_1(z_0) \neq 0$ باشد مانده از رابطه‌ی زیر نیز قابل محاسبه است

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f(z))=\frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

مثال ۱۷: مانده تابع $\frac{1}{z(z+2)^3}$ در نقطه $z=-2$ برابر است با

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{1}{8}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه 2

$z=-2$ قطب مرتبه 3 تابع است بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{-2}(f)=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+2)^3\frac{1}{z(z+2)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}(\frac{2}{z^3})=-\frac{1}{8}$$

مثال ۱۸: مانده تابع $f(z)=\frac{\tan^{-1}z}{z^8}$ را در $z=0$ تعیین کنید.

پاسخ:

$z=0$ قطب مرتبه 7 و ریشه‌ی مرتبه‌ی 8 مخرج می‌باشد استفاده از رابطه‌ی $\operatorname*{Res}_{z_0}(f)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$

به ازای هر دو مقدار $n=7$, $n=8$ طولانی خواهد بود بنابراین از بسط لوران $\tan^{-1}z$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^9}{9}-\mathbf{K}\ \ ,|z|<1$$

$$\frac{\tan^{-1}z}{z^8}=\frac{1}{z^7}-\frac{1}{3z^5}+\frac{1}{5z^3}-\frac{1}{7z}+\frac{z}{9}-\mathbf{K}$$

ضریب $\frac{1}{z}$ برابر $-\frac{1}{7}$ است بنابراین مانده تابع در $z=0$ برابر $-\frac{1}{7}$ می‌باشد.

مثال ۱۹: مانده تابع $ze^{-\frac{1}{z-1}}$ برابر است با

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) -1

پاسخ: گزینه 1

$z=1$ نقطه تکین اساسی تابع می‌باشد بنابراین از سری لوران استفاده می‌کنیم

$$f(z)=ze^{-\frac{1}{z-1}} \Rightarrow f(1+t)=(1+t)e^{-\frac{1}{t}}, t=z-1$$

$f(z)=(1+t)\left[1-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3!t^3}+\cdots\right]$

ضریب $\frac{1}{t}=\frac{1}{z-1}$ در بسط فوق برابر $-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ است بنابراین مانده تابع، $-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۲۰: مانده تابع $e^{zt}\tan z$ در قطب $z=\frac{3\pi}{2}$ عبارت است از

1) $e^{\frac{3\pi}{2}t}$　　2) $e^{-\frac{3\pi}{2}t}$　　3) $e^{(i-\frac{3t}{2})\pi}$　　4) $e^{(i+\frac{3t}{2})\pi}$

پاسخ: گزینه 4

$f(z)=\frac{e^{zt}\sin z}{\cos z},\ z=\frac{3\pi}{2}$ قطب ساده

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},f_1(z_0)\neq 0\Rightarrow \underset{z_0}{\mathrm{Res}}(f(z))=\frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

$$\mathrm{Res}(f)=\left.\frac{e^{zt}\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{3\pi}{2}}=-e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{i\pi}e^{\frac{3\pi}{2}t}=e^{(i+\frac{3t}{2})\pi}$$

نکته 15: اگر $P(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه دو یا بیش‌تر باشد و در هیچ عدد صحیحی صفر نشود.

در اینصورت اگر $w_1,\ldots,w_k$ صفرهای $P(z)$ باشند آنگاه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{P(n)}=-\pi\sum_{j=1}^{k}\underset{z=w_j}{\mathrm{Res}}\left(\frac{\cot(\pi z)}{P(z)}\right)$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{P(n)}=-\pi\sum_{j=1}^{k}\underset{z=w_j}{\mathrm{Res}}\left(\frac{\csc(\pi z)}{P(z)}\right)$$

مثال ۲۱: اگر a یک مقدار ثابت مثبت باشد سری زیر را حساب کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

پاسخ: صفرهای چند جمله‌ای $P(z)=z^2+a^2$ به صورت $\pm ai$ می‌باشد.

با توجه به زوج بودن n^2+a^2 نسبت به $\mathbf{n}$ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}-\frac{1}{a^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\pi\left[\underset{z=ai}{\mathrm{Res}}\frac{\cot(\pi z)}{z^2+a^2}+\underset{z=-ai}{\mathrm{Res}}\frac{\cot(\pi z)}{z^2+a^2}\right]$$

$z=\pm ai$ قطب‌های ساده هستند بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{\quad}{z^2+a^2}=\frac{\quad}{2ai}=\operatorname*{Res}_{z=-ai}\frac{\quad}{z^2+a^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\pi\frac{\cot(\pi ai)}{ai}=\frac{\pi}{a}i\cot(\pi ai)=\frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a)$$

۱ـ ناحیه همگرایی سری $I=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n$ **کدام است؟**

1) $|z-1|<2$ 2) $|z-1|>2$ 3) $1<|z|<3$ 4) $z-1>2$ یا $z-1<-2$

۲ـ سری $\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots$ **با شرط** $|z|<1$ **نمایش کدام تابع است؟**

1) $\frac{1}{(1-z)^2}$ 2) $\frac{z}{1-z}$ 3) $-\ln(1-z)$ 4) $\ln(1-z)$

۳ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ **در نقطه منفرد** $z=0$ **کدام است؟**

1) 1 2) e 3) e^{-1} 4) $e-1$

۴ـ کدام گزینه بسط سری لوران تابع $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ **در همسایگی نقطه منفرد** $z=2$ **است.**

1) $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{n+1}$

2) $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

3) $\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n+1}$

4) $\dots+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{n+1}$

۵ـ قلمرو همگرایی سری توانی $\sum\frac{\sin(in)}{(z+i)^n}$ **عبارتست از:**

1) $|z+i|>1$ 2) $|z+i|<1$

3) $|z+i|>e$ 4) همه جا، غیر از نقطه $z=-i$

۶ـ جمله عمومی سری مک لورن تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{1-\cos z}{z^2}, & z\neq 0\\ \frac{1}{2}, & z=0\end{cases}$**، که در آن** $z=x+iy$ **کدام است؟**

1) $(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$ 2) $(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ 3) $(-1)^k\frac{z^{2k-2}}{(2k)!}$ 4) $(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

۷ـ قلمرو همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{in+\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ **عبارتست از:**

1) $0<|z+1|<1$ 2) $1<|z+1|<2$ 3) $\mathbf{C}$ (همه جا همگرا) 4) تهی (همه جا واگرا)

۸ـ سری لوران $\frac{\ }{z-4}$ در ناحیه $|z|>4$ کدام است؟

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n z^{-n+1}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{z})^{n+1}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{z^n}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} z^{-n}$

۹ـ سری لوران تابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ در ناحیه $|z|>0$ کدام است؟

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$
3) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n|!z^n}$
4) $\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{|n|!z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$

۱۰ـ اگر بدانیم که برای $|z|<1$ داریم $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\mathbf{K}$ سری لوران $\frac{1}{z^2}$ برای $|z+1|<1$ کدام است؟

1) $1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\mathbf{K}$
2) $1+2(z-1)+3(z-1)^2+4(z-1)^3+\mathbf{K}$
3) $1+(z+1)+(z+1)^2+(z+1)^3+\mathbf{K}$
4) $1+2(z+1)+3(z+1)^2+4(z+1)^3+\mathbf{K}$

۱۱ـ $z=0$ برای تابع $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$ چه نوع نقطه تکینی است؟

1) اساسی
2) قطب مرتبه اول
3) قابل رفع
4) قطب مرتبه دوم

۱۲ـ مانده تابع $z^2e^{\frac{1}{z+1}}$ در نقطه تکین آن کدام است؟

1) $\frac{1}{6}$
2) $\frac{1}{3}$
3) $\frac{2}{3}$
4) $\frac{7}{6}$

۱۳ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{n}{z^2}}$ کدام است؟

1) $x<0$
2) $y<0$
3) $xy<0$
4) $xy>0$

۱۴ـ دو جمله اول در بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه‌ی $|z+1|>2$ عبارت است از

1) $\frac{-1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}$
2) $\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}$
3) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{2}{(z+1)^3}$
4) $\frac{1}{z+1}+\frac{2}{(z+1)^2}$

۱۵ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(2z+1)^n$ برابر است با:

1) $\frac{1}{2}$
2) $\frac{1}{3}$
3) $\frac{1}{6}$
4) 6

۱۶ـ مانده تابع $f(z)=\tan z$ در قطب‌های آن کدام است.

1) -1   2) $-\frac{1}{2}$ 3) 1   4) $\frac{1}{2}$

۱۷ـ مانده تابع $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z+1}}$ در نقطه تکین آن برابر است با:

1) 1   2) $\frac{1}{3}$ 3) 3   4) $\frac{1}{6}$

۱۸ـ در بسط لوران عبارت $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ حول نقطه $z=-1$ و در ناحیه‌ی $|z+1|>2$، ضریب جمله‌ی $\frac{1}{(z+1)^3}$ عبارتست از:

1) $\frac{1}{2}$ 2) 2   3) 3   4) $3!$

۱۹ـ تابع $f(z)=\frac{z^3-2z+1}{z^5+2z^3+z}$ دارای:

1) یک قطب دوگانه در $z=0$ و دو قطب ساده در $z=\pm i$ است.

2) یک قطب ساده در $z=1$ و دو قطب دوگانه در $z=i\ ,\ z=0$ است.

3) یک قطب ساده در $z=0$ و دو قطب دوگانه در $z=\pm i$ است.

4) یک قطب دوگانه در $z=1$، یک قطب دوگانه در $z=-1$ و یک قطب ساده در $z=0$ است.

۲۰ـ مانده تابع $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-1}}$ را در نقطه $z=1$ بدست آورید.

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{7}{6}$ 4) $\frac{13}{6}$

۲۱ـ سری لورانت برای تابع $f(z)=\frac{2}{z(z-1)(z-2)}$ در دامنه $1<|z|<2$ عبارت است از:

1) $f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\mathbf{K}+\frac{1}{z^n}+\mathbf{K})-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\mathbf{K}+\frac{z^n}{2^n}+\mathbf{K})$

2) $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z^2}+\mathbf{K}+\frac{1}{z^n}+\mathbf{K})+\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\mathbf{K}+\frac{z^n}{2^n}+\mathbf{K})$

3) $f(z)=-\frac{1}{z}-\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\mathbf{K}+\frac{1}{z^n}+\mathbf{K})+\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\mathbf{K}+\frac{z^n}{2^n}+\mathbf{K})$

4) $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\mathbf{K}+\frac{1}{z^n}+\mathbf{K})-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\mathbf{K}+\frac{z^n}{2^n}+\mathbf{K})$

۲۲ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1} (\frac{\quad}{2z+1})$ در صفحه مختلط z کدام است؟

1) $\operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}$ 2) $\operatorname{Re}(z) < -\frac{1}{4}$ 3) $\operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{4}$ 4) $\operatorname{Re}(z) < -\frac{1}{2}$

۲۳ـ برای تابع $\frac{\sinh z}{z^4}$ مرتبه قطب و مانده تابع در مبدا مختصات کدام‌اند؟

1) مرتبه 2، مانده $\frac{1}{3}$ 2) مرتبه 3، مانده $\frac{1}{2}$ 3) مرتبه 3، مانده $\frac{1}{6}$ 4) مرتبه 2، مانده $\frac{1}{6}$

۲۴ـ مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{z^{2n+1}}$ در نقطه صفر کدام است؟

1) $\frac{1}{(2n)!}$ 2) $\frac{1}{(2n+1)!}$ 3) $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ 4) $\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

۲۵ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i(\frac{n}{z+1})}$ کدام است؟

1) $x > -1$ 2) $y < 0$ 3) $y > 0$ 4) $1 + x < y$

۲۶ـ در تابع مختلط $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$، نوع ویژگی (تکینی) تابع در نقطه $z = 0$ چیست و مانده تابع در این نقطه ویژه (تکین) چند است؟

1) قطب ساده و صفر 2) قطب ساده و $\frac{1}{6}$

3) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) و $-\frac{1}{6}$ 4) نقطه تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) و $\frac{1}{6}$

۲۷ـ مانده تابع $f(z) = z \sin(\frac{z}{z-1})$ در نقطه‌ی $z = 1$ چقدر است؟

1) $\cos 1$ 2) $\cos 1 + \frac{\sin 1}{2}$ 3) $\frac{2\cos 1 - \sin 1}{2}$ 4) $-\frac{\sin 1}{2}$

۲۸ـ سری لوران $\frac{2}{(z+1)(z+3)}$ در ناحیه $1 < |z| < 3$ عبارت است از:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^n}$

۲۹ـ نقاط تکین و نوع آن را برای تابع $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ تعیین کنید

1) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\ldots)$ و نقطه تکین برداشتنی $z=0$

2) قطب ساده در $z=\frac{1}{n\pi}$ و نقطه تکین اساسی در $z=0\ (n=\pm1,\pm2,\ldots)$

3) نقطه‌ی تکین اساسی در $z=0$ و قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{2n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\ldots)$

4) قطب‌های ساده در $z=\frac{1}{n\pi}\ (n=\pm1,\pm2,\ldots)$ و نقطه‌ی تکین غیرتنها در $z=0$

۳۰ـ مشتق n ـ ام تابع $f(z)=\frac{ez-e^z}{(z-1)^2}$ را در نقطه‌ی $z=1$ به دست آورید

1) $f^{(n)}(1)=0$ 2) $f^{(n)}(1)=\frac{e}{n(n+1)}$ 3) $f^{(n)}(1)=\frac{e}{(n+1)(n+2)}$ 4) $f^{(n)}(1)=\frac{1}{n(n+1)}$

۳۱ـ فرض کنیم $f(z)=\frac{\sinh z}{1-\cosh z}$، مانده‌ی این تابع را در $z=0$ تعیین کنید

1) صفر 2) 2 3) -3 4) -2

۳۲ـ بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ حول نقطه $z=1$ کدام است؟

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ 4) $\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}$

۳۳ـ شعاع همگرایی بسط تابع $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+1)(z+2i)}$ حول نقطه $z_0=1$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\sqrt{2}$ 4) 2

۳۴ـ تابع $f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}$ در نقطه $z_0=0$ دارای چه نوع تکینی است؟

1) قطب 2) تنهای برداشتنی 3) تنهای اساسی 4) غیرتنها

۳۵ـ در تابع $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$، مانده تابع در $z=0$ عبارت است از:

1) $-\frac{1}{2}$ 2) -1 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

۳۶ـ تابع $f(z)=\sec(\frac{1}{z-1})$ از متغیر مختلط z را در نظر می‌گیریم. در مورد نقاط تکین (singularity) و قطب‌های تابع کدام عبارت درست است؟

1) بی‌نهایت قطب مکرر دارد
2) $z=1$ تنها نقطه تکین تابع است
3) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد
4) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطه تکین اساسی دارد

۳۷ـ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}, z\neq 0$ (متغیر مختلط)

کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

1) $z=0$ قطب ساده تابع **f** است و مانده **f** در نقطه صفر برابر با $\frac{1}{2}$ است.
2) $z=0$ قطب ساده تابع **f** است و مانده **f** در نقطه صفر برابر با 1 است.
3) $z=0$ قطب مرتبه دو تابع **f** است و مانده **f** در نقطه صفر برابر با $\frac{1}{2}$ است.
4) $z=0$ قطب مرتبه سه تابع **f** است و مانده **f** در نقطه صفر برابر با 1 است.

۳۸ـ دو جمله اول غیرصفر بسط مک لورن تابع $f(z)=\sin(\sin z)$ در صفحه‌ی مختلط عبارت است از:

1) $z-\frac{z^3}{3}$
2) $z+\frac{z^3}{3!}$
3) $z+\frac{z^3}{3}$
4) $z+\frac{z^3}{2!}$

۳۹ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}$ در نقطه تکین تنهای $z=0$ کدام است؟

1) -2
2) 0
3) 1
4) 2

۴۰ـ مانده‌ی تابع $f(z)=\frac{\sinh(z)}{(z^2+\pi^2)^2}$ در نقطه πi کدام است؟

1) 0
2) $-\frac{1}{4\pi^2}$
3) $-\frac{1}{2\pi i}$
4) $\frac{1}{4\pi^2}$

۴۱ـ ضریب $\frac{1}{z}$ در سری لوران تابع $f(z)=\frac{2}{z(z-1)(z-2)}$ با دامنه $1<|z|<2$ کدام است؟

1) -2
2) -1
3) 1
4) 2

۴۲ـ سری لوران (Laurent) مربوط به $f(z)=\frac{\quad}{z+\frac{\pi}{2}}$ در نقطه $z_0=-\frac{\pi}{2}$ کدام است:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!}\ ,\ \left|z+\frac{\pi}{2}\right|>0$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z+\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \left|z+\frac{\pi}{2}\right|>0$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z+\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n)!}$

۴۳ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+i}{z-3i})^n$ در صفحه‌ی مختلط کدام است؟

1) $x^2+(y-i)^2<4$

2) $x^2+(y-i)^2>4$

3) $\mathrm{Im}(z)>1$

4) $\mathrm{Im}(z)<1$

۴۴ـ اگر سری لوران تابع f بصورت زیر باشد:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, |z|>1$$

آنگاه مقدار a_2, b_2 کدام‌اند؟ (مکانیک ـ 86)

1) $a_2=-1, b_2=0$

2) $a_2=0, b_2=0$

3) $a_2=1, b_2=1$

4) $a_2=0, b_2=1$

۴۵ـ در سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{nz}}{n+1}$، $0<a<1$ ثابت است. در این صورت ناحیه همگرایی سری عبارت است از:

1) $\mathrm{Re}(z)<0$

2) $\mathrm{Im}(z)<0$

3) $\mathrm{Re}(z)>0$

4) $\mathrm{Im}(z)>0$

۴۶ـ تابع $f(z)=\operatorname{cosec}(\frac{1}{z+1})$ از متغیر مختلط z را در نظر مــی‌گیــریم. در مــورد نقــاط تکــین (singular) و قطب‌های تابع کدام عبارت صحیح است؟

1) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطه تکین اساسی دارد

2) بی‌نهایت قطب مکرر دارد

3) فقط یک نقطه تکین اساسی دارد و قطب ندارد

4) $z=1$ تنها نقطه تکین تابع است

۴۷ـ ضریب جمله $(z+\pi i)^2$ در بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{\cosh z}{(z+\pi i)^2}$ عبارت است از:

1) $-\frac{1}{4!}$

2) $\frac{\pi i}{4!}$

3) $\frac{1}{4!}$

4) $-\frac{\pi i}{4!}$

۴۸ـ مانده‌های تابع $f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$ در قطب‌ها کدام هستند؟

1) $-1, 0$

2) $-1, 1$

3) $0, 1$

4) $0, 0$

۲۶ـ بخش اصلی تابع $f(z)=\dfrac{\quad}{z^3}$ حول $z=0$ و با فیمانده‌ی 1 در $z=0$ کدام هستند؟

1) $0, \dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}$ 2) $1, \dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}$ 3) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2z}$ 4) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}$

۵۰ـ اگر $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & , z\neq 0\\ 1 & , z=0\end{cases}$، آنگاه مقدار $f^{(2n)}(0)$ کدام است؟

1) $\dfrac{1}{2n+1}$ 2) $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 3) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 4) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n)}$

۵۱ـ سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{z}{z-k}$ در ناحیه $|z|>|k|$ (k ثابت) به توان‌های Z کدام است؟

1) $1+\dfrac{k}{z}+\dfrac{k^2}{z^2}+\mathbf{K}+(\dfrac{k}{z})^n+\mathbf{K}$

2) $\dfrac{z}{k}+1+(\dfrac{k}{z})^2+\mathbf{K}+(\dfrac{k}{z})^n+\mathbf{K}$

3) $z+1+\dfrac{k}{z}+\dfrac{k^2}{z^2}+\mathbf{K}+(\dfrac{k}{z})^n+\mathbf{K}$

4) $\dfrac{1}{z}+1+\dfrac{z}{k}+\dfrac{z^2}{k^2}+\mathbf{K}+(\dfrac{z}{k})^n+\mathbf{K}$

۵۲ـ $z=1$ قطب مرتبه چند تابع f زیر است؟

$$f(z)=\frac{1+\cos\pi z}{(z^2-1)^4\sin\pi z}$$

1) 3   2) 4   3) 5   4) 7

۵۳ـ مانده تابع $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-a)^3}$، $a\neq 0$ را نسبت به نقطه تکین آن تعیین کنید.

1) $\dfrac{ae^a}{2}$ 2) $(1+a)e^a$ 3) $(1+\dfrac{a}{2})e^a$ 4) $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{6})e^a$

۵۴ـ مانده تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$ در نقاص تکین چقدر است؟

1) $\operatorname{Res}_0 f=\dfrac{1}{4}, \operatorname{Res}_{2j} f=\dfrac{j\sin 2j}{16}, \operatorname{Res}_{-2j} f=\dfrac{-j\sin(2j)}{16}$

2) $\operatorname{Res}_0 f=0, \operatorname{Res}_{2j} f=\operatorname{Res}_{-2j} f=\dfrac{j\sin(2j)}{16}$

3) $\operatorname{Res}_0 f=\dfrac{1}{4}, \operatorname{Res}_{2j} f=\operatorname{Res}_{-2j} f=\dfrac{j\sin(2j)}{16}$

4) $\operatorname{Res}_0 f=0, \operatorname{Res}_{2j} f=\dfrac{2\cos 2j}{16}, \operatorname{Res}_{-2j} f=\dfrac{j\sin(2j)}{16}$

۵۵ـ مانده تابع $ze^{\frac{1}{z-1}}$ برابر است با:

1) -1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) 1

۵۶ـ مبدا مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$ دارد و مانده تابع در این نقطه چیست؟

1) قطب ساده و $\mathrm{Res}(0)=\frac{1}{2}$
2) قطب مرتبه دوم و $\mathrm{Res}(0)=1$
3) قطب ساده و $\mathrm{Res}(0)=1$
4) نقطه تکین برداشتنی و $\mathrm{Res}(0)=1$

۵۷ـ اگر $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ ، آنگاه سری لوران تابع f در ناحیه‌ی $1<|z|<2$ کدام است؟

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$
2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}$
4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$

۵۸ـ نقاط تکین $f(z)=\cot(\pi z)$ عبارتند از:

1) 0 2) $0,\pm\frac{1}{\pi}\pm\frac{2}{\pi},K$ 3) $0,\pm1,\pm2,K$ 4) $0,\pm1\pm\frac{1}{2},K$

۵۹ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}n^{n-2}(\frac{z}{3})^{n!}$ برابر است با:

1) 3 2) $\frac{1}{3}$ 3) 0 4) ∞

۶۰ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-i}{z-1})^n$ در صفحه‌ی مختلط کدام است؟ $(i=\sqrt{-1})$

1) $y>x$ 2) $y<x$ 3) $|z|<1$ 4) $|z|>1$

۶۱ـ در بسط تابع $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ در ناحیه $0<|z-1|<3$، ضریب جمله $(z-1)^2$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{27}$ 2) $\frac{2}{27}$ 3) $\frac{2}{81}$ 4) $\frac{1}{9}$

۶۲ـ شعاع همگرایی سری تیلور تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z-2)(z-3)}$ حول نقطه $z=i$ کدام است؟

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{3}$

۶۳ــ اگر سری لورانت تابع $f(z)=\frac{\quad}{z^2-3z+2}$ **به صورت** $f(z)=-\sum\limits_{n=-\infty} z^n-\sum\limits_{n=0}\frac{\quad}{2^{n+1}}$ **به دست آمده است، دامنه همگرایی دقیق سری عبارت است از:**

1) $0<|z|$ 2) $1<|z|$ 3) $|z|>2$ 4) $1<|z|<2$

۶۴ــ مانده تابع $f(z)=\frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^3}$ **در نقطه تکینی (singularity) آن برابر است با:**

1) $\frac{\pi^2}{2}$ 2) $\frac{i\pi^2}{2}$ 3) $-\frac{\pi^2}{2}$ 4) $-\frac{i\pi^2}{2}$

۶۵ــ ناحیه همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3z+4}{3z+1}\right)^n$ **، عبارت است از**

1) $\operatorname{Re}(z)<-\frac{1}{3}$ 2) $\operatorname{Re}(z)<-\frac{5}{6}$ 3) $\operatorname{Re}(z)>-\frac{1}{3}$ 4) $\operatorname{Re}(z)>-1$

۶۶ــ شعاع همگرایی بسط کسر $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ **حول نقطه** $z=\frac{3}{2}$ **کدام عدد است؟**

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\frac{3}{2}$ 4) 3

۶۷ــ سری لوران تابع f کدام است؟

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}\ ,\ 1<|z+1|<2$$

1) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+2}}$ 3) $\frac{1}{2(z+1)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$ 4) $\frac{1}{2(z+1)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

۶۸ــ تابع $f(z)=\frac{1}{z(1+z-e^z)}$ **در مبدا دارای:**

1) قطب مرتبه اول با مانده $-\frac{1}{18}$ 2) قطب مرتبه دوم با مانده $\frac{1}{18}$

3) قطب مرتبه سوم با مانده $-\frac{1}{18}$ 4) قطب مرتبه سوم با مانده $\frac{1}{18}$

۶۹ــ بسط لوران تابع $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ **در طوق** $0<|z-2|<1$ **عبارتست از:**

1) $-\frac{1}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$ 2) $\frac{1}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

3) $-\frac{1}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$ 4) $-\frac{2}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$

۷۰ــ مقدار مانده تابع $f(z) = e^{z}\sinh(\frac{1}{z})$ **در** $z = 0$ **برابر است با:**

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n+1)!}$ 3) 1 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$

۷۱ــ دنباله همگرای $z_1, z_2, \ldots$ **را که در آن** $z_n = \frac{1}{4}(1-\frac{5}{n}) + 3i(1+\frac{1}{n})$**، در نظر می‌گیریم. اگر** C **حد دنباله باشد، تعداد جملات دنباله که خارج ناحیه** $|z_n - c| < 0/01$ **می‌باشند، چندتاست؟**

1) 326 2) 301 3) 325 4) 300

1) گزینه 2

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

آزمون کوشی:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{|z-1|^{n+1}}}=\frac{2}{|z-1|}<1\Rightarrow|z-1|>2$$

2) گزینه 3

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\ ,\ |z|<1$$

از سری فوق انتگرال می‌گیریم:

$$-\mathrm{Ln}(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\mathbf{K},|z|<1$$

3) گزینه 4

$$f(z)=\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}=(1+z+z^2+\mathbf{K})(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\mathbf{K})$$

$(\frac{1}{z})$ ضریب $=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\mathbf{K}=e-1$

4) گزینه 2

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

سری لوران را در همسایگی $z=2$، در ناحیه‌ی $|z-2|<1$ می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+g(z),|z-2|<1$$

$$g(z)=\frac{1}{z-1}\Rightarrow g(2+t)=\frac{1}{1+t},|t|<1$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n,\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n,|z-2|<1$$

5) گزینه 3

$$\sin(in)=i\sinh(n)=\frac{i}{2}(e^n-e^{-n})$$

$$\frac{i}{2}\sum\frac{e^{n}-e^{-n}}{(z+i)^{n}}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\,\frac{e^{n}-e^{-n}}{\left|z+i\right|^{n}}}=\frac{e}{\left|z+i\right|}<1\Rightarrow\left|z+i\right|>e$$

6) گزینه 1

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow 1-\cos z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1-\cos z}{z^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}$$

7) گزینه 4

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^{n}},S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n}}{in+\frac{1}{2}},\left|e^{in}\right|=1,\left|in+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{n^{2}+\frac{1}{4}}$$

آزمون کوشی:

$$L_1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left|z+1\right|^{n}}}=\frac{1}{\left|z+1\right|}<1\Rightarrow\left|z+1\right|>1$$

$$L_2=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|z+1\right|^{n}}{\sqrt{n^{2}+\frac{1}{4}}}}=\left|z+1\right|<1\Rightarrow\left|z+1\right|<1$$

براساس نتایج فوق، سری همواره واگرا می‌باشد یعنی ناحیه همگرایی آن تهی است.

8) گزینه 4

$$\left|z\right|>4\Rightarrow\left|\frac{4}{z}\right|<1$$

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n}}{z^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n}}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^{n}}$$

$$\frac{1}{z-4}=\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}z^{-n}$$

9) گزینه 2

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{z})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n}}$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots \quad , \quad |z|<1$$

از سری فوق، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+4z^3+\cdots \quad , \quad |z|<1$$

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(1-(1+z))^2}=1+2(1+z)+3(1+z)^2+4(1+z)^3+\cdots , |z+1|<1$$

11) گزینه 2

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{z+\frac{z^2}{2!}+\cdots}{z^2}=\frac{1+\frac{z}{2!}+\cdots}{z}$$

بنابراین $z=0$، قطب مرتبه اول می‌باشد.

12) گزینه 1

$z=-1$ نقطه تکین می‌باشد با فرض $t=z+1$ یا $z=t-1$

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z+1}}=(t-1)^2e^{\frac{1}{t}}=(t^2-2t+1)(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}+\frac{1}{3!t^3}+\cdots)$$

$$(\frac{1}{t})\ \text{ضریب}=(\frac{1}{z+1})\ \text{ضریب}=\frac{1}{3!}-1+1=\frac{1}{6}$$

13) گزینه 3

آزمون کوشی:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{\frac{i}{z^2}}\right|^n}=\left|e^{\frac{i}{z^2}}\right|$$

$$\frac{i}{z^2}=\frac{i}{x^2-y^2+2ixy}=\frac{i(x^2-y^2-2ixy)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\frac{i(x^2-y^2)+2xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$\left|e^{\frac{i}{z^2}}\right|=e^{\mathrm{Re}(\frac{i}{z^2})}=e^{\frac{2xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}<1\Rightarrow \frac{2xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}<0$$

$$xy<0$$

14) گزینه 2

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)},|z+1|>2$$

$$t = z + 1 \Rightarrow f(z) = f(-1+t) = \frac{\;}{t(t-2)}, |t| > 2$$

$$|t| > 2 \Rightarrow \left|\frac{2}{t}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{t^2(1-\frac{2}{t})} = \frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{t^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{t^{n+2}} \quad , \ |t| > 2$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+2}} \quad , \ |z+1| > 2$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3}$$

15) گزینه 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(2z+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}(z+\frac{1}{2})^n \ , \ c_n = \frac{6^n}{n}, c_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1} = 6 \Rightarrow R = \frac{1}{6}$$

16) گزینه 1

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$\cos z = 0 \Rightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ قطب‌های ساده

$$Res(f) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -1$$

17) گزینه 4

این تست مشابه تست (12) می‌باشد.

18) گزینه 2

براساس پاسخ تست (14)، دو جمله‌ی اول بسط لوران به صورت $\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3}$ می‌باشد بنابراین ضریب $\frac{1}{(z+1)^3}$ برابر 2 است.

19) گزینه 3

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 1}{z^5 + 2z^3 + z} = \frac{z^3 - 2z + 1}{z(z^2+1)^2} = \frac{z^3 - 2z + 1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$$

20) گزینه 4

$$t = z-1$$

$$f(z) = f(1+t) = (1+t)^2 e^{\frac{1}{t}} = (t^2+2t+1)e^{\frac{1}{t}}$$

$$f(z) = (t^2+2t+1)\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}+\frac{1}{3!t^3}+\ldots\right)$$

ضریب $(\frac{1}{t})$ = ضریب $(\frac{1}{z-1})$ $= \frac{1}{3!}+1+1=\frac{13}{6}$

21) گزینه 4

$$f(z) = \frac{2}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$1<|z|<2 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1,\ \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$-\frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\ ,\ |z|>1$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{2}{-2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\ ,\ |z|<2$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\ ,\ 1<|z|<2$$

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)$$

22) گزینه 3

آزمون کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2z}{2z+1}\right|^n} = \left|\frac{2z}{2z+1}\right| < 1$$

$$\frac{2z}{2z+1} = \frac{2x+i2y}{1+2x+i2y}$$

$$\left|\frac{2z}{2z+1}\right|<1 \Rightarrow 4x^2+4y^2 < (1+2x)^2+4y^2 \Rightarrow 1+4x>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{4}$$

$z=0$ ریشه‌ی مرتبه 4 مخرج و ریشه‌ی مرتبه 1 صورت است بنابراین قطب مرتبه 3 تابع $\frac{\sinh z}{z^4}$ می‌باشد.

$$\sinh z = z+\frac{z^3}{3!}+\mathbf{K}$$

$\frac{\sinh z}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!z}+\mathbf{K}\Rightarrow$ است $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ مانده برابر

24) گزینه 4

بسط مک لورن $\cos z$، شامل جمله‌ی $\frac{z^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$ است بنابراین

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^{2n+1}}=\mathbf{K}+(-1)^n\frac{1}{(2n)!z}+\mathbf{K}$$

بنابراین مانده‌ی $f(z)$ در $z=0$ برابر $\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ می‌باشد.

25) گزینه 2

آزمون کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{\frac{i}{z+1}}\right|^n}=\left|e^{\frac{i}{z+1}}\right|<1$$

$$\frac{i}{z+1}=\frac{i}{x+1+iy}=\frac{i(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{i(x+1)+y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\left|e^{\frac{i}{z+1}}\right|=e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}<1\Rightarrow\frac{y}{(x+1)^2+y^2}<0\Rightarrow y<0$$

26) گزینه 4

$z=0$ تکین اساسی می‌باشد.

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^{32!}}+\mathbf{K}\right)=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\mathbf{K}$$

بنابراین مانده در $z=0$ برابر $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ می‌باشد.

27) گزینه 3

$$t=z-1$$

$$f(z)=f(1+t)=(1+t)\sin(\frac{1+t}{t})=(1+t)\sin(\frac{1}{t}+1)$$

$$f(z)=(1+t)(\cos 1\sin\frac{1}{t}+\sin 1\cos\frac{1}{t})$$

$$f(z)=(\cos 1)(1+t)(\frac{1}{t}-\frac{1}{3!t^3}+\mathbf{K})+(\sin 1)(1+t)(1-\frac{1}{2!t^2}+\mathbf{K})$$

$$(\frac{1}{t})\ \text{ضریب}=(\frac{1}{z-1})\ \text{ضریب}=(\cos 1)(1)+(\sin 1)(-\frac{1}{2})=\frac{2\cos 1-\sin 1}{2}$$

28) گزینه 2

$$f(z)=\frac{2}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}$$

$$1<|z|<3\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1,\left|\frac{z}{3}\right|<1$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\ ,\ |z|>1$$

$$-\frac{1}{z+3}=-\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}},|z|<3$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}\ ,\ 1<|z|<3$$

29) گزینه 4

$z=0$ یک نقطه‌ی تکین تابع است.

$$\sin\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{1}{z}=k\pi\Rightarrow z=\frac{1}{k\pi},k=\pm 1,\pm 2,\ldots$$

نقاط $z=\frac{1}{k\pi},\ k=\pm 1,\pm 2,\mathbf{K}$ قطب ساده‌ی تابع هستند.

چون $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\pi}=0$ بنابراین در هر همسایگی $z=0$، نقاط تکین دیگری وجود دارد بنابراین $z=0$ یک تکین غیرتنها می‌باشد.

30) گزینه صحیح ندارد.

$$t=z-1$$

$$f(z)=f(1+t)=\frac{e(1+t)-e^{1+t}}{t^2}=\frac{e(1+t-e^t)}{t^2}=\frac{-e(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\mathbf{K})}{t^2}$$

$$f(z)=-e(\frac{}{2!}+\frac{}{3!}+\frac{}{4!}+\mathbf{K})=-e\sum_{n=0}\frac{}{(n+2)!}=-e\sum_{n=0}\frac{}{(n+2)!}$$

$$-\frac{e}{(n+2)!}=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(1)=-\frac{e}{(n+2)(n+1)}$$

31) گزینه 4

$$g(z)=1-\cosh z\Rightarrow g(0)=g'(0)=0,g''(0)\neq 0$$

$z=0$ ریشه مرتبه 2، $1-\cosh z$ و ریشه مرتبه 1، $\sinh z$ است بنابراین قطب مرتبه 1 تابع $f(z)$ می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\sinh z}{1-\mathrm{coh}z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos hz}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{-\sinh z}=-2$$

32) گزینه 4

نقطه $z=0$، تکین تابع است بنابراین ناحیه‌ی همگرایی سری لوران $|z-1|<1$ یا $|z-1|>1$ می‌باشد.

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,|z-1|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n},|z-1|>1$$

سری لوران مربوط به $|z-1|>1$ یا $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$ در گزینه (4) موجود است.

33) گزینه 3

نقاط تکین تابع $z=i,-1,-2i$ می‌باشد. شعاع همگرایی با کوتاهترین فاصله بین $z_0=1$ و نقاط تکین تابع، برابر است.

$$|1-i|=\sqrt{2},|1-(-1)|=2,|1+2i|=\sqrt{5}\Rightarrow R=\sqrt{2}$$

34) گزینه 4

$$f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}=e^{\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}}$$

$$\cos\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{1}{z}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=\frac{2}{(2k+1)\pi},k=0,\pm1,\pm2,\mathbf{K}$$

نقاط تکین تابع به صورت $\frac{2}{(2k+1)\pi}, z=0$ می‌باشد. چون $\lim_{k\to\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}=0$ بنابراین در هر همسایگی $z=0$، نقاط تکین دیگری از تابع نیز وجود دارد یعنی $z=0$ نقطه تکین غیرتنها می‌باشد.

$g(z)=e^z-1 \Rightarrow g(0)=0, g'(0)\neq 0$

$z=0$ قطب مرتبه یک e^z-1 می‌باشد بنابراین قطب مرتبه دوم $f(z)$ است.

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-ze^z}{2e^z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{-z}{2(e^z-1)}$$

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\frac{-1}{2e^z}=-\frac{1}{2}$$

36) گزینه 4

$z=1$ یک نقطه تکین اساسی تابع است $f(z)=\sec\left(\frac{1}{z-1}\right)=\dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$

$$\cos\frac{1}{z-1}=0 \Rightarrow \frac{1}{z-1}=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=1+\frac{2}{(2k+1)\pi}, k=0\pm 1,\pm 2,\dots$$

$\lim\limits_{k\to\infty} 1+\dfrac{2}{(2k+1)\pi}=0 \Rightarrow$ نقطه تکین غیرتنهای اساسی می‌باشد $z=1$

نقاط $z=1+\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$، $k=0,\pm 1,\dots$، قطب ساده هستند.

37) گزینه 1

$z=0$ ریشه‌ی مرتبه 3، z^3 و ریشه‌ی مرتبه 2، $1-\cos z$ می‌باشد بنابراین $z=0$ قطب ساده‌ی $f(z)$ است.

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^2}{2}}{z^2}=\frac{1}{2}$$

38) گزینه 1

$$f(z)=\sin(\sin z)=\sin\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)$$

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{6}+\dots\right)-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{6}+\dots\right)^3+\dots=z-\frac{z^3}{6}-\frac{z^3}{6}+\dots=z-\frac{z^3}{3}+\dots$$

39) گزینه 4

$z=0$ قطب مرتبه 2 تابع است بنابراین

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2e^z}{1-\cos z}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{e^z\left[(z^2+2z)(1-\cos z)-z^2\sin z\right]}{(1-\cos z)^2}=$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(z^{2}+2z)(\frac{\quad}{2})-z^{3}}{\frac{z^4}{4}}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\quad}{2}}{\frac{z^4}{4}}=2$$

40) گزینه 4

$$\sinh(\pi i)=i\sin(\pi)=0$$

$z=\pi i$ ریشه‌ی مرتبه یک $\sinh(z)$ و ریشه‌ی مرتبه دو $(z^2+\pi^2)^2$ است بنابراین قطب ساده تابع می‌باشد.

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i}(f)=\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z)=\lim_{z\to\pi i}\frac{(z-\pi i)\sinh z}{(z+\pi i)^2(z-\pi i)^2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i}(f)=\lim_{z\to\pi i}\frac{\sinh z}{-4\pi^2(z-\pi i)}=\lim_{z\to\pi i}\frac{\cosh z}{-4\pi^2}=\frac{\cos(\pi)}{-4\pi^2}=\frac{1}{4\pi^2}$$

41) گزینه 2

$$f(z)=\frac{2}{z(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z}-\frac{2}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

$$1<|z|<2\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1\,,\ \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$-\frac{2}{z-1}=-\frac{2}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\mathbf{K})\ ,\ |z|>1$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}=-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\mathbf{K})\ ,\ |z|<2$$

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{2}{z}(1+\frac{1}{z}+\mathbf{K})-\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\mathbf{K})\ ,\ 1<|z|<2$$

$(\frac{1}{z})$ ضریب $=1-2=-1$

42) گزینه 4

$$t=z+\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(z)=f(t-\frac{\pi}{2})=\frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t}=\frac{-\cos t}{t}$$

$$f(z)=-\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n)!}$$

43) گزینه 4

آزمون کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z+i}{z-3i}\right|}=\left|\frac{z+i}{z-3i}\right|<1$$

$$\left|\frac{x+iy+i}{x+iy-3i}\right|<1\Rightarrow x^2+(y+1)^2<x^2+(y-3)^2\Rightarrow 1+2y<9-6y$$

$$\mathrm{Im}(z)<1$$

44) گزینه 4

$$|z|>1\Rightarrow\frac{1}{|z|}<1\Rightarrow\frac{1}{|z^2|}<1$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\mathbf{K},|z|>1$$

بنابراین $b_2=1,a_2=0$ می‌باشد.

45) گزینه 3

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{nz}}{n+1},f_n(z)=\frac{a^{nz}}{n+1}\ ,\ f_{n+1}(z)=\frac{a^{nz+z}}{n+2}$$

آزمون نسبت (دالامبر):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2}|a^z|)=|a^z|<1$$

$$|a^z|=|a^{x+iy}|=a^x<1\ ,\ 0<a<1\Rightarrow x>0\Rightarrow \mathrm{Re}(z)>0$$

46) گزینه 1

$z=-1$ نقطه تکین اساسی می‌باشد.

$$f(z)=\frac{1}{\sin(\frac{1}{z+1})}$$

$$\sin\frac{1}{z+1}=0\Rightarrow\frac{1}{z+1}=k\pi\Rightarrow z=-1+\frac{1}{k\pi},k=\pm1,\pm2,\mathbf{K}$$

$\lim_{k\to\infty}(-1+\frac{1}{k\pi})=-1\Rightarrow$ نقطه تکین غیرتنهای اساسی می‌باشد $z=-1$

نقاط $z=-1+\frac{1}{k\pi},K=\pm1,\pm2,\mathbf{K}$، قطب‌های ساده هستند.

47) گزینه 1

$$t = z+\pi i \Rightarrow f(z) = f(t-\pi i) = \frac{\quad}{t^2}$$

$$\cosh(t-\pi i) = \cos i(t-\pi i) = \cos(\pi + it) = -\cos(it) = -\cosh t$$

$$f(z) = -\frac{\cosh t}{t^2} = -\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}+\ldots\right)$$

(t^2) ضریب $=(z+\pi i)^2$ ضریب $= -\frac{1}{4!}$

48) گزینه 2

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f) = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{(z-1)^2} = -1$$

49) گزینه 1

$$f(z) = \frac{e^z \cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z^2}{2}+z+\frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}$$

مانده در نقطه‌ی $z=0$ برابر صفر است.

50) گزینه 2

$$f(z) = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$k=n \Rightarrow \frac{1}{z}(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}$$

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

51) گزینه 1

$$|z| > |k| \Rightarrow \left|\frac{k}{z}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{z}{z-k} = \frac{1}{1-\frac{k}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^n} = 1+\frac{k}{z}+\frac{k^2}{z^2}+\ldots+\left(\frac{k}{z}\right)^n+\ldots$$

52) گزینه 1

$$g(z) = 1+\cos\pi z \Rightarrow g(1) = g'(1) = 0\ ,\ \ g''(1) \neq 0$$

$h(z) = (z - 1) \sin \pi z = (z+1) (z - 1) \sin \pi z$

$z=1$ ریشه‌ی مرتبه 5 تابع $h(z)$ و ریشه‌ی مرتبه 2 تابع $g(z)$ می‌باشد بنابراین $z=1$ قطب مرتبه 3 تابع $f(z)$ است.

53) گزینه 3

$z=a$ قطب مرتبه سوم تابع $f(z)$ است

$$\underset{z=a}{\mathrm{Res}}(f) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to a}((z-a)^3 f(z))'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to a}(ze^z)'' = (1+\frac{a}{2})e^a$$

54) گزینه 3

$z^2(z^2+4)=0 \Rightarrow z=0, 2i, -2i$:قطب‌های ساده

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{z^2(z^2+4)} = \frac{1}{4}$$

$$\underset{z=2i}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z^2(z+2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i)$$

$$\underset{z=-2i}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z^2(z-2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i)$$

55) گزینه 2

$z=1$ تکین تابع می‌باشد.

$$t = z-1 \Rightarrow f(z) = f(1+t) = (1+t)e^{-\frac{1}{t}}$$

$$f(z) = (1+t)(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}-\mathbf{K})$$

$z=1$ مانده در $: z=1$ $= -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ضریب $(\frac{1}{z-1}) =$ ضریب $(\frac{1}{t})$

56) گزینه 3

$z=0$ قطب مرتبه یک (ساده) تابع $\frac{\sin z}{z^2}$ می‌باشد.

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{z^2} = 1$$

57) گزینه 2

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$1<|z|<2 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<1, \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{z^n}=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}},\ |z|>1$$

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n\ ,|z|<2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n\ ,1<|z|<2$$

58) گزینه 3

$$f(z)=\cot(\pi z)=\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

$$\sin(\pi z)=0\Rightarrow \pi z=k\pi\Rightarrow z=k;\ k=0\pm1,\pm2,\mathbf{K}$$

59) گزینه 1

آزمون کوشی:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{n-2}(\frac{z}{3})^{n!}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{n-2}\left|\frac{z}{3}\right|^{n!}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{n-2}{n}}\left|\frac{z}{3}\right|^{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}n\left|\frac{z}{3}\right|^{(n-1)!}$$

اگر $\left|\frac{z}{3}\right|>1$ باشد آنگاه $L=\infty$ و سری واگراست

اگر $\left|\frac{z}{3}\right|<1$ باشد آنگاه $L=0$ و سری همگرا خواهد بود بنابراین ناحیه همگرایی $|z|<3$ و شعاع همگرایی برابر 3 می‌باشد.

60) گزینه 1

آزمون کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z-i}{z-1}\right|^n}=\left|\frac{z-i}{z-1}\right|<1$$

$$\left|\frac{x+iy-i}{x+iy-1}\right|<1\Rightarrow x^2+(y-1)^2<(x-1)^2+y^2\Rightarrow -2y<-2x$$

$$x<y$$

61) گزینه 3

$$t=z-1\Rightarrow f(z)=f(1+t)=\frac{1+t}{t(t+3)}\ \ ,\ \ 0<|t|<3$$

$0<|t|<3 \Rightarrow \left|\frac{t}{3}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{3}\frac{1}{t}+\frac{2}{3}\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3t}+\frac{2}{3}\frac{1}{3(1+\frac{t}{3})}=\frac{1}{3t}+\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}t^n$$

$$f(z)=\frac{1}{3(z-1)}+\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n \ , \ 0<|z-1|<3$$

ضریب $(z-1)^2$ $=\frac{2}{81}$

62) گزینه 2

نقاط تکین: $z=1,-1,2,3$

$$|i-1|=\sqrt{2} \ , \ |i+1|=\sqrt{2} , \ |i-2|=\sqrt{5} \ , \ |i-3|=\sqrt{10} \Rightarrow R=\sqrt{2}$$

63) گزینه 4

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

در سری $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$ قدر نسبت سری هندسی برابر $\frac{1}{z}$ است و در سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ قدر نسبت سری هندسی برابر $\frac{z}{2}$ است

بنابراین

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<1 \Rightarrow |z|<2$$

بنابراین ناحیه همگرایی $1<|z|<2$ می‌باشد.

64) گزینه 1

$z=1$ قطب مرتبه 3 می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}((z-1)^3 f(z))''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(e^{i\pi z})''=-\frac{\pi^2}{2}e^{i\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

65) گزینه 2

آزمون کوشی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{3z+4}{3z+1}\right|^n}=\left|\frac{3z+4}{3z+1}\right|<1$$

$$\left|\frac{\quad}{3x+1+3iy}\right| < 1 \Rightarrow (3x+4)^2 + 9y^2 < (3x+1)^2 + 9y^2$$

$$24x+16 < 6x+1 \Rightarrow x < -\frac{5}{6}$$

66) گزینه 1

$z=1\,,\ z=3$ نقاط تکین

$$\left|\frac{3}{2}-1\right| = \frac{1}{2}\,,\ \left|\frac{3}{2}-3\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

67) گزینه1

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

$$t = z+1 \Rightarrow f(z) = f(t-1) = \frac{1}{t(t-2)}, 1<|t|<2$$

$$1<|t|<2 \Rightarrow \left|\frac{t}{2}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{-2t(1-\frac{t}{2})} = -\frac{1}{2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

68) گزینه 3

$$1+z-e^z = 1+z-(1+z+\frac{z^2}{2!}+\mathbf{K}) = -(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\mathbf{K})$$

$$f(z) = \frac{-1}{z^3(\frac{1}{2}+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{24}+\mathbf{K})} \Rightarrow$$ می‌باشد f قطب مرتبه 3 تابع $z=0$

$$\begin{array}{l|l}
1 & \frac{1}{2}+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{24}+\mathbf{K} \\ \hline
1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{12}+\mathbf{K} & 2-\frac{2}{3}z+\frac{1}{18}z^2+\mathbf{K} \\ \hline
-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{12}+\mathbf{K} & \\
-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{9}+\mathbf{K} & \\ \hline
\frac{1}{36}z^2+\mathbf{K} & \\
\frac{1}{36}z^2+\mathbf{K} & \\ \hline
\mathbf{K}\mathbf{K} &
\end{array}$$

$$f(z) = -\frac{\;}{z^3}(z - \frac{\;}{3}z + \frac{\;}{18}z + \dots) = -\frac{\;}{z^3} + \frac{\;}{3z^2} - \frac{\;}{18z} + \dots$$

مانده در $z=0$ برابر $-\frac{1}{18}$ است.

69) گزینه 2

$$f(z) = \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \quad , 0 < |z-2| < 1$$

70) گزینه 1

$$f(z) = e^z \sinh(\frac{1}{z}) = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots)$$

$$(\frac{1}{z}) \text{ ضریب} = 1 + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

71) گزینه 3

$$C = \lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{4} + 3i \Rightarrow z_n - c = -\frac{5}{4n} + \frac{3i}{n}$$

$$|z_n - c| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4n} < 0/01 \Rightarrow n > 325$$

بنابراین جملاتی که خارج ناحیه‌ی $|z_n - c| < 0/01$ قرار دارند عبارتند از $z_1, z_2, \dots, z_{325}$ که 325 جمله می‌باشند.

4-1) انتگرال روی خط در صفحه مختلط

منحنی **C** در صفحه، معمولاً به صورت پارامتری $a \le t \le b$ و $y = y(t)$ و $x = x(t)$ بیان می‌شود. به ازای هر مقدار پارامتر حقیقی **t**، یک نقطه $z = (x, y)$ در صفحه مشخص می‌شود بنابراین خم **C** را به صورت زیر نیز می‌توان نمایش داد

$$z(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$$

منحنی **C**، جهت‌دار است که نقطه شروع آن $z(a)$ و نقطه پایان آن $z(b)$ می‌باشد. خم **C** را بسته می‌نامیم اگر نقاط شروع و پایان بر هم منطبق باشند یعنی $z(a) = z(b)$ در غیر اینصورت خم **C** را باز می‌نامیم.

خم **C** را ساده می‌گوئیم اگر خودش را قطع نکند. بنابراین خم باز **C** ساده است اگر به ازای هر دو **t** مختلف، $t_1 \ne t_2$، $z(t_1) \ne z(t_2)$ باشد و خم بسته **C** ساده می‌باشد اگر فقط نقاط شروع و پایان آن بر هم منطبق باشند.

منحنی **C** را پیوسته قطعه‌ای می‌نامیم اگر $z(t)$ در بازه‌ی $a \le t \le b$ پیوسته قطعه‌ای باشد یعنی تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $z(t)$ در این بازه متناهی بوده و در نقاط ناپیوستگی دارای حدود چپ و راست باشد.

اگر توابع $y(t), x(t)$ در بازه $a \le t \le b$، مشتق‌پذیر باشند آنگاه خم **C** را مشتق‌پذیر می‌نامیم و در این صورت

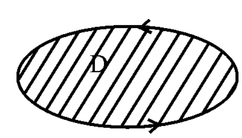
$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),\ a \le t \le b$$

$$dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))\,dt$$

خم **C** را در بازه‌ی $a \le t \le b$، هموار قطعه‌ای می‌نامیم اگر $z'(t)$ در این بازه، پیوسته قطعه‌ای باشد.

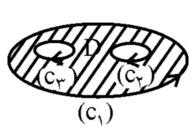
اگر **D** یک ناحیه‌ی همبند ساده با مرز **C** باشد در این صورت خم **C** دارای جهت مثبت است اگر جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد

C



(خم C با جهت مثبت)

اگر ناحیه‌ی **D**، همبند غیر ساده (مرکب) باشد در اینصورت جهت مثبت برای مرز خارجی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برای مرزهای داخلی هم جهت با حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.



با جهت مثبت) c_3, c_2 و مرزهای داخلی c_1(مرز خارجی

اگر خم $\mathbf{C}$، هموار قطعه‌ای با معادله‌ی $z(t)=x(t)+iy(t), a\le t\le b$ باشد آنگاه انتگرال $f(z)$ روی منحنی $\mathbf{C}$ بـه صـورت زیر است

$$\int_c f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$$

اگر $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ باشد آنگاه

$$\int_c f(z)dz=\int_c (u+iv)(dx+idy)=\int_c (udx-vdy)+i\int_c (udy+vdx)$$

اگر خم $\mathbf{C}$، بسته باشد در اینصورت انتگرال مختلط به صورت $\oint_c f(z)\,dz$ نمایش داده می‌شود.

نکته 1:

الف) اگر مسیر $\mathbf{C}$ را به دو قسمت C_2, C_1 تقسیم کنیم آنگاه

$$\int_c f(z)dz=\int_{c_1} f(z)dz+\int_{c_2} f(z)dz$$

ب) اگر جهت مسیر $\mathbf{C}$ را عوض کنیم آن را به صورت $(-C)$ نمایش می‌دهیم در اینصورت

$$\int_{-c} f(z)dz=-\int_c f(z)dz$$

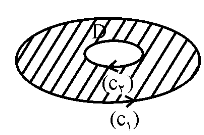
قضیه کوشی:

اگر خم $\mathbf{C}$، هموار قطعه‌ای بوده و مرز حوزه‌ی $\mathbf{D}$ باشد و تابع $f(z)$ داخل و روی منحنی $\mathbf{C}$ تحلیلی باشد آنگاه

$$\oint_c f(z)\,dz=0$$

در قضیه کوشی اگر حوزه‌ی $\mathbf{D}$ مرکب باشد آنگاه مرز $\mathbf{C}$ شامل مرز خارجی و مرزهای داخلی است.

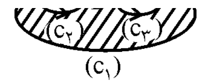
در شکل زیر اگر $f(z)$ در حوزه‌ی $\mathbf{D}$ و روی خم‌های C_2, C_1 تحلیلی باشد آنگاه



$$\oint_{c_1} f(z)\,dz+\oint_{c_2} f(z)\,dz=0$$

C_2, C_1 هر دو جهت مثبت دارند.

در شکل زیر مرز خارجی (C_1) دارای جهت مثبت و مرزهای داخلی (C_3, C_2) دارای جهت منفـی هسـتند بنـابراین اگـر $f(z)$ در حوزه‌ی $\mathbf{D}$ و روی خم‌های C_3, C_2, C_1 تحلیلی باشد آنگاه



$$\oint_{c_1} f(z)\,dz = \oint_{c_2} f(z)\,dz + \oint_{c_3} f(z)\,dz$$

نتایج قضیه کوشی:

1) فرض کنید **D** یک ناحیه همبند ساده باشد و **A , B** دو نقطه از این ناحیه هستند. اگر C_2, C_1 دو منحنی دلخواه در **D** باشند که نقطه **A** را به **B** وصل می‌کنند در این صورت با فرض تحلیلی بودن $f(z)$ در **D**، انتگـرال $f(Z)$ از **A** تـا **B** بر خم‌های C_2, C_1 با هم برابرند.

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz$$

رابطه‌ی بالا به این معناست که اگر $f(z)$ در **D** تحلیلی باشد، انتگرال $\int_c f(z)dz$ مستقل از مسیر است.

2) فرض کنید $f(z)$ در حوزه‌ی **D** تعریف شده و خم ساده‌ی **C** در این حوزه نقطه‌ی z_0 را به نقطه‌ی z_1 وصـل کنـد در اینصورت اگر تابع تحلیل $F(z)$ در رابطه‌ی $F'(z) = f(z)$ صدق کند آنگاه

$$\int_c f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

تابع $F(z)$ را تابع اولیه‌ی $f(z)$ می‌نامیم.

نکته 2: انتگرال‌های مختلط را در تست‌های کنکور به سه گروه زیر می‌توانیم تقسیم کنیم.

1) اگر $f(z)$ تابع تحلیلی باشد انتگرال آن روی مسیر بسته برابر صفر است و انتگرال آن روی مسیر باز با استفاده از تـابع اولیه (نتیجه قضیه کوشی) قابل محاسبه است.

2) اگر $f(z)$ داخل و روی مسیر بسته‌ی **C** دارای تعدادی نقطه تکین تنها باشد در اینصورت از قضیه مانـده‌هـا اسـتفاده می‌کنیم که در بخش بعد آن را معرفی می‌کنیم.

3) اگر $f(z)$ تابع غیر تحلیلی باشد بطوری که شامل نقاط تکین غیرتنها بوده و یا نقاط غیرتحلیلـی آن تکـین نباشـند در اینصورت به روی مسیر **C** حرکت کرده و در هر قسمت با استفاده از معادله‌ی مسیر، انتگرال مختلط را محاسبه می‌کنیم.

در مورد انتگرال‌های گروه (1) و (3) چند مثال را در این قسمت بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: مقدار $\int (z^2+1)^2 dz$ در امتداد منحنی به معادله پارامتری $\{ y = a(1-\cos t)$ از نقطه $t=0$ تا $t=2\pi$ برابر است با

1) $\frac{2\pi a}{15}(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2)$

2) $\frac{2a\pi}{15}(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 - 15)$

3) $\frac{2a\pi}{15}(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 + 15)$

4) $\frac{2a\pi}{15}(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 - 25)$

پاسخ: گزینه 3

تابع $f(z) = (z^2+1)^2$ تحلیلی است بنابراین از روش تابع اولیه استفاده می‌کنیم

$$t = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z_0 = 0$$

$$t = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi a , y = 0 \Rightarrow z_1 = 2\pi a$$

$$\int (z^2+1)^2 dz = \int_0^{2\pi a} (z^4 + 2z^2 + 1) dz = \left[\frac{z^5}{5} + \frac{2z^3}{3} + z \right]_0^{2\pi a}$$

$$= \frac{2\pi a}{15}(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 + 15)$$

مثال ۲: اگر C پاره‌خط واصل از نقطه i به نقطه ۱ باشد مقدار انتگرال $\int z\bar{z} d\bar{z}$ برابر است با:

1) $\frac{2}{3}(1-i)$

2) $\frac{2}{3}(1+i)$

3) $2+3i$

4) $2-3i$

پاسخ: گزینه 2

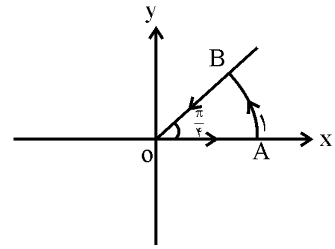
پاره‌خطی که نقطه z_1 را به z_2 متصل می‌کند دارای معادله‌ی $z = z_2 t + z_1(1-t)$، $0 \le t \le 1$ است بنابراین مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد.

$$z(t) = t + i(1-t) \ , \ 0 \le t \le 1$$

$$\bar{z} = t - (1-t)i, z\bar{z} = t^2 + (1-t)^2 , d\bar{z} = (1+i)dt$$

$$\int z\bar{z} d\bar{z} = \int_0^1 (t^2 + (1-t)^2)(1+i)\, dt = (1+i)\int_0^1 (2t^2 - 2t + 1) dt = \frac{2}{3}(1+i)$$

مثال ۳: حاصل انتگرال $\oint_C \bar{z}dz$ روی مسیر OABO نشان داده شده در شکل برابر است با



1) 0 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $j\frac{\pi}{4}$ 4) $1+j\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه 3

$\bar{z}$ در تمام صفحه غیرتحلیلی است یعنی نقاط غیرتحلیلی آن تکین نمی‌باشند بنابراین برای محاسبه انتگرال روی مسیر حرکت کرده و از معادله‌ی مسیر استفاده می‌کنیم.

$$OA: z = x\ ,\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow \bar{z} = x, dz = dx$$

$$AB: z = e^{j\theta}\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \bar{z} = e^{-j\theta}, dz = je^{j\theta}d\theta$$

$$BO: z = re^{j\frac{\pi}{4}}\ ,\ r: 1 \to 0 \Rightarrow \bar{z} = re^{-j\frac{\pi}{4}}, dz = e^{j\frac{\pi}{4}}dr$$

$$\oint_C \bar{z}dz = \int_{OA} \bar{z}dz + \int_{AB} \bar{z}dz + \int_{BO} \bar{z}dz = \int_0^1 xdx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} jd\theta + \int_1^0 rdr = j\frac{\pi}{4}$$

قضیه مررا:

هرگاه $\mathbf{f}$ بر ناحیه همبند ساده $\mathbf{D}$ پیوسته بوده و به ازای هر مرز بسته $\mathbf{C}$ واقع در $\mathbf{D}$، $\oint_C f(z)\,dz = 0$ باشد آنگاه $\mathbf{f}$ در سراسر $\mathbf{D}$ تحلیلی است.

قضیه مررا، عکس قضیه کوشی می‌باشد.

نکته 3: فرض کنید $f(z)$ یک تابع پیوسته بر روی منحنی هموار قطعه‌ای $\mathbf{C}$ باشد. اگر به ازای هر $\mathbf{Z}$ روی $\mathbf{C}$، $|f(z)| \le M$ و طول منحنی $\mathbf{C}$ برابر $\mathbf{L}$ باشد آنگاه $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$

مثال ۴: ماکزیمم $\left|\int_C e^{\mathrm{Re}(z)}dz\right|$ را حساب کنید در صورتیکه $\mathbf{C}$ دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدا مختصات باشد.

پاسخ:

$$C: z(t) = 2(\cos t + i\sin t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

طول مسیر $\mathbf{C}$ برابر $L=4\pi$ می‌باشد بنابراین

$$\left|\int_c e^{\mathrm{Re}(z)}dz\right| \le 4\pi e^2$$

4-2) انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها

فرض کنید $f(z)$ در ناحیه $\mathbf{D}$ به جز نقاط $z_1,\ldots,z_n$ تحلیلی باشد و $f(z)$ در این نقاط تکین تنها باشد. اگر $\mathbf{C}$ یک مسیر بسته ساده در ناحیه $\mathbf{D}$ و شامل نقاط $z_1,\ldots,z_n$ باشد آنگاه

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\mathrm{Res}}(f)$$

در انتگرال فوق مسیر $\mathbf{C}$ دارای جهت مثبت می‌باشد.

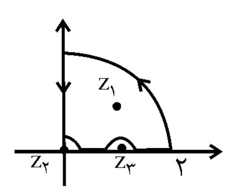
اگر تابع $\mathbf{f}$ در تمام نقاط داخل و روی مسیر $\mathbf{C}$، تحلیلی باشد آنگاه مجموع مانده‌های تابع برابر صفر بوده و $\oint_c f(z)\,dz=0$ می‌باشد یعنی به قضیه کوشی می‌رسیم.

نکته 4: اگر تابع $\mathbf{f}$ بر روی مسیر $\mathbf{C}$ نیز دارای نقاط تکین تنها باشد در اینصورت $\mathbf{C}$ را تغییر می‌دهیم بطوریکه از نزدیکی این نقاط عبور کند اگر تغییر زاویه‌ی $\mathbf{C}$ در نزدیکی نقطه تکین z_0 برابر β باشد در اینصورت در قضیه‌ی مانده‌ها جمله‌ی $i\beta\,\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(f)$ اضافه می‌گردد.

مثال ۵: اگر $\mathbf{C}$ مرز ربع دایره‌ی $|z|\le 2$ و $0\le \arg(z)\le \frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت باشد، مقدار انتگرال $I=\oint_C \frac{1}{z(z-1)(z-1-i)}dz$ را تعیین کنید.

پاسخ: نقاط تکین تنها: $z(z-1)(z-1-i)=0 \Rightarrow z=0,1,1+i$

$z_1=1+i$ داخل مسیر بسته‌ی $\mathbf{C}$ و $z_3=1, z_2=0$ روی مسیر $\mathbf{C}$ قرار دارند بنابراین براساس نکته (4) مسیر $\mathbf{C}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



تغییر زاویه‌ی $(\mathbf{C})$ در نزدیکی z_2 برابر $\frac{\pi}{2}$ و در نزدیکی z_3 برابر π می‌باشد بنابراین

$$I = 2\pi i\,\underset{z=1+i}{\mathrm{Res}}(f)+\frac{\pi}{2}i\,\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)+\pi i\,\underset{z=1}{\mathrm{Res}}(f)$$

$$\underset{z=1+i}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)(f)=\lim_{z\to 1+i}\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{-1+i}=\frac{-1-i}{2}$$

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)(z-1-i)}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$$

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z(z-1-i)}=i$$

$$I=2\pi i\left(\frac{-1-i}{2}\right)+\frac{\pi}{2}i\left(\frac{1-i}{2}\right)+\pi i(i)\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}(1-3i)$$

قضیه انتگرال‌کوشی (مشتقات یک تابع تحلیلی):

اگر $f(z)$ در حوزه ساده **D** تحلیلی باشد، آنگاه **f** در **D** از هر مرتبه‌ای مشتق دارد و بنابراین همه این مشــتقات نیــز در **D** تحلیلی هستند. مقدار این مشتقات در نقطه‌ی z_0 از **D** عبارت است از

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\ n=0,1,2,\ldots$$

که در آن **C** مسیر بسته ساده‌ای در **D** است که z_0 درون آن قرار دارد و خم **C** در جهت مثبت پیموده می‌شود.

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$n=0\Rightarrow\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\,f(z_0)$$

در انتگرال فوق، $z=z_0$ یک قطب مرتبه $n+1$ برای تابع $g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ می‌باشد بنابراین

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(g)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{n+1}g(z)\right)^{(n)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

یعنی مقدار انتگرال فوق با استفاده از مانده‌ها برابر $2\pi i\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(g)=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$ می‌باشد چون انتگرال فوق براســاس قضــیه مانده‌ها قابل محاسبه است بنابراین در حل تست‌ها استفاده از آن لزومی ندارد.

مثال ۶: مقدار انتگرال $\frac{3}{\pi i}\int_{|z|=3}\frac{z^5}{(z-2)^4}dz$ **برابر کدام است؟**

1) 300 2) 240 3) 120 4) 60

پاسخ: گزینه 2

$z=2$ قطب مرتبه 4، تابع **f** است که درون $|z|=3$ قرار دارد:

$$f(z)=\frac{}{(z-2)^4}$$

$$\underset{z=2}{\operatorname{Res}}(f)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 2}((z-2)^4 f(z))^{(3)}=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 2}(60z^2)=40$$

$$\frac{3}{\pi i}\int_{|z|=3}\frac{z^5}{(z-2)^4}dz=\frac{3}{\pi i}2\pi i(40)=240$$

مثال ۷: مقدار انتگرال $\int_{|z|=1}(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}\,dz$ **برابر است با**

1) $-\pi i$ 2) $\mathbf{0}$ 3) $2\pi i$ 4) $3\pi i$

پاسخ: گزینه 4

$z=\mathbf{0}$ نقطه ویژه اساسی است که درون $|z|=1$ قرار دارد:

$$f(z)=(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}$$

$$f(z)=(z+\frac{1}{z})(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\mathbf{K})$$

$(\frac{1}{z})$ **ضریب** $z=\mathbf{0}$: $=\frac{1}{2!}+1=\frac{3}{2}$ **در** f **مانده**

$$I=2\pi i(\frac{3}{2})=3\pi i$$

مثال ۸: انتگرال $\oint_{c^+}\frac{e^z\sin(\pi z)}{(z^2+1)^2}dz$ **مفروض است. اگر C دایره** $|z-j|=1$ **باشد مقدار این انتگرال برابر** $\pi j e^{j}\operatorname{sh}\pi$ **است و اگر C دایره** $|z+j|=1$ **باشد مقدار این انتگرال برابر** $\pi j e^{-j}\operatorname{sh}\pi$ **است و اگر C بیضی** $|z-j|+|z+j|=4$ **باشد مقدار انتگرال چقدر است؟**

1) $\mathbf{0}$ 2) $2\pi j\cos(1)\operatorname{sh}\pi$ 3) $\pi j\cos(1)e^{j}$ 4) $\pi j\cos(1)e^{-j}$

پاسخ: گزینه 2

$(z^2+1)^2=\mathbf{0}\Rightarrow z=j,z=-j:2$ **نقاط قطب مرتبه**

اگر C دایره‌ی $|z-j|=1$ باشد در این صورت فقط $z=j$ داخل مسیر C قرار دارد و اگر C دایره‌ی $|z+j|=1$ باشد، فقط $z=-j$ داخل مسیر C قرار دارد.

اگر C بیضی $|z-j|+|z+j|=4$ باشد در اینصوت هر دو نقطه $z=-j,z=j$ داخل مسیر C قرار می‌گیرد بنابراین مقدار انتگرال برای این مسیر با مجموع انتگرال در دو مسیر اولیه برابر است.

$$I = 2\pi j \cos(1)\,\mathrm{sh}\pi$$

مثال ۹: مقدار انتگرال $I = \oint_c \frac{1}{z-1}\sin(\frac{1}{z})\,dz$ **که در آن** $C:|z|=2$ **چقدر می‌باشد؟**

1) $I = 0$ 2) $I = \sin 1$ 3) $I = 2\pi i \sin 1$ 4) $I = 4\pi i \sin 1$

پاسخ: گزینه 1

$z = 0,1$ نقاط تکین تنها هستند که هر دو داخل $\mathbf{C}$ قرار دارند:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\sin(\frac{1}{z})$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\sin\frac{1}{z} = \sin(1)$$

$z = 0$ نقطه‌ی ویژه اساسی است بنابراین:

$$f(z) = \frac{-1}{1-z}\sin(\frac{1}{z}) = -(1+z+z^2+z^3+\mathbf{K})(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\mathbf{K})$$

$$= -(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\mathbf{K}) = -\sin(1) \text{ ضریب } (\frac{1}{z})$$

$$I = 2\pi i(\sin(1)-\sin(1)) = 0$$

نکته 5: اگر مسیر بسته‌ی $\mathbf{C}$ در انتگرال مختلط، دایره‌ی $|z| = a$ باشد در این صورت از روابط زیر می‌توانیم استفاده کنیم

$$z\bar{z} = a^2, \ \bar{z} = \frac{a^2}{z}$$

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(z+\frac{a^2}{z}), y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}(z-\frac{a^2}{z})$$

مثال ۱۰: مقدار $\oint_c \left[\frac{\bar{z}+|z|}{z}+\frac{e^z}{z^3}\right]dz, c:|z|=1$ **برابر است با**

1) صفر 2) πi 3) $3\pi i$ 4) $2\pi i$

پاسخ: گزینه 3

از نکته (5) استفاده می‌کنیم.

$$z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}, |z| = 1$$

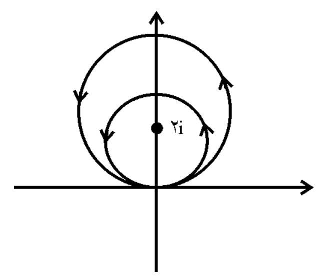
$$I = \oint_c \left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{e^z}{z^3}\right]dz$$

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\mathbf{K})$$

مانده تابع در $z=0$: **ضریب** $(\frac{1}{z})$ $=1+\frac{1}{2!}=\frac{3}{2}$

$$I=2\pi i(\frac{3}{2})=3\pi i$$

مثال ۱۱: حاصل $I=\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$ **که مسیر** $\mathbf{C}$ **به صورت زیر می‌باشد را تعیین کنید.**



پاسخ: چون مسیر $\mathbf{C}$ دو دور کامل در جهت مثبت اطراف نقطه $2i$ پیموده می‌شود بنابراین

$$I=2\pi i(2)\operatorname*{Res}_{z=2i}(f)=4\pi i\operatorname*{Res}_{z=2i}(f)$$

$z=2i$ قطب ساده‌ی $f(z)$ است بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}(f)=\frac{1}{(z^2+4)'}\Big|_{z=2i}=\frac{1}{4i}$$

$$I=4\pi i(\frac{1}{4i})=\pi$$

3-4) محاسبه انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط

1) انتگرال توابعی گویا از $\cos\theta,\sin\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$$

اگر $F(\cos\theta,\sin\theta)$ تابعی گویا از $\sin\theta,\cos\theta$ باشد و بر بازه‌ی $0\le\theta\le 2\pi$ تعریف شده باشد آنگاه با قرار دادن $z=e^{i\theta}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$ به انتگرال مختلط زیر می‌رسیم

$$\cos\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}(z+\frac{1}{z})=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$I = \oint_{|z|=1} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

انتگرال فوق به روی دایره واحد و در جهت مثبت محاسبه می‌گردد.

2) انتگرال‌های حقیقی ناسره

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

اگر $f(x)$ تابعی گویا و دارای قطب روی محور xها نباشد و درجه مخرج حداقل دو درجه بیش‌تر از درجه صورت باشد، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f(z))$$

3) انتگرال‌های فوریه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx \;,\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx$$

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی گویا بوده و دارای قطب روی محور xها نمی‌باشد و درجه مخرج حداقل دو درجه بیش‌تر از درجه صورت می‌باشد در اینصورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz})\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz})\right]$$

نکته 6:

الف) در انتگرال‌های حقیقی گروه 2 و 3 اگر تابع گویای $f(z)$ دارای نقاط قطب روی محور **x**ها باشد، مانده‌ی آنها را در πi ضرب می‌کنیم.

ب) در انتگرال‌های حقیقی گروه 2 و 3، شرط اینکه درجه مخرج حداقل دو درجه از درجه صورت بیش‌تر باشد، شرط کافی برای همگرایی انتگرال می‌باشد بنابراین اگر درجه مخرج یک واحد بیش‌تر از درجه صورت باشد نیز ممکن است انتگرال همگرا گردد.

مثال ۱۲: حاصل انتگرال حقیقی $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ **و** $a>1$ **برابر است با**

1) $\pi\sqrt{a^2-1}$ 2) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ 3) $\frac{\pi}{a^2-1}$ 4) $\pi(a^2-1)$

پاسخ: گزینه 2

$$I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$I=\frac{1}{2}\oint_c\frac{dz}{iz(a+\frac{z^2+1}{2z})}=\frac{1}{i}\oint_c\frac{dz}{z^2+2az+1},C:|z|=1$$

$$z^2+2az+1=0\Rightarrow z_1=-a-\sqrt{a^2-1},z_2=-a+\sqrt{a^2-1}$$

نقطه $z_2=-a+\sqrt{a^2-1}$ داخل دایره واحد قرار دارد

$$\operatorname{Res}\frac{1}{z^2+2az+1}=\frac{1}{2z+2a}\Big|_{z=z_2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

$$I=2\pi i\frac{1}{i}\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

مثال ۱۳: مقدار انتگرال $\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{-i(n\theta-\sin\theta)}d\theta$ **اگر n عدد صحیح مثبتی باشد برابر است با**

1) 0 2) $\frac{\pi}{n!}$ 3) $\frac{2\pi}{(n-1)!}$ 4) $\frac{2\pi}{n!}$

پاسخ: گزینه 4

$$e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta-\sin\theta)}=e^{-in\theta}.e^{\cos\theta+i\sin\theta}=e^{-in\theta}.e^{e^{i\theta}}$$

$$z=e^{i\theta},d\theta=\frac{dz}{iz},C:|z|=1$$

$$I=\oint_c z^{-n}e^z\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\oint_c\frac{e^z}{z^{n+1}}dz$$

$z=0$ قطب مرتبه $n+1$ تابع $f(z)=\frac{e^z}{z^{n+1}}$ می‌باشد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}(z^{n+1}f(z))^{(n)}=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}e^z=\frac{1}{n!}$$

$$I=\frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{n!}=\frac{2\pi}{n!}$$

مثال ۱۴: انتگرال ناسره $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ برابر است با

1) π 2) 2π 3) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ 4) $\pi\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه 3

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

$$1+z^4 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}, K = 0,1,2,3$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \; z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \; z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \; z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

قطب‌های ساده z_2, z_1 بالای محور حقیقی هستند $(\mathrm{Im}(z) > 0)$ بنابراین

$$\underset{z=z_1}{\mathrm{Res}}(f) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

$$\underset{z=z_2}{\mathrm{Res}}(f) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = 2\pi i\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i+1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

مثال ۱۵: مقدار $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}dx$, $m > 0$ برابر است با

1) $\frac{\pi e^{m}(1+m)}{4}$ 2) $\frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$ 3) $\frac{\pi e^{m}(1+m^2)}{4}$ 4) $\frac{\pi e^{-m}(m^2-1)}{2}$

پاسخ: گزینه 2

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{imz}}{(z^2+1)^2}\right)\right]$$

قطب‌های مرتبه دوم: $(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

$z = i$ فقط بالا محور حقیقی می‌باشد بنابراین

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{e^{imz}}{(z^2+1)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{imz}}{(z+i)^2}\right)'$$

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}(f) = \lim_{z\to i}\frac{ime^{imz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{imz}}{(z+i)^4} = \frac{-ie^{-m}(m+1)}{4}$$

$$I = \frac{\quad}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\quad}{2}\right) = \frac{\quad}{4}$$

مثال ۱۶: اگر $\int_0^\infty \frac{Lnx}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi Lna}{2a}$، آنگاه مقدار انتگرال زیر با استفاده از مانده، با کدام گزینه برابر است؟

$$I = \int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{x^2+a^2}dx$$

1) $\frac{\pi(Lna)^2}{a}+\frac{\pi^3}{4a}$ 2) $\frac{\pi(Lna)^2}{2a}+\frac{\pi^3}{8a}$ 3) $\frac{\pi(Lna)^2}{a}+\frac{\pi^2}{4a}$ 4) $\frac{\pi(Lna)^2}{2a}+\frac{\pi^2}{8a}$

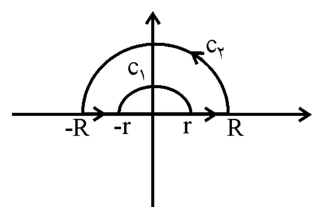
پاسخ: گزینه 2

$$f(z) = \frac{(Lnz)^2}{a^2+z^2}, a > 0$$

انتگرال $f(z)$ را روی مسیر $\mathbf{C}$ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم با فرض اینکه $R \to \infty, r \to 0$

$$I = \oint_c f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int_r^R f(x)\,dx$$

ابتدا نشان می‌دهیم که دو انتگرال اول با فرض $R \to \infty, r \to 0$ برابر صفر هستند.



$$C_1 : z = re^{i\theta} \ , \ \theta : \pi \to 0$$

$$C_2 : z = Re^{i\theta} \ , \ \theta : 0 \to \pi$$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_\pi^0 \frac{(Lnr+i\theta)^2}{a^2+r^2e^{2i\theta}} ire^{i\theta}d\theta$$

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \le \pi\frac{r((\ln r)^2+\pi^2)}{a^2-r^2}$$

چون $\lim\limits_{r\to 0^+} r(\ln r)^2 = 0$ بنابراین

$$\lim_{r\to 0^+} \pi\frac{r((\ln r)^2+\pi^2)}{a^2-r^2} = 0 \Rightarrow \lim_{r\to 0}\left(\int_{C_1} f(z)\,dz\right) = 0$$

$$\int_{c_2} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{(\ln R+i\theta)^2}{a^2+R^2e^{2i\theta}} i\,Re^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\int_{c_2} f(z)dz\right| \le \pi\frac{R((\ln R)^2+\pi^2)}{R^2-a^2}$$

$$\lim_{R\to\infty} \pi \frac{[illegible]}{R^2-a^2} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_2} f(z)\,dz\right) = 0$$

مقدار انتگرال مختلط را روی مسیر بسته‌ی **C**، با استفاده از مانده تعیین می‌کنیم.

$$a^2+z^2=0 \Rightarrow z=\pm ai$$

$z=ai$ قطب ساده‌ی تابع و واقع در داخل **C** می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}(f) = \frac{(\ln z)^2}{2z}\Big|_{z=ai} = \frac{1}{2ai}(\ln a + i\frac{\pi}{2})^2 = \frac{1}{2ai}((\ln a)^2 + i\pi \ln a - \frac{\pi^2}{4})$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai}(f) = \frac{\pi}{a}(\ln a)^2 - \frac{\pi^3}{4a} + i\frac{\pi^2}{a}\ln a \ , (1)$$

$$\int_r^R f(x)\,dx = \int_r^R \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_r^R f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx$$

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx = \int_{-R}^{-r} \frac{(Ln|x|+i\pi)^2}{a^2+x^2}dx = \int_{-R}^{-r} \frac{(Ln|x|)^2+2i\pi Ln|x|-\pi^2}{a^2+x^2}dx$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx - \pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} + 2i\pi\int_0^\infty \frac{Lnx}{a^2+x^2}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$$

$$I = 2\int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx - \frac{\pi^3}{2a} + 2i\pi\int_0^\infty \frac{2Lnx}{a^2+x^2}dx \ , (2)$$

با مقایسه‌ی روابط (1) و (2) داریم:

با مقایسه‌ی روابط (1) و (2) داریم:

$$2\pi\int_0^\infty \frac{Lnx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi^2}{a}Lna \Rightarrow \int_0^\infty \frac{Lnx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}Lna$$

$$2\int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx - \frac{\pi^3}{2a} = \frac{\pi}{a}(Lna)^2 - \frac{\pi^3}{4a} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{(Lnx)^2}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi(Lna)^2}{2a} + \frac{\pi^3}{8a}$$

۱ـ فرض می‌کنیم α عدد مختلط ثابتی باشد به قسمی که $|\alpha|<1$، و **C** مرز دایره‌ی یکه به مرکز **O** و در جهت مثبت (مثلثاتی) باشد. اگر $\bar{z}=x-iy$ مزدوج مختلط $z=x+iy$ باشد، آنگاه $I=\oint_c \frac{\sin z}{1-\alpha\bar{z}}dz$ برابر است با:

1) $2\pi i \frac{\sin(\frac{1}{\alpha})}{\alpha}$ 2) $-2\pi i \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 3) $-2\pi i \sin\frac{1}{\alpha}$ 4) $2\pi i\alpha\sin\alpha$

۲ـ حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2P\sin\theta+P^2}$ با شرط $-1<P<1$ (ثابت)، برابر است با:

1) $\frac{2\pi}{1-P^2}$ 2) $\frac{2\pi}{1+P^2}$ 3) $\frac{2\pi p^2}{1-P^2}$ 4) $\frac{2\pi p}{1-P^2}$

۳ـ مقدار انتگرال $I=\oint_c (z-\mathrm{Re}(z))\,dz$ بر روی منحنی $C:|z|=2$ با کدام گزینه برابر است؟

1) 4π 2) $-j$ 3) $4\pi j$ 4) $-4\pi j$

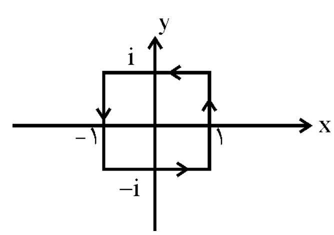
۴ـ حاصل انتگرال $I=\oint_c \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz$ روی دایره $C:|z-1|=2$ با کدام گزینه برابر است؟

1) $\pi j e^{jt}$ 2) $2\pi\sin t$ 3) $2\pi j\sin t$ 4) $2\pi j\cos t$

۵ـ حاصل انتگرال $I=\oint \frac{e^{3zt}}{(z-1)^3}dz$ روی دایره $|z|=2$ کدام است؟

1) 0 2) $9\pi i t e^{3t}$ 3) $9\pi i t^2 e^{3t}$ 4) $9\pi i e^{3t}$

۶ـ مقدار انتگرال $I=\int_c \frac{z\,dz}{z^2-4}$ که **C** مرز نشان داده شده است، چقدر است؟



1) 0 2) $-2\pi i$ 3) $2\pi i$ 4) πi

۷ـ حاصل $P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$ کدام است؟

1) 0 2) $-\frac{\pi}{e}$ 3) $\pi(1-\frac{1}{e})$ 4) $\pi(2-\frac{1}{e})$

۸ــ مقدار $\oint_{|z|=1} \frac{\;}{z^5} dz$ **کدام است؟**

1) $\frac{\pi i}{24}$ 2) $\frac{\pi i}{12}$ 3) $\frac{\pi i}{6}$ 4) $\frac{\pi i}{18}$

۹ــ مقدار انتگرال $\int_{AB} ((y+1)-ix)\,dz$ **که در آن AB خط مستقیم ای است که نقاط** $A(1,0)$, $B(0,-1)$ **را بــه هــم وصل می‌کند، کدام است؟**

1) -1 2) -3 3) $-i-1$ 4) $2i$

۱۰ــ مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{4}{z^3}}\,dz$ **کدام است؟**

1) 4 2) 8π 3) $8\pi i$ 4) $4\pi i$

۱۱ــ اگر C مرز دایره واحد (دایره به مرکز O و به شعاع یک) در جهت مثبــت و $\bar{z} = x - iy$ **مــزدوج** $z = x + iy$ **باشد، مقدار** $\oint_c \frac{e^z dz}{(\bar{z})^2 + 4}$ **کدام است؟**

1) $-\frac{\pi i}{4}\sin\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\pi i}{4}\sin\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{2}$

۱۲ــ مقدار انتگرال $\oint_c \frac{e^z}{z(z+1)} dz$ **روی مســیر C کــه دایــره‌ای بــه معادلــه** $|z-1| = 3$ **مــی‌باشــد کــدام اســت؟**

1) 0 2) $2\pi i$ 3) $2\pi i(1-e^{-1})$ 4) $2\pi i(1+e)$

۱۳ــ مقدار انتگــرال $\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{dz}{z-i}$, $C: |z| = 2$ **کــه در آن جهــت C همــان جهــت مثلثــاتی اســت کــدام اســت؟**

1) $-i$ 2) 0 3) 1 4) i

۱۴ــ $\oint_c \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz$ **که در آن منحنی C،** $|z| = 4$ **در جهت مثبت مثلثاتی کدام است؟**

1) 0 2) $2\pi i$ 3) $\frac{1}{\pi^2}$ 4) $\frac{4i}{\pi}$

۱۵ـ مقدار انتگرال $I=\oint_{\gamma_i}\frac{\ }{z(z+2)(z+4)}$ در طول خم‌های γ_1,γ_2 وقتی $\gamma_1:|z|=1$ و $\gamma_2:|z|=2$ و در جهت مثبت به ترتیب کدام هستند؟

1) $-\frac{1}{8},\frac{1}{8}$ 2) $\frac{1}{8},-\frac{1}{8}$ 3) $\frac{1}{8},\frac{1}{8}$ 4) $-\frac{1}{8},-\frac{1}{8}$

۱۶ـ مقدار انتگرال $\oint_c \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$ وقتی که $C:|z|=3$ باشد کدام است؟

1) $-2\pi j$ 2) صفر 3) $2\pi j$ 4) $4\pi j$

۱۷ـ حاصل $\int_c \frac{e^z dz}{z^3-1}$ وقتی C دایره به مرکز $(1,0)$ و به شعاع واحد باشد، کدام است؟

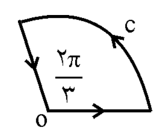
1) $\frac{2e\pi i}{3}$ 2) $\frac{3e\pi i}{2}$ 3) $\frac{e\pi i}{3}$ 4) $\frac{e\pi i}{2}$

۱۸ـ مقدار انتگرال $\oint \frac{\sinh z}{3z-i}dz$ را روی دایره یکه به دست آورید

1) $-2\pi\sinh\frac{1}{3}$ 2) $2\pi\sinh\frac{1}{3}$ 3) $-\frac{2\pi}{3}\sin\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2\pi}{3}\sin\frac{1}{3}$

۱۹ـ حاصل انتگرال زیر روی مسیر بسته‌ای که بخشی از آن یک دایره یکه مطابق شکل است چقدر است؟

$I=\oint \bar{z}dz$



1) $j\frac{2\pi}{3}$ 2) $-j\frac{2\pi}{3}$ 3) $1+j\frac{2\pi}{3}$ 4) $-1+j\frac{2\pi}{3}$

۲۰ـ با منحنی C دایره‌ی $|z-8j|=1$ در صفحه مختلط، انتگرال $\oint_c \frac{z}{\sin z(z-2j)^3}dz$ برابر است با:

1) صفر 2) $2\pi j$ 3) $-2\pi j$ 4) πj

۲۱ـ با منحنی C دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$ در صفحه مختلط، مقدار انتگرال $\oint_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$ برابر است با

1) $-\pi e j$ 2) $-2\pi e j$ 3) $\pi e j$ 4) $2\pi e j$

۲۲ـ منحنی C دایره به معادله $|z|=1$ است، مقدار $\int_c \frac{}{\cos z}$ کدام است؟

1) 0 　　 2) πi 　　 3) $\frac{\pi}{e}$ 　　 4) $\ln\sqrt{2}$

۲۳ـ حاصل $I=\int_c \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ بر روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع بزرگتر از ۱، کدام است؟

1) 3π 　　 2) 4π 　　 3) $6\pi i$ 　　 4) $10\pi i$

۲۴ـ حاصل $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{4}$ 　　 2) $\frac{\pi}{12}$ 　　 3) $\frac{\pi}{3}$ 　　 4) $\frac{\pi i}{4}$

۲۵ـ حاصل $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 　　 2) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 　　 3) $\pi\sqrt{3}$ 　　 4) $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$

۲۶ـ مقدار انتگرال زیر با استفاده از قضیه مانده‌ها کدام است؟ (C دایره واحد می‌باشد و جهت انتگرال‌گیری خلاف ساعتگرد است)

$$I=\int_c \frac{e^z}{1-\cos z}dz$$

1) $-4\pi i$ 　　 2) $-2\pi i$ 　　 3) $4\pi i$ 　　 4) $2\pi i$

۲۷ـ انتگرال $I=\int_c \frac{z+1}{z^2+9}dz$ روی مسیر $|z|=4$ چیست؟

1) 0 　　 2) πi 　　 3) $2\pi i$ 　　 4) $4\pi i$

۲۸ـ اگر C بیضی $4(x-2)^2+(y-1)^2=4$ در جهت مثلثاتی باشد و $f(z_0)=\int_c \frac{e^z}{z(z-z_0)}dz$ آنگاه $f'(2)$ برابر است با:

1) $\pi i e^2$ 　　 2) $-\frac{\pi i}{2}e^2$ 　　 3) $2\pi i e^2$ 　　 4) $\frac{\pi i}{2}e^2$

[illegible]

است؟

$$I_4 = \oint_c \frac{zdz}{z+2i}\ ,\ I_3 = \oint_c \frac{z^3dz}{z^4+4}\ ,\ I_2 = \oint_c \frac{zdz}{z^2+4}\ ,\ I_1 = \oint_c \frac{dz}{z(z-2)}$$

1) π, I_2 2) $2\pi i, I_4$ 3) $-\pi i, I_1$ 4) $4, I_3$

۳۰ـ حاصل انتگرال $I = \oint_c \frac{dz}{\cosh z}$ **روی مرز C مربعی در جهت مثلثاتی به رئوس** $(\pm\pi, \pi)$ **و** $(\pm\pi, 0)$ **عبارت است از:**

1) -2π 2) 2π 3) $-2\pi i$ 4) $2\pi i$

۳۱ـ حاصل انتگرال $I = \int \frac{\tan(\frac{z}{2})}{z^2} dz$ **روی دایره یکه (در جهت مثلثاتی) برابر است با:**

1) πi 2) $2\pi i$ 3) $-\pi i$ 4) $-2\pi i$

۳۲ـ انتگرال $\oint_c \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-2)(z-3)} dz$ **که در آن** $c: |z| = 1$ **می‌باشد، برابر است با:**

1) صفر 2) $-\frac{3}{2}\pi i$ 3) $-\frac{2}{3}\pi i$ 4) $4\pi i$

۳۳ـ مقدار انتگرال مختلط زیر را روی سهمی $C: \pi^2 y = x^2$ **از نقطه** $(0, 0)$ **تا نقطه** $(\pi, 1)$ **حساب کنید**

$$I = \int_c (z+2)e^{iz} dz$$

1) $2\pi i e^{\pi i}$ 2) $-1 + \frac{2+\pi}{e} i$ 3) $4\pi i e^{\pi i}$ 4) $-(1+\frac{2}{e}) + i(\frac{2+\pi}{e} + 2)$

۳۴ـ مقدار انتگرال $\int_c \frac{e^z dz}{z^2(z+2)}$ **روی مرز مربع** $C: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ **در جهت مثلثاتی برابر است با:**

1) 0 2) $\frac{\pi i}{8}$ 3) $\frac{\pi i}{2}$ 4) $\frac{\pi i}{4}$

۳۵ـ مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ **برابر است با:**

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{3\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$ 4) $\frac{7\pi}{6}$

۳۶ـ اگر C مرز دایره‌ی واحد در جهت مثلثاتی باشد، آن‌گاه مقدار $I = \oint_c \frac{[illegible]}{\cosh(2z)}$ ($n \in N$ ثابت) برابر است با:

1) صفر 2) $\pi(\frac{\pi}{2}i)^n$ 3) $2\pi(\frac{\pi}{4}i)^n$ 4) $\pi(\frac{\pi}{4}i)^n(1-(-1)^n)$

۳۷ـ اگر C مرز دایره واحد باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده، آن‌گاه مقدار انتگرال $\oint_c \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+2}}$ برابر است با:

1) صفر 2) $2\pi i$ 3) $-2\pi i$ 4) $4\pi i$

۳۸ـ با انتگرال‌گیری از تابع e^{-z^2} روی مرز پیرامون مستطیل $0 \le y \le b, |x| \le a$ و میل دادن a به بی‌نهایت، و با توجه به $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، مقدار $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx$ کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$ 2) $\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}$ 3) $\sqrt{\pi}e^{b^2}$ 4) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{b^2}$

۳۹ـ مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{(2z+1)^3}dz$ برابر است با

1) $-\frac{3\pi i}{8}$ 2) $\frac{i\pi}{8}$ 3) $\frac{3\pi}{8}$ 4) $\frac{3i\pi}{8}$

۴۰ـ حاصل انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ با شرط $a, b > 0$, $a \ne b$ برابر است با:

1) $\frac{\pi}{2ab}$ 2) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$ 3) $\frac{\pi}{2(a+b)}$ 4) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$

۴۱ـ حاصل انتگرال $I = \oint_c \frac{dz}{z}$ را برای یک بار طی کردن کامل (در جهت مثبت) مسیر بسته‌ی C که در مختصات قطبی به صورت $r = 3 - \sin^2\frac{\theta}{4}$ می‌باشد، برابر است با:

1) $-2\pi i$ 2) 0 3) $2\pi i$ 4) $4\pi i$

۴۲ـ مرز C دایره با معادله $|2z-1| = 2$ در جهت مثلثاتی می‌باشد، مقدار انتگرال $I = \oint \tan(\frac{\pi}{2}z)dz$ کدام است؟

1) -2 2) 0 3) 1 4) 2

۴۳ـ مقدار انتگرال $\cos 2z\,dz$ $I = \int_0$ **کدام است؟**

1) $-\sinh\pi$ 2) $-\cosh\pi$

3) $-i\sinh\pi$ 4) مشخص نیست زیرا مسیر انتگرال‌گیری داده نشده است

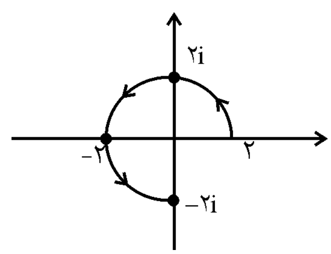
۴۴ـ مقدار انتگرال $\oint_C \frac{z\cos^2 z + 2\sin^2 z}{z\sin 2z}dz$ **را حول دایره‌ای** $C:|z|=2$ **تعیین کنید**

1) πi 2) $2\pi i$ 3) $3\pi i$ 4) $-\pi i$

۴۵ـ مقدار انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ **چیست؟**

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi e}{2}$ 3) $\frac{\pi}{2e}$ 4) $\frac{2\pi}{e}$

۴۶ـ مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_c \frac{3}{z}dz$**، که C قوس مستدیر از** $z=2$ **تا** $z=-2i$ **نشان داده شده در شکل زیر می‌باشد**



1) صفر 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $\frac{9\pi}{2}$ 4) $\frac{9\pi}{2}i$

۴۷ـ مقدار انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ **کدام است؟**

1) $\frac{\pi}{2} - \frac{e}{2}$ 2) $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{e}$ 3) $\frac{\pi(e^2-1)}{2e^2}$ 4) $\frac{\pi(e^2+1)}{4e^2}$

۴۸ـ حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx$ **برابر است با:**

1) $\pi(a-b)$ 2) $\pi(b-a)$ 3) $\pi(b+a)$ 4) $2\pi(b-a)$

۴۹ـ مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^6}$ **برابر است با:**

1) $\frac{i}{2\pi}$ 2) $\frac{\pi}{6!}$ 3) $\frac{2\pi i}{5!}$ 4) $2\pi i$

۵۰ـ حاصل انتگرال $I = \oint_c \frac{}{(z^2+\pi^2)^2} dz$ در امتداد دایره $|z|=4$ کدام است؟

1) $\frac{i}{\pi}$ 2) $\frac{i}{\pi^3}$ 3) $\frac{\pi - i}{4\pi^3}$ 4) $\frac{\pi + i}{4\pi^3}$

۵۱ـ اگر C دایره واحد $(|z|=1)$ در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_c \frac{\sin \pi z}{2z^2 - z} dz$:

1) 0 2) πi 3) $2\pi i$ 4) $4\pi i$

۵۲ـ مطلوبست محاسبه $\oint_{|z|=2} \frac{\coth z}{z - i} dz$

1) $2\pi i(\cot i - 2i)$ 2) $2\pi(\cot i + 2i)$ 3) $2\pi i(\coth i - i)$ 4) $2\pi i(\coth i + i)$

۵۳ـ مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\sin 2z}{z^6} dz$ وقتی C دایره واحد می‌باشد، عبارت است از:

1) $\frac{15\pi}{8}$ 2) $\frac{15\pi i}{8}$ 3) $\frac{8\pi i}{15}$ 4) $\frac{8\pi}{15}$

۵۴ـ انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^5} dz$ کدام است؟

1) $12\pi i$ 2) $\frac{\pi i}{12}$ 3) $\frac{\pi}{12}$ 4) $2\pi i$

۵۵ـ حاصل انتگرال $\oint_C |z|^2 dz$، که مسیر بسته حول مربعی به رئــوس $A(0,0)$ و $B(1,0)$ و $C(1,1)$ و $D(0,1)$ باشــد، کدام گزینه است؟

1) $-1+i$ 2) $1+i$ 3) $2-i$ 4) $2+i$

۵۶ـ اگر C دایره واحد به مرکز O و در جهت مثلثــاتی باشــد، آن‌گــاه مقــدار انتگــرال زیــر کــدام اســت؟

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z-1}{e^z z^n} dz, n \in N$$

1) $\frac{(-1)^n}{n!}$ 2) $\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}$ 3) $\frac{n(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ 4) $\frac{n(-1)^n}{(n-1)!}$

۵۷ـ با محاسبه $\oint \frac{dz}{z+1}$ بر محیط دایره $C: |z|=2$ در جهت مثبت، مقادیر انتگرال‌های

1) $\oint_c \frac{(x+1)dx + ydy}{(x+1)^2 + y^2}$ 2) $\oint_c \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2 + y^2}$ به ترتیب برابر است با:

1) $0, \pi$ 2) $\pi, 0$ 3) $2\pi, 0$ 4) π, π

۵۸ـ حاصل انتگرال $\frac{[illegible]}{2\pi i}\oint_C \frac{[illegible]}{z^{2K+1}}dz$ که C عبارتست از بیضی $x^{[illegible]}+4y^{[illegible]}=1$ کدام است؟ (K عدد طبیعی)

1) -1   2) 0 3) 1   4) π

۵۹ـ مقدار انتگرال $\int_C \frac{\sin(z+1)\pi+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}dz$ که در آن C دایره $|z|=4$ با جهت مثبت است، کدام است؟

1) $-2\pi i$ 2) 0 3) $2\pi i$ 4) $4\pi i$

۶۰ـ اگر C دایره‌ی واحد پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z+1)\cos z}{z^{2n}}dz,\ n\in N$$

1) $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$ 2) $\frac{(-1)^{n}}{(2n-2)!}$ 3) $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ 4) $\frac{(-1)^{n}}{(2n-2)!}$

۶۱ـ فرض کنید C بیضی $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ در جهت مثلثاتی باشد و $f(w)=\int_C \frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dz$ در اینصورت مقدار $f'(5)$ برابر است با:

1) $\frac{47\pi i}{25}$ 2) $\frac{47\pi i}{26}$ 3) $\frac{47\pi i}{24}$ 4) $\frac{48\pi i}{25}$

۶۲ـ حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}dz$ برابر است با:

1) $\frac{\pi}{2}i$ 2) $-2\pi i$ 3) $2\pi i$ 4) $-\frac{\pi i}{3}$

۶۳ـ مطلوبست مقدار انتگرال مختلط داده شده در صورتی که C دایره‌ای به معادله $|z-1|=3$ باشد

$$\oint \frac{(z+2)^2}{4z^3+z}dz$$

1) $\frac{\pi}{2}i$ 2) $\frac{\pi}{3}i$ 3) $-\frac{\pi}{2}i$ 4) $-\frac{\pi}{3}i$

۶۴ــ مقدار انتگرال حقیقی $\int_{-\infty} \frac{\quad}{1+4x^4}$ **برابر است با:**

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi^2}{4}$

۶۵ــ مقدار انتگرال $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 \sin z}$ **در جهت مثلثاتی برابر است با:**

1) 0 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{\pi i}{3}$ 4) $2\pi i$

۶۶ــ مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} dz$ **در جهت مثلثاتی برابر است با:**

1) 0 2) $2\pi i$ 3) $2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 4) $2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

۶۷ــ حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$ **کدام است؟**

1) -2π 2) -1 3) 2π 4) 1

۶۸ــ حاصل انتگرال $I = \oint z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz$ **حول دایره‌ی** $|z| = 2$ **و در جهت مثلثاتی کدام است؟**

1) $\frac{\pi i}{3}$ 2) $\frac{7\pi i}{3}$ 3) $\frac{13\pi i}{3}$ 4) $4\pi i$

۶۹ــ مقدار انتگرال $\oint_{|z|=4} \frac{z}{\sin z} dz$ **برابر کدام است؟**

1) $-2\pi i$ 2) 0 3) $2\pi i$ 4) $4\pi i$

۷۰ــ پاسخ انتگرال مختلط $\oint_c \frac{2z+1}{z^3 - iz^2 + 6z} dz$ **کدام است؟ (C دایره‌ای است به شعاع** $\frac{1}{3}$ **و به مرکز** $3i$)

1) صفر   2) $2\pi i$ 3) $\frac{\pi}{15}(12-2i)$ 4) $\frac{\pi}{15}(12+2i)$

۷۱ــ انتگرال $\int_c \frac{\sin z}{z^2+1} dz$ **که در آن مسیر C دایره‌ای در خلاف جهت حرکت ساعت، به مرکز i و شعاع ۱ است، کدام است؟**

1) $\pi i \sin 1$ 2) $\pi \sin i$ 3) $\pi i \sinh 1$ 4) $\pi i \sin i$

۷۲ـــ مقــدار انتگــرال $I=\oint_c \frac{dz}{(z^2-1)^2}$ کــه در آن $C:|z|=2$ در جهــت مثبــت مــی‌باشــد عبــارت اســت از:

1) $I=\frac{\pi}{2}i$ 2) $I=\frac{\pi}{e}i$ 3) $I=\frac{\pi}{2}(2-i)$ 4) $I=\frac{\pi}{e}(i-2)$

۷۳ـ مقــدار انتگــرال زیــر وقتــی کــه C دایــره $|z+i|=2$ و در جهــت مثبــت مــی‌باشــد عبــارت اســت از:

$$I=\oint_c \frac{\exp(z^2)}{(z+i)^4}dz$$

1) $I=\frac{8}{3}\pi e$ 2) $I=\frac{8}{3}\pi e^{-1}$ 3) $I=\frac{4}{3}\pi e$ 4) $I=\frac{4}{3}\pi e^{-1}$

۷۴ـ حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+2x+2}dx$ برابر است با:

1) $\pi\cos 2$ 2) $\frac{\pi\cos 2}{e^2}$ 3) $\frac{\pi\cos 2}{e}$ 4) $\frac{\pi\cos 2\cosh 2}{e^2}$

۷۵ـ حاصل $\oint_c \frac{1-\cos z}{z^2e^z}dz$ که در آن C خم بسته‌ای در جهت مثلثاتی است که توسط سهمی‌های $x=y^2, y=x^2$ ایجاد می‌شود، کدام است؟

1) صفر 2) πi 3) $2\pi i$ 4) $-2\pi i$

۷۶ـ مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n+1}}dz$ (دایره مرز در جهت مثلثاتی) کدام است؟

1) $2\pi i$ 2) $2\pi i(-1)^n$ 3) $\frac{2\pi i(-1)^n}{n!}$ 4) $\frac{2\pi i(-1)^n}{(2n)!}$

۷۷ـ اگر C دایره واحد در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مقدار انتگرال $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\cosh z-1}{z^2\sin z}dz$ کدام است؟

1) 0 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2

۷۸ـ اگر C یک مرز ساده بسته باشد و $f(z) = \oint_C \frac{[illegible]}{(\alpha - z)^3} d\alpha$ باشد، در این صورت به ازای هــر Z در درون C، مقدار $f''(z)$ کدام است؟

1) 0 2) $(4\pi i \sin z)e^z$ 3) $(-4\pi i \sin z)e^z$ 4) $(8\pi i \cos z)e^z$

۷۹ـ برای هر عدد طبیعی n، مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} (z + \frac{1}{z})^{2n} \frac{dz}{z}$ برابر است با

1) $2\pi i \binom{2n}{n}$ 2) $\binom{2n}{n}$ 3) 0 4) $2\pi i \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$

۸۰ـ منحنی ساده بسته γ در جهت حرکت عقربه ساعت جهت‌دار شده و نقــاط $i, -i$ بــه ترتیــب در خــارج و داخل آن قرار دارند. انتگرال $\int_\gamma \frac{\sin z}{1+z^2} dz$ کدام است؟

1) $-\pi i \sinh 1$ 2) $\pi i \cosh 1$ 3) $-\pi i \cosh 1$ 4) $\pi i \sinh 1$

۸۱ـ انتگرال $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2(1+x^2)} dx$ کدام است؟

1) $\frac{\pi}{4}(1+e^{-2})$ 2) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$ 3) $\frac{\pi}{4}(1+e^2)$ 4) $\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{e})$

1) گزینه 4

$$|z|=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$$

$$I=\oint_c \frac{\sin z}{1-\frac{\alpha}{z}}dz=\oint_c \frac{z\sin z}{z-\alpha}dz$$

$z=\alpha$ قطب ساده‌ای است که داخل دایره یکه $C:|z|=1$ قرار دارد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}(f)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=\alpha\sin\alpha$$

$$I=2\pi i\alpha\sin\alpha$$

2) گزینه 1

$$\begin{cases} z=e^{i\theta} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}, \sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}, C:|z|=1$$

$$I=\oint_c \frac{1}{1-2P\frac{z^2-1}{2iz}+P^2}\frac{dz}{iz}=\frac{-1}{P}\oint_c \frac{dz}{z^2-zi(p+\frac{1}{p})-1}$$

$z^2-zi(P+\frac{1}{P})-1=0 \Rightarrow z=ip, \frac{i}{p}$ **قطب‌های ساده**

$z=ip$ داخل **C** قرار دارد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=ip}(f)=\frac{1}{2z-i(P+\frac{1}{P})}\Bigg|_{z=ip}=\frac{-i}{p-\frac{1}{p}}=\frac{-ip}{p^2-1}$$

$$I=-\frac{1}{P}2\pi i(\frac{-iP}{P^2-1})=\frac{2\pi}{1-P^2}$$

3) گزینه 4

$$|z|=2 \Rightarrow z\bar{z}=4 \Rightarrow \bar{z}=\frac{4}{z}$$

$$\operatorname{Re}(z)=x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}(z+\frac{4}{z})$$

$$I=\oint_c (z-\operatorname{Re}(z))\,dz=\oint_c (z-\frac{1}{2}z-\frac{2}{z})\,dz=$$

$$\oint_c (\frac{1}{2}z-\frac{2}{z})\,dz$$

$$f(z)=\frac{1}{2}z-\frac{2}{z}$$

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}}(f) = -2 \Rightarrow I = 2\pi j(-2) = -4\pi j$$

4) گزینه 3

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm j$$

$z = \pm j$ قطب‌های ساده هستند و داخل مسیر $\mathbf{C}$ قرار دارند.

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2 + 1}$$

$$\underset{z=j}{\operatorname{Res}}(f) = \left.\frac{e^{zt}}{2z}\right|_{z=j} = \frac{e^{jt}}{2j}$$

$$\underset{z=-j}{\operatorname{Res}}(f) = \left.\frac{e^{zt}}{2z}\right|_{z=-j} = \frac{e^{-jt}}{-2j}$$

$$I = 2\pi j\left(\frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j}\right) = \pi(e^{jt} - e^{-jt}) = 2\pi j \sin t$$

5) گزینه 3

$z = 1$ قطب مرتبه 3 تابع $\mathbf{f}$ می‌باشد و داخل دایره $|z| = 2$ قرار دارد.

$$f(z) = \frac{e^{3zt}}{(z-1)^3}$$

$$\underset{z=1}{\operatorname{Res}}(f) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}((z-1)^3 f(z))'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(9t^2 e^{3zt}) = \frac{9t^2}{2}e^{3t}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{9t^2}{2}e^{3t}\right) = 9\pi i t^2 e^{3t}$$

6) گزینه 1

نقاط قطب: $z^2 - 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2$

$z = \pm 2$ درون مسیر $\mathbf{C}$ قرار ندارند بنابراین تابع $\mathbf{f}$ درون $\mathbf{C}$ تحلیلی می‌باشد و $I = 0$ است.

7) گزینه 3

می‌دانیم انتگرال ناسره به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

اگر دو حد فوق موجود باشند آنگاه می‌توان دو حد را به صورت یک حد بنویسیم که بـه آن مقـدار اصـلی کوشـی (P.V)

ی ر

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

در تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}$ چون صفر ساده‌ی حقیقی مخرج با صفر صورت حذف می‌شود بنابراین انتگرال‌های فوق موجـود هستند بنابراین

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right) + \pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right)\right]$$

$z=0$ روی محور حقیقی است بنابراین مانده آن را در πi ضرب می‌کنیم.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z(z+i)} = \frac{e^{-1}}{-2} = -\frac{1}{2e}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{z^2+1} = 1$$

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right) + \pi i(1)\right] = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

8) گزینه 2

$z=0$ قطب مرتبه 5 تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{z^5}$ است و داخل $|z|=1$ قرار دارد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}(z^5 f(z))^{(4)} = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0} e^z = \frac{1}{4!}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right) = \frac{\pi i}{12}$$

9) گزینه 1

$$I = \int_{AB}(1+y-ix)dz \ , A=1, B=-i$$

$$z = x+iy \Rightarrow iz = ix - y \Rightarrow y - ix = -iz$$

$$I = \int_{1}^{-i}(1-iz)\,dz = \left[z - i\frac{z^2}{2}\right]_1^{-i} = -1$$

10) گزینه 3

$z=0$ نقطه تکین ضروری داخل $|z|=1$ می‌باشد بنابراین

$$f(z) = z^2 e^{\frac{4}{z^3}} = z^2\left(1+\frac{4}{z^3}+\mathbf{K}\right) = z^2 + \frac{4}{z} + \mathbf{K}$$

$$_{z=0}$$

$$I = 2\pi i(4) = 8\pi i$$

11) گزینه 1

$$C: |z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$I = \oint_c \frac{e^z dz}{\frac{1}{z^2} + 4} = \oint_c \frac{z^2 e^z}{1+4z^2} dz \ , \ f(z) = \frac{z^2 e^z}{1+4z^2}$$

$1+4z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\frac{i}{2} : c$ **قطب‌های ساده داخل**

$$\underset{z=\frac{i}{2}}{\operatorname{Res}}(f) = \left.\frac{z^2 e^z}{8z}\right|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{i}{16} e^{\frac{i}{2}}$$

$$\underset{z=-\frac{i}{2}}{\operatorname{Res}}(f) = \left.\frac{z^2 e^z}{8z}\right|_{z=-\frac{i}{2}} = -\frac{i}{16} e^{-\frac{i}{2}}$$

$$I = 2\pi i \frac{i}{16}(e^{\frac{i}{2}} - e^{-\frac{i}{2}}) = -\frac{\pi i}{4} \sin\frac{1}{2}$$

12) گزینه 3

$z = 0, -1$ قطب‌های ساده‌ی $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ هستند که هر دو داخل **C** می‌باشند بنابراین

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}}(f) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z+1} = 1$$

$$\underset{z=-1}{\operatorname{Res}}(f) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z}{z} = -\frac{1}{e}$$

$$I = 2\pi i(1 - \frac{1}{e})$$

13) گزینه 3

$z = i$ قطب ساده‌ی $f(z) = \frac{1}{z-i}$ بوده و داخل **C** است بنابراین

$$\underset{z=i}{\operatorname{Res}}(f) = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = 1$$

$$I = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) = 1$$

$z=0$ و قطب ساده $z=\pi$ قطب مرتبه دو:

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}=\frac{1}{\pi^2}$$

$$\underset{z=\pi}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to \pi}\left(\frac{\cos z}{z}\right)'=\lim_{z\to \pi}\frac{-(\sin z)z-\cos z}{z^2}=\frac{1}{\pi^2}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{4i}{\pi}$$

15) گزینه صحیح ندارد

قطب‌های ساده: $z=0,-2,-4$

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)(z+4)}=\frac{1}{8}\ ,\ \underset{z=-2}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to -2}\frac{1}{z(z+4)}=\frac{-1}{4}$$

$$\underset{z=-4}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to -4}\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{8}$$

فقط $z=0$ داخل γ_1 قرار دارد بنابراین

$$\oint_{\gamma_1}\frac{dz}{z(z+2)(z+4)}=2\pi i\frac{1}{8}=\frac{\pi i}{4}$$

$z=0$ داخل γ_2 و $z=-2$ روی γ_2 می‌باشد بنابراین تغییر زاویه‌ی مربوط به منحنی γ_2 در نزدیکی $z=-2$ برابر π است.

$$\oint_{\gamma_2}\frac{dz}{z(z+2)(z+4)}=2\pi i\left(\frac{1}{8}\right)+\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

16) گزینه 4

$z=1,2$ قطب‌های ساده بوده و داخل $\mathbf{C}$ قرار دارند.

$$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-2}=1$$

$$\underset{z=2}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 2}\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z-1}=1$$

$$I=2\pi j(1+1)=4\pi j$$

17) گزینه 1

$$z^3-1=0\Rightarrow z=\sqrt[3]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{3}}\ ,K=0,1,2$$

قطب‌های ساده: $z=1\ ,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ,e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\frac{e^z}{3z^2}\Big|_{z=1}=\frac{e}{3}$$

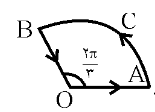
$$I=2\pi i\left(\frac{e}{3}\right)=\frac{2\pi e i}{3}$$

18) گزینه 3

$z=\frac{i}{3}$ **قطب ساده داخل دایره یکه:**

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{3}}(f)=\lim_{z\to\frac{i}{3}}\left(z-\frac{i}{3}\right)f(z)=\frac{1}{3}\sinh\left(\frac{i}{3}\right)=\frac{i}{3}\sin\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow I=2\pi i\left(\frac{i}{3}\sin\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{1}{3}\right)$$

19) گزینه 1



$$OA: z=x\ ,\ \bar{z}=x, dz=dx\ , 0\le x\le 1$$

$$\int_{OA}\bar{z}dz=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$$

$$AB: z=e^{i\theta}\ ,\ 0\le\theta\le\frac{2\pi}{3}\ ,\ \bar{z}=e^{-i\theta}\ , dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int_{AB}\bar{z}dz=\int_0^{\frac{2\pi}{3}} i d\theta=\frac{2\pi}{3}i$$

$$BO: z=re^{i\frac{2\pi}{3}}\ ,\ r:1\to 0\ \ ,\ \bar{z}=re^{-i\frac{2\pi}{3}}\ , dz=e^{i\frac{2\pi}{3}}dr$$

$$\int_{BO}\bar{z}dz=\int_1^0 r dr=-\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}i-\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{3}i$$

20) گزینه 1

$$\sin z(z-2j)^3=0\Rightarrow z=k\pi\ ,\ k=0\pm 1,\mathbf{K}\ \ , z=2j$$

نقاط تکین فوق همگی خارج مسیر $\mathbf{C}$ قرار دارند بنابراین $I=0$ می‌باشد.

21) گزینه صحیح ندارد.

$z=1$ خارج دایره‌ی $|z|=\frac{1}{2}$ است ولی $z=0$ داخل $\mathbf{C}$ قرار دارد بنابراین

$$f(z)=\frac{1}{1-z}e^{z}=(1+z+z^{2}+z^{3}+\mathbf{K})(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^{2}}+\mathbf{K})$$

$$(\frac{1}{z})\ \text{ضریب}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\mathbf{K}=e-1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=e-1$$

$$I=2\pi j(e-1)$$

22) گزینه 1

$$\cos z=0\Rightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

نقاط تکین فوق خارج دایره‌ی $|z|=1$ قرار دارند بنابراین تابع $\frac{1}{\cos z}$ داخل $|z|=1$ تحلیلی است و $I=0$ می‌باشد.

23) گزینه 4

$z=0,1$ قطب‌های ساده‌ی $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)}$ هستند که هر دو داخل $\mathbf{C}$ قرار دارند.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to0}\frac{5z-2}{z-1}=2\ ,\ \operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\lim_{z\to1}\frac{5z-2}{z}=3$$

$$I=2\pi i(2+3)=10\pi i$$

24) گزینه 2

$$f(z)=\frac{1}{(z^{2}+1)(z^{2}+9)}$$

$$(z^{2}+1)(z^{2}+9)=0\Rightarrow z=\pm i,\pm3i$$

$z=i,3i$ بالای محور حقیقی هستند بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^{2}+9)}=\frac{1}{16i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}(f)=\lim_{z\to3i}(z-3i)f(z)=\lim_{z\to3i}\frac{1}{(z^{2}+1)(z+3i)}=\frac{-1}{48i}$$

$$I=2\pi i(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i})=\frac{\pi}{12}$$

25) گزینه 2

$$z=e^{i\theta}\ ,\ 0\le\theta\le2\pi\Rightarrow\cos\theta=\frac{z^{2}+1}{2z},d\theta=\frac{dz}{iz},C:|z|=1$$

$$I = \int_0 \frac{}{2+\cos\theta} = \oint_c \frac{}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{}{iz} = \frac{}{i}\oint_c \frac{}{z^2+4z+1}dz$$

$$z^2+4z+1=0 \Rightarrow z=-2-\sqrt{3}\,,-2+\sqrt{3}$$

$z=-2+\sqrt{3}$ داخل دایره واحد قرار دارد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}}(f)=\frac{1}{2z+4}\Big|_{z=-2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$I=\frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

26) گزینه 3

$$1-\cos z=0 \Rightarrow \cos z=1 \Rightarrow z=2k\pi,\ k=0,\pm1,\ldots$$

فقط $z=0$ داخل دایره واحد است و قطب مرتبه 2 می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2e^z}{1-\cos z}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2e^z}{2\sin^2\frac{z}{2}}\right)'=\lim_{z\to0}(2e^z)'=2$$

$$I=2\pi i(2)=4\pi i$$

27) گزینه 3

$z=\pm3i$ هر دو قطب ساده و داخل $|z|=4$ هستند بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}(f)=\frac{z+1}{2z}\Big|_{z=3i}=\frac{3i+1}{6i}\ ,\ \operatorname*{Res}_{z=-3i}(f)=\frac{z+1}{2z}\Big|_{z=-3i}=\frac{1-3i}{-6i}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1+3i}{6i}-\frac{1-3i}{6i}\right)=2\pi i$$

28) گزینه 4

$$4(x-2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow (x-2)^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

نقطه‌ی $z=0$ خارج C می‌باشد. نقطه‌ی $z_0=2\ (x=2,y=0)$ داخل C است.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^z}{z(z-z_0)}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{e^z}{z}=\frac{e^{z_0}}{z_0}$$

$$f(z_0)=2\pi i\frac{e^{z_0}}{z_0} \Rightarrow f'(z_0)=2\pi i\frac{z_0e^{z_0}-e^{z_0}}{z_0^2}$$

$$f'(2)=\frac{\pi i}{2}e^2$$

29) گزینه 3

$I_1 = \oint_C \frac{\quad}{z(z-2)}$

$z = 0$:C **قطب ساده داخل**

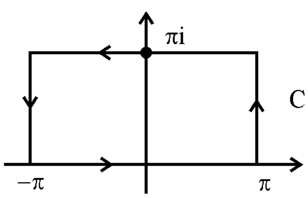
$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}}(f) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = 2\pi i(-\frac{1}{2}) = -\pi i$$

در انتگرال‌های I_2, I_3, I_4، نقاط تکین تابع داخل انتگرال، خارج دایره واحد می‌باشند بنابراین مقدار انتگرال‌ها صفر است.

30) گزینه 2

$$\cosh z = 0 \Rightarrow \cos(iz) = 0 \Rightarrow iz = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = -i(k\pi + \frac{\pi}{2})$$
$$k = 0, \pm 1, \ldots$$

فقط $z = \frac{\pi}{2}i$ داخل مسیر **C** قرار دارد.



$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\underset{z=\frac{\pi}{2}i}{\operatorname{Res}}(f) = \left.\frac{1}{\sinh z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{i\sin\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$I = 2\pi i(-i) = 2\pi$$

31) گزینه 1

$$f(z) = \frac{\sin(\frac{z}{2})}{z^2\cos(\frac{z}{2})}$$

$$z^2\cos(\frac{z}{2}) = 0 \Rightarrow z = 0, z = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$$

فقط $z = 0$ داخل دایره یکه است و قطب ساده می‌باشد بنابراین

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}}(f) = \lim_{z\to 0} z\frac{\tan(\frac{z}{2})}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\tan(\frac{z}{2})}{z} = \frac{1}{2}$$

$$I = 2\pi i(\frac{1}{2}) = \pi i$$

32) گزینه 1

33) گزینه 4

تابع $f(z)=(z+2)e^{iz}$ تحلیلی است بنابراین از تابع اولیه استفاده می‌کنیم

$$I=\int_c (z+2)e^{iz}dz=\int_{(0,0)}^{(\pi,1)}(z+2)e^{iz}\,dz=\left[\frac{1}{i}(z+2)e^{iz}+e^{iz}\right]_0^{\pi+i}$$

$$I=\frac{1}{i}(\pi+2+i)e^{i(\pi+i)}+e^{i(\pi+i)}-\frac{2}{i}-1=i(\frac{\pi+2}{e}+2)-(1+\frac{2}{e})$$

34) گزینه 3

$$z^2(z+2)=0\Rightarrow z=0,-2$$

$z=0$ قطب مرتبه دو و داخل مسیر **C** می‌باشد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to 0}(\frac{e^z}{z+2})'=\lim_{z\to 0}\frac{(z+2)e^z-e^z}{(z+2)^2}=\frac{1}{4}$$

$$I=2\pi i(\frac{1}{4})=\frac{\pi i}{2}$$

35) گزینه 1

$$f(z)=\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}=\frac{z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$z=i,2i$ قطب ساده بوده و بالای محور حقیقی قرار دارند بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z\to i}(f)=\lim_{z\to i}\frac{z^2-1}{(z+i)(z^2+4)}=-\frac{1}{3i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}(f)=\lim_{z\to 2i}\frac{z^2-1}{(z^2+1)(z+2i)}=\frac{5}{12i}$$

$$I=2\pi i(-\frac{1}{3i}+\frac{5}{12i})=\frac{\pi}{6}$$

36) گزینه 4

$$\cosh(2z)=0\Rightarrow\cos(2iz)=0\Rightarrow z=-\frac{i}{2}(k\pi+\frac{\pi}{2}),k=0,\pm1,\mathbf{K}$$

نقاط $z=-\frac{i\pi}{4}$, $z=\frac{i\pi}{4}$ قطب ساده بوده و داخل دایره واحد هستند بنابراین:

$$\operatorname*{Res}_{z=i\frac{\pi}{4}}(f)=\frac{z^n}{2\sinh(2z)}=\frac{1}{2i}(i\frac{\pi}{4})^n \quad , \quad \operatorname*{Res}_{z=-i\frac{\pi}{4}}(f)=\frac{z^n}{2\sinh(2z)}\bigg|_{z=-i\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2i}(-i\frac{\pi}{4})^n$$

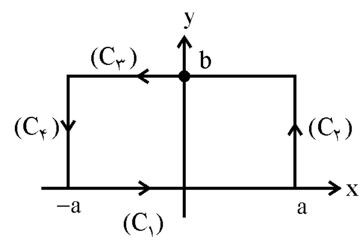
$$I = 2\pi i(\frac{\quad}{2i}(1\frac{\quad}{4}) - \frac{\quad}{2i}(-1\frac{\quad}{4})) = \pi(1\frac{\quad}{4})(1-(-1))$$

37) گزینه 1

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1+i, -1-i$$

نقاط فوق هر دو خارج دایره واحد هستند بنابراین $I = 0$ می‌باشد.

38) گزینه 1



تابع e^{-z^2} تحلیلی است بنابراین

$$\int_{c_1} e^{-z^2} dz + \int_{c_2} e^{-z^2} dz + \int_{c3} e^{-z^2} dz + \int_{c_4} e^{-z^2} dz = 0$$

$$C_1 : z = x, -a \le x \le a, dz = dx$$

$$\int_{c_1} e^{-z^2} dz = \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = 2\int_0^a e^{-x^2} dx, a \to \infty \Rightarrow \int_{c_1} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

$$C_2 : z = a + iy, 0 \le y \le b, dz = idy$$

$$\int_{c_2} e^{-z^2} dz = \int_0^b e^{y^2 - a^2 - 2iay} idy = i\int_0^b e^{y^2 - a^2} \cos(2ay)dy + \int_0^b e^{y^2 - a^2} \sin(2ay)dy$$

هر دو انتگرال فوق با فرض $a \to \infty$ صفر هستند چون $\lim_{a\to\infty} e^{y^2 - a^2} = 0, 0 \le y \le b$ بنابراین اگر $a \to \infty$ آنگاه $\int_{c_2} e^{-z^2} dz = 0$

به همین ترتیب اگر $a \to \infty$ آنگاه $\int_{c_4} e^{-z^2} dz = 0$ می‌باشد.

$$C_3 : z = x + ib, x : a \to -a, dz = dx$$

$$\int_{c_3} e^{-z^2} dz = \int_a^{-a} e^{-x^2 + b^2 - 2ibx} dx = -\int_{-a}^{a} e^{-x^2 + b^2} \cos(2bx)dx + i\int_{-a}^{a} e^{-x^2 + b^2} \sin(2bx)\, dx$$

چون $e^{-x^2+b^2} \sin(2bx)$ فرد است بنابراین انتگرال دوم در رابطه‌ی فوق صفر می‌باشد و اگر $a \to \infty$ آنگاه

$$\int_{c_3} e^{-z^2} dz = -e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = -2e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} (2bx)\, dx$$

با فرض $a \to \infty$، نتیجه نهایی به صورت زیر است:

$$\sqrt{\pi} - 2e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

39) گزینه 4

$z=-\frac{1}{2}$ قطب مرتبه ۳ تابع $f(z)=\frac{z^4+1}{(2z+1)^3}$ است که داخل $|z|=1$ قرار دارد.

$$\underset{z=-\frac{1}{2}}{\mathrm{Res}}(f)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}((z+\frac{1}{2})^3 f(z))''=\frac{1}{2}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}(z^4+1))''=\frac{3}{16}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{3}{16})=\frac{3\pi i}{8}$$

40) گزینه 2

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}2\pi i\sum_{\mathrm{Im}(z)>0}\mathrm{Res}(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)})$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

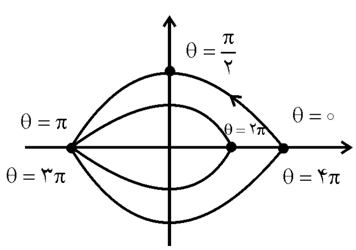
$z=bi, z=ai$ بالای محور حقیقی هستند

$$\underset{z=ai}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to ai}\frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)}=\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}$$

$$\underset{z=bi}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to bi}\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}$$

$$I=\pi i(\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}+\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}=\frac{\pi}{2ab(b+a)}$$

41) گزینه 4



$$r=3-\sin^2\frac{\theta}{4}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ 0\le\theta\le 4\pi$$

$$\theta=0\Rightarrow r=3\ ,\ \theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow r=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\theta=\pi\Rightarrow r=\frac{5}{2}\ ,\ \theta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow r=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\theta=2\pi\Rightarrow r=2\ ,\ \theta=3\pi\Rightarrow r=\frac{5}{2}$$

$$\theta=4\pi\Rightarrow r=3$$

بنابراین در بازه‌ی $0\le\theta\le 4\pi$ (دور تناوب **r**)، مسیر بسته‌ی **C** دو دور کامل نقطه‌ی $z=0$ را دور می‌زند بنابراین

$$I = 2(2\pi i)\operatorname*{Res}_{z=0}(\frac{1}{z}) = 4\pi i(1) = 4\pi i$$

42) گزینه 3

$$f(z)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}z)}{\cos(\frac{\pi}{2}z)}\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2}z)=0 \Rightarrow z=\frac{2}{\pi}(k\pi+\frac{\pi}{2}), k=0,\pm1,\ldots$$

فقط $z=1$ قطب ساده بوده و داخل مسیر $\mathbf{C}$ قرار دارد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}z)}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}z)}\Big|_{z=1}=-\frac{2}{\pi}$$

$$I=2\pi i(-\frac{2}{\pi})=-4i$$

43) گزینه 3

$\cos z$ تابعی تحلیلی است بنابراین

$$I=\int_0^{(1+i)\pi}\cos z dz=\sin z\Big|_0^{(1+i)\pi}=\sin((1+i)\pi)=-\sin(i\pi)$$

$$I=-i\sinh(\pi)$$

44) گزینه 1

$z=0$ قطب ساده‌ی $f(z)=\frac{z\cos^2 z+2\sin^2 z}{z\sin 2z}$ می‌باشد که داخل $\mathbf{C}$ قرار دارد.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos^2 z+2\sin^2 z}{\sin 2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z+2z}{2}=\frac{1}{2}$$

$$I=2\pi i(\frac{1}{2})=\pi i$$

45) گزینه 3

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z)>0}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right]$$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

$z=i$ قطب ساده بوده و بالای محور حقیقی است بنابراین:

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f)=\frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=i}=\frac{1}{2i}\frac{1}{e}$$

$$I = \frac{\quad}{2}\mathrm{Re}\left[(2\pi i)(\frac{\quad}{2ie})\right] = \frac{\quad}{2e}$$

46) گزینه 4

$$z = 2e^{i\theta}, dz = 2ie^{i\theta}\,d\theta, 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_c \frac{3}{z}dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 3i\,d\theta = (3i)(\frac{3\pi}{2}) = \frac{9\pi}{2}i$$

47) گزینه 4

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{1+z^2}$$

$z = i$ قطب ساده‌ی $f(z)$ است که بالای محور حقیقی قرار دارد.

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f) = \frac{e^{2iz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2ie^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\frac{1}{2ie^2}\right] = \frac{\pi}{e^2}$$

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4e^2} = \frac{\pi(e^2+1)}{4e^2}$$

48) گزینه 2

$$f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$$

$z = 0$ قطب مرتبه یک تابع $f(z)$ می‌باشد و چون روی محور حقیقی قرار دارد مانده‌ی آن را در πi ضرب می‌کنیم.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx = \mathrm{Re}\left[\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}(f)\right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{iae^{iaz} - ibe^{ibz}}{1} = i(a-b)$$

$$I = \mathrm{Re}\left[\pi i(i(a-b))\right] = \pi(b-a)$$

49) گزینه 3

$z = 0$ قطب مرتبه 6 است.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\left[z^6\frac{e}{z^6}\right]=\frac{1}{5!}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{5!}\right)=\frac{2\pi i}{5!}$$

50) گزینه 1

$z=\pm\pi i$ قطب‌های مرتبه 2 تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$ می‌باشند و داخل دایره $|z|=4$ قرار دارند.

$$\operatorname*{Res}_{z=-\pi i}(f)=\lim_{z\to-\pi i}\left(\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}\right)'=\lim_{z\to-\pi i}\frac{e^z(z-\pi i)^2-2(z-\pi i)e^z}{(z-\pi i)^4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\pi i}(f)=\frac{\pi-i}{4\pi^3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi i}(f)=\lim_{z\to\pi i}\left(\frac{e^z}{(z+\pi i)^2}\right)'=\lim_{z\to\pi i}\frac{e^z(z+\pi i)^2-2(z+\pi i)e^z}{(z+\pi i)^4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi i}(f)=\frac{\pi+i}{4\pi^3}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{\pi-i}{4\pi^3}+\frac{\pi+i}{4\pi^3}\right)=\frac{i}{\pi}$$

51) گزینه 3

$$2z^2-z=0\Rightarrow z=0,\frac{1}{2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{2z^2-z}=\lim_{z\to 0}\frac{\pi z}{2z^2-z}=-\pi$$

$z=0$ رفع شدنی است.

$z=\dfrac{1}{2}$ قطب مرتبه یک داخل دایره واحد است بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}(f)=\left.\frac{\sin\pi z}{4z-1}\right|_{z=\frac{1}{2}}=1\Rightarrow I=2\pi i(1)=2\pi i$$

52) گزینه 4

$$f(z)=\frac{\cosh z}{(z-i)\sinh z}$$

$$\sinh z=0\Rightarrow\sin(iz)=0\Rightarrow iz=k\pi\Rightarrow z=ik\pi,\ k=0,\pm1,\ldots$$

$z=i,z=0$ قطب ساده‌ی $f(z)$ بوده و داخل $|z|=2$ هستند.

$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to 0}\frac{\quad}{(z-i)\sinh z}=i\ ,\ \underset{z=i}{\mathrm{Res}}(f)=\lim_{z\to i}\frac{\quad}{\sinh z}=\coth(i)$

$I=2\pi i(\coth(i)+i)$

53) گزینه 3

$z=0$ قطب مرتبه 5 تابع $\frac{\sin 2z}{z^6}$ است و داخل $\mathbf{C}$ قرار دارد.

$$\frac{\sin 2z}{z^6}=\frac{1}{z^6}(2z-\frac{8z^3}{3!}+\frac{32z^5}{5!}-\mathbf{K})\Rightarrow \underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\frac{4}{15}$$

$$I=2\pi i(\frac{4}{15})=\frac{8\pi i}{15}$$

54) گزینه 2

$z=0$ قطب مرتبه 5 می‌باشد.

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(f)=\frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}(\cosh z)^{(4)}=\frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\cosh z=\frac{1}{4!}$$

$$I=2\pi i(\frac{1}{4!})=\frac{\pi i}{12}$$

55) گزینه 1

$$I=\oint_c |z|^2 dz$$

$AB: z=x\ , 0\le x\le 1, dz=dx$

$$\int_{AB}|z|^2 dz=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$$

$BC: z=1+iy\, , 0\le y\le 1, dz=idy$

$$\int_{BC}|z|^2 dz=\int_0^1 i(1+y^2)dy=\frac{4}{3}i$$

$CD: z=x+i\ ,\ x:1\to 0, dz=dx$

$$\int_{CD}|z|^2 dz=\int_1^0 (x^2+1)dx=-\frac{4}{3}$$

$DA: z=iy\ ,\ y:1\to 0, dz=idy$

$$\int_{DA}|z|^2 dz=\int_1^0 iy^2 dy=-\frac{1}{3}i$$

$$I=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}i=-1+i$$

$z=0$ قطب مرتبه **n** تابع $f(z)=\dfrac{z-1}{e^z z^n}$ می‌باشد که داخل دایره واحد است.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}((z-1)e^{-z})^{(n-1)}$$

$$(uv)^{(k)}=uv^{(k)}+nu'v^{(k-1)}+\frac{n(n-1)}{2}u''v^{(k-2)}+\ldots+u^{(k)}v$$

$$((z-1)e^{-z})^{(n-1)}=(z-1)(-1)^{n-1}e^{-z}+(n-1)(1)(-1)^{n-2}e^{-z}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{(n-1)!}((-1)^n+(n-1)(-1)^n)=\frac{n(-1)^n}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{z-1}{e^z z^n}dz=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{n(-1)^n}{(n-1)!}$$

57) گزینه 3

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z+1}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)=2\pi i$$

$$\oint_c\frac{dz}{z+1}=\oint_c\frac{dx+idy}{x+1+iy}=\oint_c\frac{(dx+idy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$I=\oint_c\frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}+i\oint_c\frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi i$$

$$\oint_c\frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}=0\ ,\ \oint_c\frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi$$

58) گزینه 2

$$f(z)=\frac{\cot\pi z}{z^{2k+1}}=\frac{\cos\pi z}{z^{2k+1}\sin\pi z}$$

$$z^{2k+1}\sin\pi z=0\Rightarrow z=0\ ,\ z=k\,,k=0\ ,\pm1,\ldots$$

$z=0$ قطب مرتبه $2k+2$ و $z=\pm1$ قطب‌های ساده، درون و روی بیضی $x^2+4y^2=1$ قرار دارند.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{(2k+1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)^{(2k+1)}=0$$

تابع $\dfrac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}$ زوج است بنابراین مشتق مرتبه $(2k+1)$ ام آن، تابعی فرد خواهد بود و حد آن در $z=0$ صفر می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\lim_{z\to1}\frac{\cos(\pi z)(z-1)}{z^{2k+1}\sin(\pi z)}=\lim_{z\to1}\frac{-(z-1)}{\sin(\pi z)}=\lim_{z\to1}\frac{-1}{\pi\cos\pi z}=\frac{1}{\pi}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}(f)=\lim_{z\to-1}\frac{\cos(\pi z)(z+1)}{z^{2k+1}\sin(\pi z)}=\lim_{z\to-1}\frac{z+1}{\sin(\pi z)}=\lim_{z\to-1}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}=\frac{-1}{\pi}$$

z=1 z=−1

59) گزینه 4

$$f(z)=\frac{\sin(z+1)\pi+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\lim_{z\to1}\frac{\sin(z+1)\pi+\cos\pi z}{z-2}=1\ ,\operatorname*{Res}_{z=2}(f)=\lim_{z\to2}\frac{\sin(z+1)\pi+\cos\pi z}{z-1}=1$$

$$I=2\pi i(1+1)=4\pi i$$

60) گزینه 1

$z=0$ قطب مرتبه $2n$ است.

$$f(z)=\frac{(z+1)\cos z}{z^{2n}}=\frac{z+1}{z^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{z^{2k}}{z^{2n-1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{z^{2k}}{z^{2n}}$$

در سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{z^{2k}}{z^{2n}}$ جمله‌ای $\frac{1}{z}$ وجود ندارد.

و در سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{z^{2k}}{z^{2n-1}}$ به ازای $k=n-1$ به جمله‌ی $\frac{1}{z}$ $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$ می‌رسیم بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\Rightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{(z+1)\cos z}{z^{2n}}dz=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$$

61) گزینه 4

$z=0$ خارج مسیر $\mathbf{C}$ قرار دارد بنابراین باید $z=w$ داخل مسیر $\mathbf{C}$ باشد آنگاه

$$\operatorname*{Res}_{z=w}(f)=\lim_{z\to w}\frac{z^2-z+1}{z}=\frac{w^2-w+1}{w}=w-1+\frac{1}{w}$$

$$f(w)=2\pi i(w-1+\frac{1}{w})\Rightarrow f'(w)=2\pi i(1-\frac{1}{w^2})$$

$$f'(5)=\frac{48\pi i}{25}$$

البته مقدار $w=5$ داخل مسیر $\mathbf{C}$ قرار ندارد بنابراین صورت تست دارای ایراد است.

62) گزینه 4

$z=0$ تکین اساسی است.

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\mathbf{K})\Rightarrow\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=-\frac{1}{6}$$

$I = 2\pi i(-\frac{\;}{6}) = -\frac{\;}{3}$

63) گزینه 1

قطب‌های ساده: $4z^3 + z = 0 \Rightarrow z(4z^2+1) = 0 \Rightarrow z = 0, \pm\frac{i}{2}$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f) = \lim_{z\to 0}\frac{(z+2)^2}{4z^2+1} = 4$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{2}}(f) = \left.\frac{(z+2)^2}{12z^2+1}\right|_{z=\frac{i}{2}} = -\frac{1}{2}(2+\frac{i}{2})^2 = -\frac{15}{8} - i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}}(f) = \left.\frac{(z+2)^2}{12z^2+1}\right|_{z=-\frac{i}{2}} = -\frac{1}{2}(2-\frac{i}{2})^2 = -\frac{15}{8} + i$$

$$I = 2\pi i(4 - \frac{15}{8} - i - \frac{15}{8} + i) = \frac{\pi i}{2}$$

64) گزینه 2

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+4x^4} = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z)>0}\operatorname{Res}(\frac{1}{1+4z^4})$$

$$f(z) = \frac{1}{1+4z^4}\ ,\ 1+4z^4 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}\ ,\ k = 0,1,2,3$$

قطب‌های بالای محور حقیقی: $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\ ,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f) = \left.\frac{1}{16z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{2\sqrt{2}}{16e^{i\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{1}{8}(1+i)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}(f) = \left.\frac{1}{16z^3}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{8}(1-i)$$

$$I = 2\pi i(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i) = \frac{\pi}{2}$$

65) گزیه 3

$$z^2\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi, k = 0, \pm 1, \mathbf{K}$$

فقط قطب مرتبه 3، $z = 0$، داخل $|z| = 3$ قرار دارد.

$$f(z) = \frac{1}{z^2\sin z} = \frac{1}{z^2(z - \frac{z^3}{3!} + \mathbf{K})} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \mathbf{K})}$$

کافی است در $\frac{\quad}{1-\frac{z^2}{3!}+\dots}$ جمله‌ی شامل z^2 را تعیین کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-\frac{z^{2}}{3!}+\frac{z^{4}}{5!}-\dots \\ \underline{1-\frac{z^{2}}{3!}+\dots} & \overline{1+\frac{z^{2}}{6}+\dots} \\ \frac{z^{2}}{6}-\dots & \end{array}$$

بنابراین $f(z)$ شامل جمله‌ی $\frac{1}{z^3}\frac{z^2}{6}=\frac{1}{6z}$ می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\frac{1}{6}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{1}{6})=\frac{\pi i}{3}$$

66) گزینه 4

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}.e^{\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots)$$

$$(\frac{1}{z})\ \text{ضریب}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$I=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

67) گزینه 3

$$I=\int_0^{2\pi}\cos(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$z=e^{i\theta}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}\ ,\ c:|z|=1$$

$$I=\oint_c\frac{\cos(z)}{iz}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}(\frac{\cos(z)}{iz})=2\pi i\lim_{z\to 0}(\frac{\cos z}{i})=2\pi$$

68) گزینه 3

$z=1$ نقطه تکین اساسی است و داخل $|z|=2$ قرار دارد.

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-1}},z=1+t\Rightarrow f(z)=(1+t)^2e^{\frac{1}{t}}$$

$$f(z)=(t^2+2t+1)(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}+\dots)$$

$$(\frac{1}{t})\ \text{ضریب}=(\frac{1}{z-1})\ \text{ضریب}=1+1+\frac{1}{3!}=\frac{13}{6}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{13}{6})=\frac{13\pi i}{3}$$

69) گزینه 2

تابع $f(z)=\frac{}{\sin z}$ در $z=0$ شامل نقطه تکین رفع‌شدنی می‌باشد بنابراین

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=0 \Rightarrow I=0$$

70) گزینه 3

$$C:|z-3i|=\frac{1}{3}$$

$$z^3-iz^2+6z=0 \Rightarrow z(z^2-iz+6)=0 \Rightarrow z=0,-2i\ ,3i$$

فقط $z=3i$ داخل دایره $\mathbf{C}$ قرار دارد.

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}(f)=\lim_{z\to 3i}\frac{2z+1}{z(z+2i)}=-\frac{1}{15}(1+6i)$$

$$I=2\pi i(-\frac{1}{15}(1+6i))=\frac{\pi}{15}(12-2i)$$

71) گزینه 2 و 3 هر دو صحیح است.

$$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i\ ,f(z)=\frac{\sin z}{z^2+1},C:|z-i|=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f)=\frac{\sin z}{2z}\Big|_i=\frac{1}{2i}\sin(i)$$

$z=i$ فقط داخل $\mathbf{C}$ می‌باشد.

$$I=2\pi i(\frac{1}{2i}\sin(i))=\pi\sin(i)=\pi i\sinh\ (1)$$

72) گزینه صحیح ندارد.

$z=\pm 1$ قطب‌های مرتبه 2 هستند.

$$f(z)=\frac{e^2}{(z^2-1)^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}(f)=\lim_{z\to 1}(\frac{e^2}{(z+1)^2})'=-\frac{e^2}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}(f)=\lim_{z\to -1}(\frac{e^2}{(z-1)^2})'=\frac{e^2}{4}$$

$$I=2\pi i(-\frac{e^2}{4}+\frac{e^2}{4})=0$$

73) گزینه 4

$z=-i$ قطب مرتبه 4 است.

$$f(z)=\frac{e}{(z+i)^4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i}(f)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to -i}(e^{z^2})'''=\frac{1}{3!}\lim_{z\to -i}(8z^3+12z)e^{z^2}=-\frac{2i}{3e}$$

$$I=2\pi i(-\frac{2i}{3e})=\frac{4\pi}{3e}$$

74) گزینه 2

$$f(z)=\frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2},z^2+2z+2=0\Rightarrow z=-1\pm i$$

$z=-1+i$ بالای محور حقیقی است.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1+i}(f)=\frac{e^{2iz}}{2z+2}=\frac{1}{2i}e^{-2-2i}$$

$$I=\operatorname{Re}\left[2\pi i\frac{1}{2i}e^{-2-2i}\right]=\frac{\pi\cos 2}{e^2}$$

75) گزینه 1

$z=0$ ریشه‌ی مرتبه 2 برای توابع $1-\cos z, z^2e^z$ می‌باشد بنابراین در تابع $\frac{1-\cos z}{z^2e^z}$ نقطه رفع شدنی است یعنـی مانـده‌ی آن صفر می‌باشد و $I=0$

76) گزینه 4

$z=0$ قطب مرتبه $2n+1$ می‌باشد.

$$f(z)=\frac{1}{z^{2n+1}}\cos z=\frac{1}{z^{2n+1}}(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\mathbf{K}+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\mathbf{K})$$

$$(\frac{1}{z})\ \text{ضریب}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Rightarrow I=\frac{2\pi i(-1)^n}{(2n)!}$$

77) گزینه 2

$$g(z)=\cosh z-1\Rightarrow g(0)=g'(0)=0\ ,\ g''(0)\neq 0$$

$z=0$ قطب مرتبه 3 مخرج و قطب مرتبه 2 صورت است بنابراین قطب ساده‌ی تابع $f(z)=\frac{\cosh z-1}{z^2\sin z}$ می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cosh z-1}{z\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^2}{2!}}{z^2}=\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2\pi i}2\pi i(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$\alpha = z$ قطب مرتبه 3 تابع $g(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}\sin\alpha}{(\alpha - z)^3}$ می‌باشد.

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=z}(g) = \frac{1}{2!}\lim_{\alpha\to z}(e^{\alpha}\sin\alpha)'' = \frac{1}{2!}\lim_{\alpha\to z}(2e^{\alpha}\cos\alpha) = e^{z}\cos z$$

$$f(z) = 2\pi i e^{z}\cos z \Rightarrow f''(z) = -4\pi i e^{z}\sin z$$

79) گزینه 1

$z = 0$ نقطه تکین تنها داخل $|z| = 1$ می‌باشد.

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{k}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2k-2n-1}$$

$$k = n \Rightarrow \binom{2n}{n}\frac{1}{z} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}(f) = \binom{2n}{n}$$

$$I = 2\pi i\binom{2n}{n}$$

80) گزینه 1

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 + z^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f) = \frac{\sin z}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}\sin(i)$$

$$I = -2\pi i\left(\frac{1}{2i}\sin(i)\right) = -\pi\sin(i) = -\pi i\sinh(1)$$

81) گزینه 2

$$I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{2(1+x^2)} - \int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{2(1+x^2)}dx$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$$

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{1+z^2},\ 1 + z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}(f) = \frac{e^{2iz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}e^{-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{1}{2i}e^{-2}\right] = \pi e^{-2}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\pi e^{-2} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$$

فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

5-1) مفاهیم اولیه

معادله‌ای که شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع چند متغیره باشد را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم.

بالاترین مرتبه‌ی مشتقات جزئی را در یک معادله دیفرانسیل، مرتبه معادله دیفرانسیل می‌گوئیم.

اگر z یک تابع دو متغیره با متغیرهای مستقل $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ باشد در اینصورت فرم کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول به صورت زیر است.

$$f(z_x,\ z_y,z,x,y)=0$$

فرم کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد.

$$f(z_{xx},z_{yy},z_{xy},z_x,z_y,z,x,y)=0$$

اگر یک معادله دیفرانسیل نسبت به تابع (متغیر وابسته) و تمام مشتقات جزئی آن خطی باشد در اینصورت آن را معادله دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی می‌نامیم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت زیر است:

$$f_1(x,y)z_x+f_2(x,y)z_y+f_3(x,y)z=R(x,y)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$f_1(x,y)z_{xx}+f_2(x,y)z_{xy}+f_3(x,y)z_{yy}+f_4(x,y)z_x+f_5(x,y)z_y+f_6(x,y)z=R(x,y)$$

در معادلات خطی اگر $R(x,y)=0$ باشد، معادله دیفرانسیل را همگن و در غیر اینصورت آن را، معادله دیفرانسیل ناهمگن می‌نامیم.

اگر در معادلات دیفرانسیل خطی ضریب $\mathbf{z}$ و مشتقات جزئی آن، مقادیر ثابت باشند آنگاه آن را معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می‌نامیم.

معادلات خطی مرتبه اول و دوم با ضرایب ثابت به صورت زیر می‌باشند:

$$az_x+bz_y+cz=R(x,y)\ ,\ a,b,c\in R$$

$$az_{xx}+bz_{xy}+cz_{yy}+dz_x+ez_y+fz=R(x,y)$$

اگر یک معادله دیفرانسیل بر حسب مشتقات با بالاترین مرتبه، خطی باشد آنگاه آن را معادله دیفرانسیل شبه خطی (نیمه خطی) می‌نامیم.

$$f_1(x,y,z)\,z_x + f_2(x,y,z)z_y = R(x,y,z)$$

$$f_1(x,y,z)\,z_{xx} + f_2(x,y,z)z_{xy} + f_3(x,y,z)\,z_{yy} = R(z_x, z_y, z, x, y)$$

نکته 1: الف) جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول شامل یک تـاب دلخـواه و یـا حـداکثر دو پـارامتر مسـتقل می‌باشد.

ب) جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شامل دو تابع دلخواه و یا حداکثر پنج پارامتر مستقل می‌باشد.

نکته 2: تشکیل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اگر جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مشخص باشد از آن بر حسب متغیرهای مستقل مشتق مـی‌گیـریم و سـپس در معادلات حاصل با حذف پارامترها یا توابع دلخواه می‌توانیم معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را تعیین کنیم.

مثال ۱: با حذف تابع دلخواه ϕ بین متغیر وابسته Z و متغیرهای مستقل x , y، کـدام معادلـه دیفرانسـیل بـا مشتق نسبی حاصل می‌شود؟

$$\phi(x^2 - z^2, xy) = 0$$

1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial x}{\partial y} = x^2$ 2) $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} - yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2$ 3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - z\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2$ 4) $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2$

پاسخ: گزینه 2

$$u = x^2 - z^2\ ,\ v = xy\ ,\ \phi(u,v) = 0$$

از معادله فوق نسبت به x , y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} (2x - 2zz_x)\dfrac{\partial\phi}{\partial u} + y\dfrac{\partial\phi}{\partial v} = 0 \\ -2zz_y\dfrac{\partial\phi}{\partial u} + x\dfrac{\partial\phi}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

دستگاه همگن فوق وقتی دارای جواب غیرصفر می‌باشد که دترمینان ضرایب برابر صفر باشد

$$\begin{vmatrix} 2x - 2zz_x & y \\ -2zz_y & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} 2x^2 - 2xzz_x + 2yzz_y = 0 \\ xz\dfrac{\partial z}{\partial x} - yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \end{array}$$

[illegible]

عبارتست از

1) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$

2) $x(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=2z$

3) $x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z(x-y)$

4) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\mathbf{0}$

پاسخ: گزینه 3

$$u=x+y+z\ ,xyz=\phi(u)\Rightarrow z=\frac{1}{xy}\phi(u)$$

از معادله‌ی فوق نسبت به **x , y** مشتق می‌گیریم:

$$z_x=-\frac{1}{x^2y}\phi+\frac{1}{xy}(1+z_x)\phi'\Rightarrow z_x+\frac{z}{x}=(1+z_x)\frac{\phi'}{xy}$$

$$z_y=-\frac{1}{xy^2}\phi+\frac{1}{xy}(1+z_y)\phi'\Rightarrow z_y+\frac{z}{y}=(1+z_y)\frac{\phi'}{xy}$$

دو رابطه‌ی فوق را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{z_x+\frac{z}{x}}{z_y+\frac{z}{y}}=\frac{1+z_x}{1+z_y}$$

$$z_x+z_xz_y+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}z_y=z_y+z_xz_y+\frac{z}{y}+\frac{z}{y}z_x$$

$$z_x-\frac{z}{y}z_x+\frac{z}{x}z_y-z_y=\frac{z}{y}-\frac{z}{x}=\frac{z}{xy}(x-y)$$

$$x(y-z)z_x+y(z-x)z_y=z(x-y)$$

5-2) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول

اگر z تابعی از دو متغیر مستقل **x , y** باشد آنگاه $f(z_x,z_y,z,x,y)=\mathbf{0}$، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول را معرفی می‌کند. یک روش عمومی برای حل تمام معادلات مرتبه اول وجود ندارد.

در این بخش روش‌های متفاوتی را برای حل معادله مرتبه اول مطرح می‌کنیم.

1) اگر معادله مرتبه اول فاقد $\frac{\partial z}{\partial x}$ باشد آنگاه با ثابت فرض کردن **x**، می‌توان معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مشابه معادله دیفرانسیل معمولی حل کرد و اگر معادله فاقد $\frac{\partial z}{\partial y}$ باشد آنگاه **y** را ثابت فرض می‌کنیم.

برای حل معادله دیفرانسیل $f_1(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+f_2(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=R(z,x,y)$ ابتدا دستگاه معادلات لاگرانژ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)}=\frac{dy}{f_2(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

از حل دستگاه فوق دو جواب $u(x,y,z)=c_1$, $v(x,y,z)=c_2$ را به دست می‌آوریم در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل شبه خطی به صورت زیر می‌باشد.

$u=\phi(v)$ یا $v=\phi(u)$ یا $\phi(u,v)=0$

3) معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

الف) برای حل معادله مرتبه اول خطی به صورت $f_1(x,y)z_x+f_2(x,y)z_y+f_3(x,y)z=R(x,y)$ می‌توانیم از روش لاگرانژ با دستگاه معادلات $\dfrac{dx}{f_1}=\dfrac{dy}{f_2}=\dfrac{dz}{R-f_3z}$، استفاده کنیم.

ب) جواب عمومی معادله خطی با مجموع جواب همگن و جواب خصوصی برابر است

$$z=z_h+z_p$$

z_h (جواب همگن) جواب معادله دیفرانسیل همگن $f_1z_x+f_2z_y+f_3z=0$ می‌باشد که یک روش محاسبه‌ی آن، دستگاه لاگرانژ است.

z_p جواب خصوصی معادله است. روش ضرایب نامعین (مشابه معادلات دیفرانسیل معمولی) یکی از روش‌های معمول برای تعیین z_p می‌باشد. در این روش فرم کلی z_p براساس $R(x,y)$ مشخص می‌شود.

ج) معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت به صورت $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ می‌باشد. با استفاده از روش لاگرانژ جواب این معادله به صورت زیر است.

$$z=e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)\ ,\ a\neq 0$$

$$z=e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx)\ ,\ b\neq 0$$

با فرض اپراتورهای $D'=\dfrac{\partial}{\partial y}$, $D=\dfrac{\partial}{\partial x}$، معادله‌ی $az_x+bz_y+cz=R(x,y)$ به فرم $(aD+bD'+c)z=R$ قابل نمایش می‌باشد. برای تعیین جواب خصوصی معادله از روش اپراتورهای معکوس نیز می‌توانیم استفاده نمائیم.

مثال ۳: جواب معادله دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ که در آن z تابعی از x و y می‌باشد، با استفاده از دستگاه لاگرانژ $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$ کدام است؟

1) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $v=yz\ ,\ u=xz$

2) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $v=yz\ ,\ u=\frac{x}{z}$

3) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $v=xz\ ,\ u=\frac{x}{z}$

4) هر رابطه اختیاری بین دو تابع $v=xy\ ,\ u=\frac{z}{x}$

پاسخ: گزینه 4

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow \mathrm{Ln}x=-\mathrm{Ln}y+\mathrm{Ln}c_1\Rightarrow v=xy=c_1$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}x+\mathrm{Ln}c_2\Rightarrow u=\frac{z}{x}=c_2$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر می‌باشد

$$\phi(u,v)=\mathbf{0}\ ,\ \phi\left(\frac{z}{x},xy\right)=\mathbf{0}$$

ϕ تابعی دلخواه می‌باشد.

مثال ۴: حل عمومی معادله $\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x$ برابر است با:

1) $u=e^{y-2x}+\frac{1}{2}(x^2+1)$ 2) $u=f(y-2x)+\frac{x^2}{2}$ 3) $u=\sin(y-2x)+\frac{x^2}{2}+1$ 4) $u=\sin(y-2x)+\frac{x^2}{2}$

پاسخ: گزینه 2

معادله دیفرانسیل $u_x+2u_y=x$، یک معادله خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است.

$$u=u_h+u_p$$

$$az_x+bz_y+cz=\mathbf{0}\Rightarrow z=e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)$$

$$u_x+2u_y=\mathbf{0}\Rightarrow a=1,b=2,c=\mathbf{0}\Rightarrow u_h=f(y-2x)$$

براساس $R(x,y)=x$ جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$u_p=ax^2+bx+c\Rightarrow \frac{\partial u_p}{\partial x}=2ax+b\ ,\frac{\partial u_p}{\partial y}=\mathbf{0}$$

$2ax+b=x \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=0 \Rightarrow u_p=\frac{1}{2}x^2+c$

بنابراین جواب عمومی به صورت $u=f(y-2x)+\frac{1}{2}x^2+c$ می‌باشد که **C** هر مقدار دلخواهی است

مثال ۵: جواب عمومی معادله‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=x+3y$ را تعیین کنید.

پاسخ:

معادله‌ی فوق، معادله‌ی خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است.

$z_x-2z_y=0 \Rightarrow a=1, b=-2, c=0 \Rightarrow z_h=\phi(y+2x)$

$z_p=Ax^2+By^2 \Rightarrow \frac{\partial z_P}{\partial x}-2\frac{\partial z_P}{\partial y}=x+3y$

$2Ax-4By=x+3y \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{3}{4} \Rightarrow z_p=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}y^2$

جواب عمومی: $z=\phi(y+2x)+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}y^2$

مثال ۶: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x-y)z_x+(z-x)z_y=y-z$ را تعیین کنید.

پاسخ:

معادله فوق، شبه خطی است و از دستگاه لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{y-z}$$

$$(x-y)+(z-x)+(y-z)=0 \Rightarrow dx+dy+dz=0 \Rightarrow u=x+y+z=c_1$$

$$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{y-z} \Rightarrow \frac{zdx}{zx-yz}=\frac{ydy}{yz-yx}=\frac{xdz}{xy-xz}$$

$$(zx-yz)+(yz-yx)+(xy-xz)=0 \Rightarrow zdx+ydy+xdz=0$$

$$zdx+xdz+ydy=0 \Rightarrow d(xz+\frac{1}{2}y^2)=0 \Rightarrow v=y^2+2xz=c_2$$

جواب عمومی:

$\phi(u,v)=0$ یا $\phi(x+y+z, y^2+2xz)=0$

مثال ۷: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial y}+z=y$ را تعیین کنید.

پاسخ:

چون معادله فاقد $\frac{\partial z}{\partial x}$ است بنابراین می‌توانیم **x** را ثابت فرض کرده و معادله را مشابه معادله دیفرانسیل معمولی خطی حل کنیم البته ثابت‌ها را به صورت تابعی از x در نظر می‌گیریم.

$$x\frac{\partial z}{\partial y}+z=y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}, F(y)=e^{\int \frac{1}{x}dy}=e^{\frac{y}{x}}$$

$$z=e^{-\frac{y}{x}}\left[\int \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}dy+f(x)\right]$$

انتگرال فوق را با روش جز به جز محاسبه می‌کنیم

$$z=e^{-\frac{y}{x}}\left[ye^{\frac{y}{x}}-xe^{\frac{y}{x}}+f(x)\right]$$

$$z=y-x+f(x)e^{-\frac{y}{x}}$$

3-5) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم

در این بخش ابتدا معادلات مرتبه دوم شبه خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شبه خطی به صورت زیر می‌باشد

$$A(x,y)z_{xx}+B(x,y)z_{xy}+c(x,y)z_{yy}=R(z_x,z_y,z,x,y)$$

براساس مقدار $\Delta=B^2-4AC$، معادله فوق یکی از حالات زیر را خواهد داشت:

1) در نقاطی از صفحه **xy** که $\Delta>0$ می‌باشد، معادله را هذلولی‌گون یا هذلولوی می‌نامیم. معادله دیفرانسیل $z_{xy}=R(z_x,z_y,z,x,y)$ را فرم استاندارد یا نرمال (کانونیک)معادله هذلولوی می‌نامیم.

2) در نقاطی از صفحه **xy** که $\Delta<0$ می‌باشد، معادله را بیضی‌گون (بیضوی) می‌گوئیم. معادله دیفرانسیل $z_{xx}+z_{yy}=R(z_x,z_y,z,x,y)$ را فرم نرمال معادله بیضوی می‌نامیم.

3) در نقاطی از صفحه **xy** که $\Delta=0$ می‌باشد، معادله را سهمی‌گون (سهموی) می‌گوئیم. معادله دیفرانسیل $z_{yy}=R(z_x,z_y,z,x,y)$ یا $z_{xx}=R(z_x,z_y,z,x,y)$ را فرم معادله سهموی می‌نامیم. معمولاً برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم شبه خطی، ابتدا آنها را به فرم نرمال (استاندارد) تبدیل می‌کنیم.

تبدیل معادلات دیفرانسیل شبه خطی به فرم نرمال:

برای معادله دیفرانسیل $Az_{xx}+Bz_{xy}+Cz_{yy}=R$ ، معادله مشخصه $Ar^2-Br+C=0$ را در نظر می‌گیریم

الف) اگر معادله دیفرانسیل هذلولوی $(\Delta>0)$ باشد آنگاه معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی متفاوت است

$$r_1=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A}\ ,\ r_2=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{2A}$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=r_1\Rightarrow u(x,y)=c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=r_2\Rightarrow v(x,y)=c_2$$

با تغییر متغیرهای $u=u(x,y)\ ,\ v=v(x,y)$ ، معادله دیفرانسیل به فرم نرمال $z_{uv}=G(z_u,z_v,z,u,v)$ تبدیل می‌گردد.

اگر از تغییر متغیرهای $s=u(x,y)+v(x,y), t=u(x,y)-v(x,y)$ استفاده کنیم، معادله دیفرانسیل به فرم نرمال $z_{ss}-z_{tt}=G(z_s,z_t,z,s,t)$ تبدیل می‌گردد.

ب) اگر معادله دیفرانسیل سهموی $(\Delta=0)$ باشد آنگاه معادله مشخصه دارای یک ریشه حقیقی است

$$r=\frac{B}{2A}$$

$$\frac{dy}{dx}=r\Rightarrow u(x,y)=c_1$$

تابع دلخواه $v(x,y)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $u_xv_y-u_yv_x\neq 0$ باشد.

با تغییر متغیرهای $u=u(x,y)\ ,\ v=v(x,y)$ معادله دیفرانسیل به فرم نرمال تبدیل می‌گردد.

اگر از تغییر متغیرهای $u=u(x,y), v=y$ استفاده کنیم، معادله دیفرانسیل به فرم نرمال $z_{vv}=G(z_u,z_v,z,u,v)$ تبدیل می‌شود و اگر از تغییر متغیرهای $u=u(x,y)$ و $v=k$ ($\mathbf{k}$ ثابت) استفاده کنیم، معادله دیفرانسیلی به فرم نرمال $z_{uu}=G(z_u,z_v,z,u,v)$ تبدیل می‌گردد.

ج) اگر معادله دیفرانسیل بیضوی $(\Delta<0)$ باشد آنگاه معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط مزدوج خواهد بود.

$$r_1=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A}\ \ ,\ r_2=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$\frac{dy}{dx}=r_1\Rightarrow u(x,y)+iv(x,y)=c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=r_2\Rightarrow u(x,y)-iv(x,y)=c_2$$

می‌گردد.

نکته 3: اگر از تغییر متغیرهای $v=v(x,y)\ ,\ u=u(x,y)$ در معادله دیفرانسیل خطی $Az_{xx}+Bz_{xy}+Cz_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz=R$ استفاده کنیم به معادله دیفرانسیل خطی $A_1z_{uu}+B_1z_{uv}+C_1z_{vv}+D_1z_u+E_1z_v+Fz=R$ تبدیل می‌گردد بنابراین توابع R,F ثابت می‌مانند.

مثال ۸: معادله زیر مفروض است

$$(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x+y$$

1) این معادله از نوع بیضوی و بعضی جاها هذلولی است

2) این معادله در برخی نواحی سهموی و در برخی نواحی هذلولی است

3) این معادله در برخی نواحی بیضوی و در برخی نواحی سهموی است

4) این معادله در برخی نواحی بیضوی و در برخی نواحی هذلولی و در برخی نقاط سهموی است.

پاسخ: گزینه 4

$A=y+1, B=2x, C=1$

$\Delta=B^2-4AC=4x^2-4(y+1)=4(x^2-y-1)$

$\Delta>0\Rightarrow x^2-y-1>0$: معادله هذلولی‌گون

$\Delta<0\Rightarrow x^2-y-1<0$: معادله بیضی‌گون

$\Delta=0\Rightarrow x^2-y-1=0$: معادله سهمی‌گون

مثال ۹: با توجه به تغییر متغیر $z=xy, v=x$ معادله $xu_{xy}=yu_{yy}+u_y$ را حل کنید

1) $u(x,y)=\phi(y)+\psi(x^2y^2)$
2) $u(x,y)=\phi(y^2)+\psi(xy)$

3) $u(x,y)=\phi(y)+\psi(xy)$
4) $u(x,y)=\psi(xy)+\phi(x)$

پاسخ: گزینه 4

با توجه به توابع $z=xy, v=x$ تنها گزینه‌ای که شامل این دو تابع می‌باشد، گزینه (4) است.

برای بررسی مراحل تغییر متغیر، محاسبات را به طور کامل انجام می‌دهیم.

$v_x=1, v_y=0, z_x=y\ ,\ z_y=x$

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + y u_z$$

$$u_y = u_v v_y + u_z z_y = x u_z$$

$$u_{xy} = u_{vv} v_y + u_{vz} z_y + u_z + y(u_{zv} v_y + u_{zz} z_y)$$

$$u_{xy} = x u_{vz} + u_z + xy u_{zz} \Rightarrow x u_{xy} = x^2 u_{vz} + x u_z + x^2 y u_{zz}$$

$$u_{yy} = x(u_{zv} v_y + u_{zz} z_y) = x^2 u_{zz} \Rightarrow y u_{yy} = y x^2 u_{zz}$$

$$x u_{xy} = y u_{yy} + u_y \Rightarrow x^2 u_{vz} = 0 \Rightarrow u_{vz} = 0$$

از معادله فوق نسبت به **v,z** انتگرال می‌گیریم:

$$u_{vz} = 0 \Rightarrow u_v = \phi_1(v) \Rightarrow u = \int \phi_1(v) dv + \psi(z)$$

$$u = \phi(v) + \psi(z) \Rightarrow u(x,y) = \phi(x) + \psi(xy)$$

مثال ۱۰: تغییر متغیرهایی که معادله‌ی $6y^3 z_{xx} - y^2 z_{xy} - y z_{yy} + z_y = 0$ را به فرم نرمال (استاندارد) تبدیل می‌کند را تعیین کنید.

پاسخ:

$$A = 6y^3 \,, B = -y^2 \,, C = -y$$

معادله مشخصه $6y^3 r^2 + y^2 r - y = 0$

$$\Delta = 25y^4 \Rightarrow r_1 = \frac{-y^2 + 5y^2}{12y^3} = \frac{1}{3y} , r_2 = \frac{-y^2 - 5y^2}{12y^3} = -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y} \Rightarrow 3y dy - dx = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} y^2 - x = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y} \Rightarrow 2y dy + dx = 0 \Rightarrow y^2 + x = c_2$$

با تغییر متغیرهای $v = y^2 + x \,, u = \frac{3}{2} y^2 - x$ می‌توان معادله دیفرانسیل را به فرم نرمال تبدیل نمود.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی با ضرایب ثابت:

با فرض $D = \frac{\partial}{\partial x} \,, D' = \frac{\partial}{\partial y}$، معادله‌ی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت به صورت زیر قابل بیان است.

$$(AD^2 + BDD' + CD'^2 + ED + FD' + G) Z = R(x,y)$$

$$AZ_{xx} + BZ_{xy} + CZ_{yy} + Ez_x + FZ_y + GZ = R(x,y)$$

جواب عمومی: $Z = Z_h + Z_P$

معادله‌ی مشخصه $AD^2+BDD'+CD'^2+ED+FD'+G=0$ را تجزیه می‌کنیم

حالت 1: اگر معادله مشخصه به صورت ضرب دو عامل مرتبه اول متفاوت، تجزیه گردد با حل دو معادله‌ی خطی همگن مرتبه اول می‌توان دو جواب مستقل را برای معادله دیفرانسیل به دست آورد که مجموع این دو جواب، جواب همگن (Z_h) را مشخص می‌کند.

حالت 2: اگر معادله مشخصه به صورت $(aD+bD'+C)^2=0$ باشد در اینصورت با فرض $a\neq 0$ جواب همگن به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$Z_h=e^{-\frac{c}{a}x}f(ay-bx)+xe^{-\frac{c}{a}x}g(ay-bx)$$

و با فرض $b\neq 0$ جواب همگن به فرم زیر خواهد بود.

$$Z_h=e^{-\frac{c}{b}y}f(ay-bx)+ye^{-\frac{c}{b}y}g(ay-bx)$$

g , f توابع دلخواه هستند.

برای تعیین z_P معمولاً از روش اپراتورهای معکوس و یا ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۱: جواب $u(x,y)$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

1) $g(x-y)+h(x+\frac{1}{2}y)$ 2) $g(x+y)+h(x+\frac{1}{2}y)$ 3) $g(x+y)+h(x-\frac{1}{2}y)$ 4) $g(x-y)+h(x-\frac{1}{2}y)$

پاسخ: گزینه 1

معادله مشخصه: $D^2-DD'-2D'^2=0$

$$(D-2D')(D+D')=0$$

$$(D+D')u=0\Rightarrow u=g_1(y-x)=g(x-y)$$

$$(D-2D')u=0\Rightarrow u=h_1(y+2x)=h(x+\frac{1}{2}y)$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x,y)=g(x-y)+h(x+\frac{1}{2}y)$$

مثال [illegible]: جواب عمومی معادله دیفرانسیل [illegible] را تعیین کنید.

پاسخ:

جواب عمومی: $z = z_h + z_p$

معادله مشخصه $D^2 - DD' - 2D'^2 = 0$

$$(D + D')(D - 2D') = 0$$

$$(D + D')z = 0 \Rightarrow z = f_1(y - x)$$
$$(D - 2D')z = 0 \Rightarrow z = f_2(y + 2x)$$
$$z_h = f_1(y - x) + f_2(y + 2x)$$

$$z_P = \frac{1}{D^2 - DD' - 2D'^2} e^{-x+2y} = -\frac{1}{5} e^{-x+2y}$$

در محاسبه‌ی z_P از خاصیت زیر در مورد اپراتورهای D', D استفاده کرده‌ایم:

$$\frac{1}{h(D, D')} e^{mx+ny} = \frac{1}{h(m, n)} e^{mx+ny}$$

$$z = z_h + z_P = f_1(y - x) + f_2(y + 2x) - \frac{1}{5} e^{-x+2y}$$

حالات ویژه در مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی:

1) اگر معادله دیفرانسیل خطی از بین تمام مشتقات جزئی تابع، فقط شامل یک مشتق مرتبه دوم باشد در اینصورت با دو بار انتگرال‌گیری می‌توانیم پاسخ عمومی را تعیین کنیم.

$$z_{xx} = R(x, y)\ ,\ z_{yy} = R(x, y)\ , z_{xy} = R(x, y)$$

2) اگر در تمام مشتقات جزئی موجود در معادله دیفرانسیل، مشتق نسبت به **x** وجود داشته باشد از تغییر متغیر $u = z_x$ استفاده می‌کنیم که معادله به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌شود و اگر در تمام مشتقات جزئی معادله، مشتق نسبت به **y** موجود باشد از $u = z_y$ استفاده می‌کنیم.

در معادله‌ی $Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_x = R$ با فرض $u = z_x$ به معادله مرتبه اول $Au_x + Bu_y + Cu = R$ می‌رسیم.

معادله‌ی $Az_{yy} + Bz_{xy} + Cz_y = R$ با فرض $u = z_y$ به معادله مرتبه اول $Au_y + Bu_x + Cu = R$ تبدیل می‌شود.

معادله‌ی $Az_{xy} + Bz_x = R$ با فرض $u = z_x$ به معادله مرتبه اول معمولی $Au_y + Bu = R$ تبدیل می‌شود.

معادله‌ی $Az_{xy} + Bz_y = R$ با فرض $u = z_y$ به معادله مرتبه اول معمولی $Au_x + Bu = R$ تبدیل می‌گردد.

3) اگر در معادله دیفرانسیل فقط نسبت به یک متغیر مستقل مشتق موجود باشد در اینصورت می‌توانیم متغیر مستقل

در معادله $Az_{yy}+Bz_y+CZ=R$ ، با ثابت فرض کردن **x** می‌توانیم معادله را مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی حل کنیم.

مثال ۱۳: جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=1$ با شرایط مرزی و اولیه زیر عبارت است از:

$u_x(x,0)=P\ ,\ u_y(0,y)=q\ ,u(0,0)=p+q$

1) $u(x,y)=xy+p+q$

2) $u(x,y)=xy+px+qy+p+q$

3) $u(x,y)=xy+(p+q)x+(p+q)y+p+q$

4) $u(x,y)=(p+q)xy+p+q$

پاسخ: گزینه 2

از معادله دیفرانسیل نسبت به **x , y** انتگرال می‌گیریم:

$u_{xy}=1 \Rightarrow u_x(x,y)=y+f(x)$

$u_x(x,0)=p \Rightarrow f(x)=p$

$u_x(x,y)=y+p \Rightarrow u(x,y)=xy+px+g(y)$

$u_y(x,y)=x+g'(y)\ ,u_y(0,y)=q \Rightarrow g'(y)=q \Rightarrow g(y)=qy+c$

$u(x,y)=xy+px+qy+c, u(0,0)=p+q \Rightarrow c=p+q$

$u(x,y)=xy+px+qy+p+q$

مثال ۱۴: یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x, (PDE)$ عبارتست از

1) $u(x,y)=f(y)e^{2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

2) $u(x,y)=f(x)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

3) $u(x,y)=f(y)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

4) $u(x,y)=f(x)e^{2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$

تمام مشتقات معادله، شامل مشتق نسبت به **y** می‌باشند بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}=x$$

$$z=\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow z_x+2z=x\Rightarrow z=z_h+z_p$$

$$(D+2)z=0\Rightarrow a=1,b=0,c=2\Rightarrow z_h=e^{-2x}f_1(y)$$

$$z_p=Ax+B\Rightarrow A+2Ax+2B=x\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{4}$$

$$z_p=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$z=e^{-2x}f_1(y)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow u(x,y)=e^{-2x}f(y)+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$$

4-5) روش تفکیک متغیرها

برخی از معادلات دیفرانسیل خطی همگن با روش تفکیک (جداسازی) متغیرها قابل حل می‌باشند.

در روش جداسازی متغیرها، جواب معادله را به صورت حاصلضرب دو تابع مانند $z=F(x)G(y)$ در نظر می‌گیریم که **F** فقط تابعی از **x , G** فقط تابعی از **y** می‌باشد. با جایگذاری $z=F(x)G(y)$ در معادله دیفرانسیل جزئی، دو معادله دیفرانسیل مستقل یکی با متغیر **x** و دیگری با متغیر **y** حاصل می‌شود. حاصلضرب جواب این دو معادله دیفرانسیل، جواب عمومی معادله دیفرانسیل اولیه را مشخص می‌کند.

مثال ۱۵: جواب معادله $u_x+u_y=2(x+y)u$ **برابر است با:**

1) $u=ke^{x^2+y^2+c(x-y)}$ 2) $u=ke^{x^2-y^2+c(x+y)}$ 3) $u=ke^{x^2+y^2+c(x+y)}$ 4) $u=ke^{x^2-y^2-c(x+y)}$

پاسخ: گزینه 1

براساس گزینه‌ها روش جداسازی متغیرها را انتخاب می‌کنیم.

$$u=F(x)G(y)\Rightarrow u_x=F'(x)G(y),u_y=F(x)G'(y)$$

$$F'(x)G(y)+F(x)G'(y)=2(x+y)F(x)G'(y)$$

طرفین تساوی فوق را بر $F(x)G(y)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}+\frac{G'(y)}{G(y)}=2x+2y\Rightarrow\frac{F'(x)}{F(x)}-2x=2y-\frac{G'(y)}{G(y)}$$

است که هر دو مقدار ثابتی باشند.

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - 2x = C \Rightarrow \frac{F'}{F} = 2x + C \Rightarrow F(x) = K_1 e^{x^2 + cx}$$

$$2y - \frac{G'(y)}{G(y)} = C \Rightarrow \frac{G'}{G} = 2y - C \Rightarrow G(y) = K_2 e^{y^2 - cy}$$

$$u = F(x)G(y) = Ke^{x^2 + y^2 + C(x-y)}$$

مثال ۱۶: جواب معادله دیفرانسیل $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 u = 0$ عبارتست از:

1) $u = ce^{-(\frac{1}{kx} + ky^3)}$ 2) $u = ce^{-k(x+y^3)}$ 3) $u = ce^{(\frac{1}{kx} - ky^3)}$ 4) $u = ce^{-(\frac{1}{ky} + kx^3)}$

پاسخ: گزینه 1

براساس گزینه‌ها روش جداسازی متغیرها را انتخاب می‌کنیم.

$$u = F(x)G(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F'(x)G'(y)$$

$$x^2 F'(x)G'(y) + 3y^2 F(x)G(y) = 0 \Rightarrow x^2 \frac{F'G'}{FG} + 3y^2 = 0$$

$$-\frac{1}{3y^2}\frac{G'(y)}{G(y)} = \frac{1}{x^2}\frac{F(x)}{F'(x)} = K$$

$$-\frac{1}{3y^2}\frac{G'(y)}{G(y)} = K \Rightarrow \frac{G'}{G} = -K(3y^2) \Rightarrow G(y) = c_1 e^{-ky^3}$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{F(x)}{F'(x)} = K \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{1}{kx^2} \Rightarrow F(x) = c_2 e^{-\frac{1}{kx}}$$

$$u(x,y) = F(x)G(y) = Ce^{-(ky^3 + \frac{1}{kx})}$$

۱ـ اگر در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول $\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz \\ x>0\ ,\ y>0 \end{cases}$ تغییر متغیرهای مستقل $\begin{cases} P=\dfrac{1}{2}(\ln x+\ln y) \\ q=\dfrac{1}{2}(\ln x-\ln y) \end{cases}$ را بکار ببریم، آنگاه:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial p}=nz$
2) $\dfrac{\partial z}{\partial q}=nz$
3) $\dfrac{\partial z}{\partial p}+\dfrac{\partial z}{\partial q}=nz$
4) $\dfrac{\partial z}{\partial p}-\dfrac{\partial z}{\partial q}=nz$

۲ـ کدام عبارت درباره معادله $yu_{xx}+u_{yy}=0$ صحیح است؟

1) برای $y>0$ بیضی‌گون است
2) برای $y<0$ سهمی‌گون است.
3) برای $y>0$ هذلولی‌گون است
4) بر روی محور x ها هذلولی‌گون است

۳ـ اگر $u(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}f(t)$ که در آن $t=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$ یکی از جواب‌های معادله با مشتقات جزئی $u_y-u_{xx}=0$ باشد و C عدد ثابت، کدام رابطه زیر درست است؟

1) $f'(t)+tf(t)=C$
2) $2f'(t)+tf(t)=C$
3) $f'(t)+2tf(t)=C$
4) $tf'(t)+f(t)=C$

۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $(D_x^2+3D_xD_y+2D_y^2)z=0$ کدام است؟

1) $z=f(y-2x)+g(y+2x)$
2) $z=f(y-x)+g(y-2x)$
3) $z=f(y+x)+g(y-2x)$
4) $z=f(y+x)+g(y+2x)$

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل پاره‌ای $az_x+bz_y+cz=0$ کدام است؟

1) $z=e^{-\frac{ax}{c}}\phi(ay-bx)$
2) $z=e^{-\frac{cx}{a}}\phi(ay-bx)$
3) $z=e^{-\frac{cx}{a}}\phi(ax-by)$
4) $z=e^{-\frac{ax}{c}}\phi(ax-by)$

۶ـ $u(x,y)$ جواب معادله $u_x+2u_y-u=0$ عبارت است از:

1) $u(x,y)=e^{x}\phi(y-2x)$
2) $u(x,y)=e^{-x}\phi(y-2x)$
3) $u(x,y)=e^{x}\phi(2y-x)$
4) $u(x,y)=e^{-x}\phi(2y-x)$

۷ـ جواب [illegible] زیر با [illegible]

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = x^2 y \, , u(x,0) = x^2 \, , u(1,y) = \cos y$$

1) $\frac{x^2 y^3}{6} + \cos y - \frac{y^3}{6} + x^2 - 1$

2) $\frac{x^3 y^2}{6} + 2\cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 2$

3) $\frac{x^3 y^2}{6} + x\cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - x$

4) $\frac{x^3 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1$

۸ـ کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ صحیح است؟

1) در ناحیه $xy < 0$ این معادله از نوع سهمی‌گون است.

2) در ناحیه $xy < 0$ این معادله از نوع بیضی‌گون است.

3) در ناحیه $xy > 0$ این معادله از نوع بیضی‌گون است.

4) در ناحیه $xy > 0$ این معادله هم از نوع سهمی‌گون و هم از نوع هذلولی‌گون است.

۹ـ با کدام تبدیلات معادله $x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ کانونی می‌شود؟

1) $\xi = \frac{y}{x^2}, \eta = y$

2) $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y^2$

3) $\xi = \frac{y}{x^2}, \eta = y^2$

4) $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$

۱۰ـ پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ عبارت است از:

1) $z = f(y-x) + g(y+4x)$

2) $z = f(y-x) + g(y-4x)$

3) $z = f(x-y) + g(x+4y)$

4) $z = f(x-y) + g(x-4y)$

۱۱ـ جواب کلی معادله $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = z - x$ به کدام صورت است؟

1) $x^2 + 2yz = \phi(xyz)$

2) $y^2 + 2xz = \phi(xyz)$

3) $y^2 + 2xz = \phi(x+y+z)$

4) $x^2 + 2yz = \phi(x+y+z)$

[illegible]

تابعی همه جا پیوسته) عبارتند از:

1) $\begin{cases} y - x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 \\ y - x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 \\ y + x - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 \\ y - x - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y + x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 \\ y + x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 \end{cases}$

۱۳ـ جواب عمومی معادله $z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x$ به کدام صورت است؟

1) $x - z = y\phi(x^2 + z^2)$

2) $x + z = \phi(\frac{x^2 - z^2}{y})$

3) $x + z = y\phi(x^2 - z^2)$

4) $x - z = \phi(\frac{x^2 + z^2}{y})$

۱۴ـ منحنی انتگرال دستگاه معادلات $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$ به کدام صورت‌اند:

1) $y = \frac{x + c_1}{x^2} + c_2 , z = c_1 x$

2) $y = \frac{x^2 + c_1}{x} + c_2 , z = c_1 x$

3) $y = \frac{x^2 - c_1}{x} + c_2 , z = \frac{c_1}{x}$

4) $y = \frac{x - c_1}{x^2} + c_2 , z = \frac{c_1}{x}$

۱۵ـ تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است؟

1) $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

2) $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 1$

3) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}$

4) $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 1$

۱۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 2$ با شرایط مرزی و اولیه زیر کدام است؟

$u_x(x, 0) = \sin x , u_t(0, t) = 5 , u(0, 0) = 2$

1) $2xt + 5t + \cos x + 1$

2) $2xt + 5t - \cos x + 3$

3) $2xt + 5t - \sin x + 2$

4) $2xt + 5t + \sin x + 2$

۱۷ـ جواب معادله $u_{xy} = u_x$ کدام است؟

1) $u(x, y) = e^y f(x) + h(y)$

2) $u(x, y) = e^y (f(x) + g(y))$

3) $u(x, y) = e^y f(x) + e^x h(y)$

4) موارد 1 و 2 صحیح هستند.

۱۸ـ معادله $u_{tt} - u_{xx} = 0$ با تغییر متغیر $v = x + t , s = x - t$ به کدام یک از صورت‌های زیر تبدیل می‌شود؟

1) $u_{vv} = 0$

2) $u_{ss} = 0$

3) $u_{sv} = 0$

4) موارد 1 و 2 صحیح است.

(1 $(y^2+\sin x)e^{-y}+x^2$ (2 $(x^2+\sin y)e^{-x}+y^2$ (3 $(y^2+\sin x)e^{-x}+x^2$ (4 $(x^2+\sin x)e^{-y}+y^2$

۲۰ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ کدام یک از توابع زیر است؟

(1 $z=f(\frac{x}{y})$ (2 $z=f(xy)$ (3 $x=f(x-y)$ (4 $z=f(x^2-y^2)$

۲۱ـ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل $\frac{dx}{x(z^2-y^2)}=\frac{dy}{y(x^2-z^2)}=\frac{dz}{z(y^2-x^2)}$ کدام است؟

(1 $\begin{cases}xyz=c_1\\x^2+y^2+z^2=c_2\end{cases}$ (2 $\begin{cases}x+y+z=c_1\\x^2+y^2+z^2=c_2\end{cases}$ (3 $\begin{cases}xyz=c_1\\xy+yz+zx=c_2\end{cases}$ (4 $\begin{cases}xy+yz+zx=c_1\\x^2+y^2+z^2=c_2\end{cases}$

۲۲ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول $au_x+bu_y=0$ (a , b ثابت حقیقی) بر روی کدام منحنی ثابت می‌ماند؟

(1 $ax+by=c$، c ثابت حقیقی دلخواه
(2 $bx-ay=c$، c ثابت حقیقی دلخواه
(3 $ax-by=c$، c ثابت حقیقی دلخواه
(4 $bx+ay=c$، c ثابت حقیقی دلخواه

۲۳ـ جواب دستگاه معادلات $\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$ کدام است؟

(1 $\begin{cases}y=c_1x\\z=c_2y\end{cases}$ (2 $\begin{cases}z=c_1y\\z=c_2(x^2+y^2+z^2)\end{cases}$ (3 $\begin{cases}x^2+y^2=c_1z\\xy+yz+zx=c_2z\end{cases}$ (4 $\begin{cases}z=c_1(x+y)\\z=c_2(x^2+y^2+z^2)\end{cases}$

۲۴ـ پاسخ کامل معادله دیفرانسیل $\cot x\frac{\partial u}{\partial y}+u=y$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(1 $f(x)e^{-y\text{tg}x}+y-\cot x$ (2 $g(y)e^{-y\text{tg}x}+y-\cot x$ (3 $c_1e^{-y\text{tg}x}+y-\cot x$ (4 $f(x)e^{-y\text{tg}x}+g(y)-\cot x$

۲۵ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را در نظر می‌گیریم. این معادله در نیم‌صفحه‌ی بالای محور x $(y>0)$ از کدام نوع است ؟

(1 بیضی‌گون
(2 سهمی‌گون
(3 هذلولی‌گون
(4 در بخشی بیضی‌گون و در بخشی هذلولی‌گون

۲۶ــ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $x\frac{}{\partial x\partial y}+\frac{}{\partial y}=0$ کدام است؟ (ϕ و ψ توابع مشتق‌پذیر دلخواه)

1) $z=\frac{1}{x}\phi(y)+c$ 2) $z=\frac{1}{x}\phi(y)+\psi(x)$ 3) $z=\frac{1}{x}+\psi(x)$ 4) $z=x\phi(y)+\psi(x)$

۲۷ــ فرم کانونی معادله با مشتقات نسبی $u_{xx}+10u_{xy}+9u_{yy}-y=0$ به صورت زیر می‌باشد:

1) عبارتی خطی از مشتقات مرتبه اول = $u_{\alpha\beta}$

2) عبارتی خطی از مشتقات مرتبه اول = $u_{\alpha\alpha}$

3) عبارتی خطی از مشتقات مرتبه اول = $u_{\alpha\alpha}+u_{\alpha\beta}$

4) عبارتی خطی از مشتقات مرتبه اول = $u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}$

۲۸ــ در مورد معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر، کدام گزینه صحیح است؟

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

1) از نوع سهمی‌گون بوده و جواب عمومی آن به شکل $(y-4x)c_1+(y-2x)c_2$ است.

2) از نوع سهمی‌گون بوده و جواب عمومی آن به شکل $F(y-4x)+G(y-2x)$ است.

3) از نوع هذلولی‌گون بوده و جواب عمومی آن به شکل $(y-4x)c_1+(y-2x)c_2$ است.

4) از نوع هذلولی‌گون بوده و جواب عمومی آن به شکل $F(y-4x)+G(y-2x)$ است.

۲۹ــ با تغییر متغیر $z=x+y, v=y$ معادله $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$ به کدام شکل تبدیل می‌شود؟

1) $u_{vv}=0$ 2) $u_{vz}=0$ 3) $u_{zz}=0$ 4) $u_{zz}+u_{vv}=0$

۳۰ــ جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx}+u_{xy}-6u_{yy}=0$ کدام است؟ این معادله دیفرانسیل از کدام نوع است؟

1) $u(x,y)=\phi(y-3x)+\psi(y+2x)$ (ψ,ϕ توابع دلخواه)، از نوع هذلولی‌گون

2) $u(x,y)=\phi(y-3x)+\psi(y+2x)$ (ψ,ϕ توابع دلخواه)، از نوع بیضی‌گون

3) $u(x,y)=c_1(y-3x)+c_2(y+2x)$ (c_2,c_1 ثابت‌های دلخواه)، از نوع هذلولی‌گون

4) $u(x,y)=\phi(y+3x)+\psi(y-2x)$ (ψ,ϕ توابع دلخواه)، از نوع بیضی‌گون

[illegible]

توابعی دو بار مشتق‌پذیر هستند صادق است؟

1) $\frac{d^2G}{dt^2}+kG=0 \quad , \quad x^2\frac{d^2F}{dx^2}+KF=0$

2) $\frac{d^2G}{dt^2}-kG=0 \quad , \quad x^2\frac{d^2F}{dx^2}+KF=0$

3) $\frac{d^2G}{dt^2}-kG=0 \quad , \quad x^2\frac{d^2F}{dx^2}-KF=0$

4) $\frac{d^2G}{dt^2}+kG=0 \quad , \quad x^2\frac{d^2F}{dx^2}-KF=0$

۳۲ـ اگر $\frac{\partial}{\partial x}=D\,,\ \frac{\partial}{\partial y}=D'$ عملگرهای مشتقات جزئی نسبت به x , y باشند و $u(x,y)$ تابعی از x , y باشد در آن صورت فرم معادله‌ی $\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}$ کدام است؟

1) $(D-D')^4u=0$

2) $(D+D')^4u=0$

3) $(D+D')^2(D-D')^2u=0$

4) $(D^2+D'^2)(D^2-D'^2)u=0$

۳۳ـ معادله $(x+1)u_{xx}+2xu_{xy}+yu_{yy}=u$ روی منحنی $y=\frac{x^2}{1+x}\,,\ x\neq -1$ از نوع

1) بیضوی است

2) سهموی است

3) هذلولی است

4) به ازای $x+1>0$ هذلولی است و به ازای $x+1<0$ بیضوی است

۳۴ـ اگر با تغییر متغیر $z=\frac{y}{x}, v=y$ معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به صورت $u_{vv}=0$ تبدیل شده باشد در آن صورت جواب معادله بر حسب x , y کدام است؟

1) $u(x,y)=yf(\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$ که در آن **f , g** توابعی مشتق‌پذیرند.

2) $u(x,y)=xf(\frac{y}{x})+yg(\frac{y}{x})$ که در آن **f , g** توابعی مشتق‌پذیرند.

3) $u(x,y)=(x+y)f(\frac{y}{x})$ که در آن **f** تابعی مشتق‌پذیر است.

4) $u(x,y)=f(\frac{y}{x})+xg(\frac{y}{x})$ که در آن **f , g** توابعی مشتق‌پذیرند.

1) $u_{zv}=\frac{1}{4}e^{v}$ 2) $u_{zv}=-\frac{1}{4}e^{v}$ 3) $u_{vv}=\frac{1}{4}e^{v}$ 4) $u_{zz}=-\frac{1}{4}e^{v}$

۳۶ـ تابع $u(x,y)=y^2F(x)-3x+4y$ **جواب کدام معادله دیفرانسیل زیر است؟ (F تابعی دلخواه از x است)**

1) $yu_y-2u=6x-4y$ 2) $yu_y-2u=6x+4y$ 3) $yu_y+2u=6x+4y$ 4) $yu_y+2u=6x-4y$

۳۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $xu_x-u=yx^2$ **کدام است؟**

1) $u(x,y)=x+yx$ 2) $u(x,y)=yx^2+cx$

3) $u(x,y)=yx^2+x\phi(y)$ (ϕ تابع دلخواه) 4) $u(x,y)=yx^2+xy^2+cx$

۳۸ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی (f تابع مفروض و پیوسته) $u_{xx}+2u_{xy}+(\cos x)u_{yy}=f(x,y)$ **با کدام تغییر متغیرها به صورت کانونیک (استاندارد) خودش در می آید؟**

1) $\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}=y+x\pm2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ 2) $\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}=y-x\pm2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ 3) $\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}=y+x\pm2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ 4) $\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\}=y-x\pm2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

۳۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_x-u_y=u$ **کدام است؟**

1) $u=e^x$ 2) $u=2(x-y)$ 3) $u=ce^{\frac{x-y}{2}}$ 4) $u=e^{\frac{x-y}{2}}\phi(\frac{x+y}{2})$

۴۰ـ تابع $z=f(2x+y)+g(x-y)-xy$ **که در آن f, g توابع دوبار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته‌اند جواب عددی کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است؟**

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+1$ 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+1$ 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

۴۱ـ جواب عمومی معادله $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ **کدام است؟**

1) $z=f(\frac{x+y}{\sqrt{2}}-y)+g(\frac{x-y}{\sqrt{2}}+y)$ 2) $z=f(y-1+\frac{x}{\sqrt{2}})+g(y-1+\frac{x}{\sqrt{2}})$

3) $z=f(y+(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)x)+g(y-(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)x)$ 4) $z=f(y-1+\frac{x}{\sqrt{2}})+g(y-x-\frac{x}{\sqrt{2}})$

۴۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $x^2u_{xx} + 2xu_x - 2u = 0$ عبارت است از:

1) $u(x,y) = c_1(y)x^{-2} + c_2(y)x$

2) $u(x,y) = c_1(y)x^{-2} + c_2(y)$

3) $u(x,y) = c_1(y)x + c_2(y)$

4) $u(x,y) = c_1(y)x^2 + c_2(y)x^{-1}$

۴۳ـ معادله $xu_{xx} - yu_{xy} = xu_y + xu_x$ از چه نوعی است؟

1) سهموی

2) هذلولی

3) بیضوی

4) بیضوی اگر $x \geq 0$ و سهموی اگر $x < 0$

۴۴ـ در معادله $6u_{xx} - u_{xy} + u_x - y = 0$ کدام یک از تبدیل‌های زیر را اختیار کنیم تا معادله به فرم کانونی تبدیل شود؟

1) $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 6x + y \end{cases}$

2) $\begin{cases} \xi = y \\ \eta = 6y + x \end{cases}$

3) $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 12x + y \end{cases}$

4) $\begin{cases} \xi = y \\ \eta = 12y + x \end{cases}$

۴۵ـ معادله $u_{xx} - u_{yy} = 0$ با کدام تغییر متغیرهای زیر به معادله $u_{rs} = 0$ تبدیل می‌شود

1) $r = y - x, s = y$

2) $r = x + y, s = x$

3) $r = y - x^2, s = y + x^2$

4) $r = x + y, s = y - x$

۴۶ـ کدام یک از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل نمود؟

$$\text{I.} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 4x$$

$$\text{II.} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]$$

1) هر دو معادله قابل حل هستند

2) هیچ کدام از دو معادله قابل حل نیستند

3) معادله **I** قابل حل نیست ولی **II** قابل حل است

4) معادله **II** قابل حل نیست ولی **I** قابل حل است

۴۷ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$ عبارتست از:

1) $u(x,y) = F(y+2x) + G(2xy)$

2) $u(x,y) = F(2xy) + G(y-2x)$

3) $u(x,y) = F(y+2x) + G(y-2x)$

4) هیچ‌کدام

۴۸ـ با کدام تغییر متغیر معادله $xu_{xx} - yu_{xy} = 0$ به فرم کانونی (نرمال) تبدیل می‌شود؟

1) $v = x\ ,\ z = x - y$

2) $v = x\ ,\ z = x + y$

3) $v = y\ ,\ z = xy$

4) $v = xy\ ,\ z = \frac{x}{y}$

۲۶ـ با کدام یک از تبدیلات زیر معادله $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=\frac{y^2}{x}u_x+\frac{x^2}{y}u_y$ **بـه فـرم کـانونی در مـی‌آیـد؟**

1) $\xi=x^2+y^2,\eta=y$ 2) $\xi=-x^2+y^2,\eta=x$ 3) $\xi=x^2+y,\eta=y$ 4) $\xi=-x^2+2y,\eta=x$

۵۰ـــ کـــدام عبـــارت در مـــورد معادلـــه $(2xy-1)u_{xx}+(x+2y)u_{xy}+u_{yy}+x^2u_x+y^2u_y=1$ **درســـت اســـت؟**

1) به مقادیر y,x بستگی دارد   2) بیضی‌گون است

3) هذلولی‌گون است   4) سهمی‌گون است

۵۱ـ صورت کانونیک معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **کدام است؟**

1) $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{4t}\frac{\partial\phi}{\partial u}$ 2) $\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial u}=\frac{1}{4(t-u)}(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial\phi}{\partial u})$

3) $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{4(t-u)}\frac{\partial\phi}{\partial u}$ 4) $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}=0$

۵۲ـ جواب معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x-y$ **کدام است؟**

1) $z=\frac{1}{4}x(x-y)^2+\phi_1(x+y)+\phi_2(x-y)$ ، ϕ_1,ϕ_2 دلخواه

2) $z=\phi_1(x+y)+\phi_2(y-x)$ ، ϕ_1,ϕ_2 دلخواه

3) $z=\phi_1(x)+\phi_2(y)$ ، ϕ_1,ϕ_2 دلخواه

4) $z=\phi_1(x-y)$ ، ϕ_1,ϕ_2 دلخواه

1) گزینه 1

$$z_x = z_p p_x + z_q q_x = \frac{1}{2x} z_p + \frac{1}{2x} z_q$$

$$z_y = z_p p_y + z_q q_y = \frac{1}{2y} z_p - \frac{1}{2y} z_q$$

$$x z_x + y z_y = nz \Rightarrow z_p = nz$$

2) گزینه 1

$$A = y, B = 0, C = 1 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = -4y$$

$\Delta > 0 \Rightarrow y < 0$ (هذلولی گون)

$\Delta < 0 \Rightarrow y > 0$ (بیضی گون)

$\Delta = 0 \Rightarrow y = 0$ (سهمی گون)

3) گزینه 2

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = y^{-\frac{1}{2}} f(xy^{-\frac{1}{2}})$$

$$u_y = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} f(xy^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} y^{-2} x f'(xy^{-\frac{1}{2}})$$

$$u_x = y^{-1} f'(xy^{-\frac{1}{2}}), u_{xx} = y^{-\frac{3}{2}} f''(xy^{-\frac{1}{2}})$$

$$u_y - u_{xx} = 0 \Rightarrow y^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} f(xy^{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} x f'(xy^{-\frac{1}{2}}) - f''(xy^{-\frac{1}{2}})\right) = 0$$

$$t = xy^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(t) + \frac{1}{2} t f'(t) + \frac{1}{2} f(t) = 0$$

$$2f''(t) + t f'(t) + f(t) = 0 \Rightarrow 2f''(t) + (t f(t))' = 0$$
$$2f'(t) + t f(t) = c$$

4) گزینه 2

$$D_x^2 + 3D_x D_y + 2D_y^2 = (D_x + D_y)(D_x + 2D_y)$$

$$(D_x + D_y) z = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 0 \Rightarrow z = f(y - x)$$

$$(D_x + 2D_y) z = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 0 \Rightarrow z = g(y - 2x)$$

$$z = f(y - x) + g(y - 2x)$$

$$az_x + bz_y + cz = 0 \Rightarrow (aD + bD' + c)z = 0$$

$$z = e^{-\frac{cx}{a}} \phi(ay - bx), a \neq 0$$
$$z = e^{-\frac{cy}{b}} \phi(ay - bx), b \neq 0$$

6) گزینه 1

$$u_x + 2u_y - u = 0 \Rightarrow (D + 2D' - 1)u = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = -1$$

$$u = e^{-\frac{c}{a}x} \phi(ay - bx) \Rightarrow u(x,y) = e^x \phi(y - 2x)$$

7) گزینه 4

$$u_{yx} = x^2 y \Rightarrow u_y = \frac{x^3 y}{3} + f_1(y) \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + f(y) + g(x)$$

$$u(x,0) = x^2 \Rightarrow f(0) + g(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - f(0), g(1) = 1 - f(0)$$

$$u(1,y) = \cos y \Rightarrow \frac{y^2}{6} + f(y) + g(1) = \cos y \Rightarrow f(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - g(1)$$

$$u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + f(y) + g(x) = \frac{x^3 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} - g(1) + x^2 - f(0)$$

$$g(1) = 1 - f(0) \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1$$

8) گزینه 3

$$A = x, B = 0, C = y \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = -4xy$$

$\Delta > 0 \Rightarrow xy < 0$ (هذلولی گون)

$\Delta < 0 \Rightarrow xy > 0$ (بیضی گون)

$\Delta = 0 \Rightarrow xy = 0$ (سهمی گون)

9) گزینه 2 و 4 هر دو صحیح هستند.

$A = x^2, B = 2xy, C = y^2 \Rightarrow \Delta = 0$ (سهمی گون)

معادله مشخصه: $x^2 r^2 - 2xyr + y^2 = 0$

$$r_1 = r_2 = \frac{y}{x}$$

$$\frac{}{dx}=\frac{}{x}\Rightarrow\frac{}{y}=\frac{}{x}\Rightarrow\frac{}{x}=c_1$$

با تغییر متغیرهای ($\xi=\frac{y}{x}$) و (تابع دلخواه $=\eta$) می توان معادله دیفرانسیل را به فرم کانونی تبدیل نمود.

10) گزینه 1

$$(D^2-3DD'-4D'^2)z=0$$

$$D^2-3DD'-4D'^2=(D+D')(D-4D')$$

$$(D+D')z=0\Rightarrow a=b=1, c=0\Rightarrow z=f(y-x)$$
$$(D-4D')z=0\Rightarrow a=1, b=-4\ , c=0\Rightarrow z=g(y+4x)$$

$$z=f(y-x)+g(y+4x)$$

11) گزینه 4

از دستگاه معادلات لاگرانژ استفاده می کنیم:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{x-y}=\frac{dz}{z-x}$$

$$(y-z)+(x-y)+(z-x)=0\Rightarrow dx+dy+dz=0\Rightarrow d(x+y+c)=0$$
$$u=x+y+z=c_1$$

$$\frac{xdx}{x(y-z)}=\frac{zdy}{z(x-y)}=\frac{ydz}{y(z-x)}$$

$$x(y-z)+z(x-y)+y(z-x)=0\Rightarrow xdx+zdy+ydz=0$$

$$d(\frac{x^2}{2}+yz)=0\Rightarrow\frac{x^2}{2}+yz=c\Rightarrow v=x^2+2yz=c_2$$

$v=\phi(u)$ یا $x^2+2yz=\phi(x+y+z)$

12) گزینه 1

$$A=1, B=2, c=\cos x, \Delta=B^2-4AC=4-4\cos x=8\sin^2\frac{x}{2}$$

معادله مشخصه: $r^2-2r+\cos x=0$

$$r_1=\frac{2+2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2}=1+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\ ,\ r_2=1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=1+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow dy=(1+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})dx$$

$$y=x-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+c_1\Rightarrow y-x+2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow dy=(1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})dx$$

$$y=x+2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+c_2\Rightarrow y-x-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=c_2$$

13) گزینه 3

دستگاه معادلات لاگرانژ: $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x}$

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}\Rightarrow xdx=zdz\Rightarrow x^2-z^2=c_1$$

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\frac{dx+dz}{x+z}=\frac{dy}{y}\Rightarrow d(Ln(x+z))=d(Lny)$$

$$Ln(x+z)-Lny=Lnc_2\Rightarrow\frac{x+z}{y}=c_2$$

$\frac{x+z}{y}=\phi(x^2-z^2)$ یا $x+z=y\phi(x^2-z^2)$

14) گزینه 3

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{-z}\Rightarrow\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z}=0\Rightarrow Ln(xz)=Lnc_1\Rightarrow xz=c_1$$

$$z=\frac{c_1}{x}$$

نتیجه ی فوق را در دستگاه معادلات قرار می دهیم:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{x+\frac{c_1}{x}}\Rightarrow(1+\frac{c_1}{x^2})dx=dy$$

$$y=x-\frac{c_1}{x}+c_2=\frac{x^2-c_1}{x}+c_2$$

15) گزینه 1

$$w=f(u,,v,s),u=y-z,v=z-x,s=x-y$$

$$w_z=w_u u_z+w_v v_z+w_s s_z=-w_u+w_v$$

$$w_y=w_u u_y+w_v v_y+w_s s_y=w_u-w_s$$

$$w_x=w_u u_x+w_v v_x+w_s s_x=-w_v+w_s$$

$$w_z+w_y+w_x=0$$

16) گزینه 2

$u_{tx} = 2 \Rightarrow u_t(x,t) = 2x + f(t)$

$u_t(0,t) = 5 \Rightarrow f(t) = 5 \Rightarrow u_t(x,t) = 2x + 5$

$u_t(x,t) = 2xt + 5t + g(x) \Rightarrow u_x(x,t) = 2t + g'(x)$

$u_x(x,0) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x + c$

$u(x,t) = 2xt + 5t - \cos x + c, u(0,0) = 2 \Rightarrow c = 3$

$u(x,t) = 2xt + 5t - \cos x + 3$

17) گزینه 4

$u_{xy} = u_x , z = u_x \Rightarrow z_y = z \Rightarrow z_y - z = 0$

$(D' - 1)z = 0 \Rightarrow a = 0, b = 1, c = -1 \Rightarrow z = e^y f_1(-x) = e^y f_2(x)$

$u_x = e^y f_2(x) \Rightarrow u(x,y) = e^y f(x) + h(y)$

$u(x,y) = e^y (f(x) + h(y)e^{-y}) = e^y (f(x) + g(y))$

18) گزینه 3

هذلولی گون:

$u_{tt} - u_{xx} = 0 \Rightarrow A = 1, B = 0, C = -1 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4$

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x - t = c_1 \Rightarrow s = x - t$

$\frac{dx}{dt} = -1 \Rightarrow x + t = c_2 \Rightarrow v = x + t$

با تغییر متغیرهای فوق، معادله به فرم کانونی تبدیل می گردد. فرم کانونی معادله ی هذلولی گون به صورت $u_{sv} = 0$ مـی تواند باشد.

19) گزینه 4

$u_{xy} + u_x = 0, z = u_x \Rightarrow z_y + z = 0 \Rightarrow (D' + 1)z = 0$

$a = 0, b = 1, c = 1 \Rightarrow z = e^{-y} f_1(-x) = e^{-y} f_2(x)$

$u_x = e^{-y} f_2(x) \Rightarrow u(x,y) = e^{-y} f(x) + g(y)$

با فرض $f(x) = x^2 + \sin x , g(y) = y^2$ یک جواب معادله به صورت $(x^2 + \sin x)e^{-y} + y^2$ می باشد.

20ـ گزینه 4

$y\frac{}{\partial x}+x\frac{}{\partial y}=0$

دستگاه معادلات لاگرانژ به صورت زیر است:

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}, dz=0$

$dz=0 \Rightarrow z=c_1$

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x} \Rightarrow xdx=ydy \Rightarrow x^2-y^2=c_2$

جواب عمومی: $g(z,x^2-y^2)=0$ یا $z=f(x^2-y^2)$

21) گزینه 1

$$\frac{dx}{x(z^2-y^2)}=\frac{dy}{y(x^2-z^2)}=\frac{dz}{x(y^2-x^2)} \Rightarrow \frac{xdx}{x^2(z^2-y^2)}=\frac{ydy}{y^2(x^2-z^2)}=\frac{zdz}{z^2(y^2-x^2)}$$

$x^2(z^2-y^2)+y^2(x^2-z^2)+z^2(y^2-x^2)=0 \Rightarrow xdx+ydy+zdz=0$

$d(x^2+y^2+z^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=c_2$

اگر دستگاه معادلات را در xyz ضرب کنیم:

$\frac{yzdx}{z^2-y^2}=\frac{xzdy}{x^2-z^2}=\frac{xydz}{y^2-x^2}$

$(z^2-y^2)+(x^2-z^2)+(y^2-x^2)=0 \Rightarrow yzdx+xzdy+xydz=0$

$d(xyz)=0 \Rightarrow xyz=c_1$

22) گزینه 2

$au_x+bu_y=0 \Rightarrow (aD+bD')u=0$

$u=e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx), c=0 \Rightarrow u(x,y)=\phi(ay-bx)$

اگر $bx-ay$ ثابت باشد آنگاه $\phi(ay-bx)$ نیز ثابت خواهد بود.

23) گزینه 2

$\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$

$\ln z-\ln y=\ln c_1 \Rightarrow z=c_1y$

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{xdx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{2z}$$

$$\frac{}{x^2-y^2-z^2}=\frac{}{2y^2}=\frac{}{2z^2}=\frac{}{z^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{2z}\Rightarrow Ln(z)-Ln(x^2+y^2+z^2)=Lnc_2$$

$$z=c_2(x^2+y^2+z^2)$$

24) گزینه 1

چون معادله فاقد $\frac{\partial u}{\partial x}$ است با فرض ثابت بودن **x**، معادله رامشابه معادله دیفرانسیل معمولی خطی حل می کنیم.

$$\cot x\frac{\partial u}{\partial y}+u=y\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}+(\tan x)u=y\tan x$$

$$\underset{e}{\int}\tan x\,dy=e^{y\tan x}$$

$$u=e^{-y\tan x}\left[\int y\tan xe^{y\tan x}dy+f(x)\right]$$

$$u=e^{-y\tan x}(ye^{y\tan x}-(\cot x)e^{y\tan x}+f(x))$$

$$u=y-\cot x+f(x)e^{-y\tan x}$$

25) گزینه 3

$$A=x-1,B=2(y+1),c=-(x+1)$$

$$\Delta=B^2-4AC=4(y+1)^2+4(x^2-1)=4(y^2+x^2+2y)$$

$y>0\Rightarrow\Delta>0$ (هذلولی گون)

26) گزینه 2

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,u=\frac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow xu_x+u=0$$

$$xu_x=-u\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{du}{-u}\Rightarrow\ln x+\ln x=\ln f(y)$$

$$ux=f(y)\Rightarrow u=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(y)}{x}\Rightarrow z=\frac{1}{x}\phi(y)+\psi(x)$$

27) گزینه 1

$$A=1,B=10,C=9\Rightarrow\Delta=B^2-4AC=64>0$$

چون معادله از نوع هذلولی گون می باشد بنابراین با تغییر متغیر مناسب $\beta=\beta(x,y),\alpha=\alpha(x,y)$ به فرم کانونی زیر تبدیل می گردد.

28) گزینه 4

$A=1, B=6, C=8 \Rightarrow \Delta = B^2-4AC=4>0$ (هذلولی گون)

$(D^2+6DD'+8D'^2)u=0 \Rightarrow (D+2D')(D+4D')u=0$

$(D+2D')u=0 \Rightarrow u=g(y-2x)$
$(D+4D')u=0 \Rightarrow u=f(y-4x)$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$u(x,y)=f(y-4x)+g(y-2x)$

29) گزینه 1

$A=1, B=-2, C=1 \Rightarrow \Delta=0$ (سهمی گون)

$r^2+2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=-1$

$\frac{dy}{dx}=-1 \Rightarrow y+x=c_1 \Rightarrow z=y+x$

V تابع دلخواه است. همانطور که در بخش (3-5) توضیح داده شده است اگر $v=y$ فرض شود معادله‌ی نرمال به صورت $u_{vv}=G(u_v,u_z,u,z,v)$ خواهد بود بنابراین معادله نرمال به صورت گزینه (1) می‌باشد.

30) گزینه 1

$(D^2+DD'-6D'^2)u=0 \Rightarrow (D-2D')(D+3D')u=0$

$(D-2D')u=0 \Rightarrow u=\psi(y+2x)$

$(D+3D')u=0 \Rightarrow u=\phi(y-3x)$

جواب عمومی: $u(x,y)=\phi(y-3x)+\psi(y+2x)$

31) گزینه 3

$u=F(x)G(t) \Rightarrow u_{tt}=F(x)G''(t), u_{xx}=F''(x)G(t)$

$u_{tt}-x^2u_{xx}=0 \Rightarrow F(x)G''(t)-x^2F''(x)G(t)=0$

$\frac{x^2F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{G(t)}=k \Rightarrow x^2\frac{d^2F}{dx^2}-KF=0, \frac{d^2G}{dt^2}-kG=0$

32) گزینه 3

$D^4u+D'^4u-2D^2D'^2u$

$(D^4+D'^4-2D^2D'^2)u=0 \Rightarrow (D^2-D'^2)^2u=0 \Rightarrow (D-D')^2(D+D')^2u=0$

33) گزینه 2

$A=x+1, B=2x, C=y \Rightarrow \Delta=B^2-4AC=4x^2-4y(x+1)$

$y=\dfrac{x^2}{1+x} \Rightarrow x^2=(1+x)y \Rightarrow \Delta=0$:سهمی‌گون

34) گزینه 1

$u_{vv}=0 \Rightarrow u_v=f(z) \Rightarrow u=vf(z)+g(z)$

$v=y, z=\dfrac{y}{x} \Rightarrow u(x,y)=yf(\dfrac{y}{x})+g(\dfrac{y}{x})$

35) گزینه 2

$A=1, B=-2, C=0 \Rightarrow \Delta=4>0$

چون معادله دیفرانسیل هذلولی‌گون است بنابراین فرم نرمال آن به صورت گزینه (1) یا (2) می‌باشد.

$v=y, z=y+2x \Rightarrow v_x=0, v_y=1, z_x=2, z_y=1$

$u_x=u_vv_x+u_zz_x=2u_z, u_{xx}=4u_{zz}$

$u_{xy}=2u_{zv}v_y+2u_{zz}z_y=2u_{zv}+2u_{zz}$

$u_{xx}-2u_{xy}=e^y \Rightarrow 4u_{zz}-4u_{zv}-4u_{zz}=e^v$

$u_{zv}=-\dfrac{1}{4}e^v$

36) گزینه 1

$u=y^2F(x)-3x+4y \Rightarrow u_y=2yF(x)+4 \Rightarrow F(x)=\dfrac{u_y-4}{2y}$

$u=y\dfrac{u_y-4}{2}-3x+4y \Rightarrow 2u=yu_y-6x+4y \Rightarrow yu_y-2u=6x-4y$

37) گزینه 3

$xu_x-u=yx^2$

معادله فاقد u_y است بنابراین **y** را ثابت فرض کرده و مشابه یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی آن را حل می‌کنیم.

$u_x-\dfrac{1}{x}u=yx \;,\; \int -\dfrac{1}{x}dx=-Lnx$

$u(x,y) = yx^2 + x\phi(y)$

38) گزینه 2

$A = 1,\ B = 2\ ,\ C = \cos x$

$r^2 - 2r + \cos x = 0 \Rightarrow r_1 = 1 + \sqrt{1-\cos x} = 1 + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}, r_2 = 1 - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow y - x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_1 \Rightarrow \xi = y - x + 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 1 - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow y - x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = c_2 \Rightarrow \eta = y - x - 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$

39) گزینه 4

$u_x - u_y = u \Rightarrow (D - D' - 1)u = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -1$

$u = e^x f(y+x) :$ $\mathbf{f}$ تابع دلخواه است

$u = e^{\frac{x-y}{2}}\phi(\frac{x+y}{2}) = e^x e^{-\frac{1}{2}(x+y)}\phi(\frac{x+y}{2}) = e^x f(x+y)$

بنابراین گزینه (4) مورد قبول است.

گزینه‌های 1 و 3 نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کنند ولی جواب عمومی معادله نمی‌باشند.

40) گزینه 2

$az_x + bz_y + cz = 0$ یا $(aD + bD' + c)z = 0 \Rightarrow z = e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay - bx)$

$z = f(2x+y) + g(x-y) - xy = f(2x+y) + h(y-x) - xy$

$f(2x+y) \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 0 \Rightarrow D - 2D'$

$h(y-x) \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 0 \Rightarrow D + D'$

$(D - 2D')(D + D') = D^2 - DD' - 2D'^2 \Rightarrow z_{xx} - z_{xy} - 2z_{yy} = 0$

فقط گزینه (2) دارای معادله دیفرانسیل همگن فوق می‌باشد.

ضمناً تابع $-xy$ در معادله دیفرانسیل $z_{xx} - x_{xy} - 2z_{yy} = 1$ صدق می‌کند.

41) گزینه 3

$(2D^2 + 4DD' + D'^2)z = 0$

$$2D^2 + 4DD' + D'^2 = 0 \Rightarrow D = -(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})D'$$

$$(D + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}D')(D + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})D')z = 0$$

$$z = f(y + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)x) + g(y - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})x)$$

42) گزینه 1

y را ثابت فرض می‌کنیم در اینصورت معادله مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی از نوع کوشی اویلر می‌باشد.

$$x^2 u_{xx} + 2xu_x - 2u = 0$$

$$r(r-1) + 2r - 2 = 0 \Rightarrow r = 1, -2 \Rightarrow u = c_1(y)x^{-2} + c_2(y)x$$

43) گزینه 2

$A = x, B = -y, c = 0 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = y^2 > 0 \Rightarrow$ هذلولی‌گون

44) گزینه 2

$$A = 6, B = -1, c = 0 \Rightarrow 6r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c_1 \Rightarrow \xi = y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} \Rightarrow 6dy + dx = 0 \Rightarrow 6y + x = c_2 \Rightarrow \eta = 6y + x$$

45) گزینه 4

$$A = 1, B = 0.c = -1 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow y + x = c_1 \Rightarrow r = y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y - x = c_2 \Rightarrow s = y - x$$

46) گزینه 3

معادله دیفرانسیل **(I)** همگن نمی‌باشد بنابراین با روش جداسازی متغیرها حل نمی‌شود. معادله دیفرانسیل **(II)** همگـن است بنابراین آن را بررسی می‌کنیم

$$u(t, r) = F(t)G(r) \Rightarrow u_t = F'(t)G(r), u_r = F(t)G'(r), u_{rr} = F(t)G''(r)$$

روابط فوق را در معادله قرار می‌دهیم.

$$F'(t)G(r) = a^2(F(t)G''(r) + \frac{1}{r}F(t)G'(r))$$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = a^2(\frac{G''(r)}{G(r)} + \frac{1}{r}\frac{G'(r)}{G(r)})$$

کافی است عبارات تساوی فوق را برابر مقدار ثابت فرض کنیم و با حل دو معادله، توابع $G(r), F(t)$ حاصل می‌شوند.

47) گزینه 3

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 0 \Rightarrow (D^2 - 4D'^2)u = 0$$

$$(D - 2D')(D + 2D')u = 0$$

$$(D - 2D')u = 0 \Rightarrow u = F(y + 2x)$$
$$(D + 2D')u = 0 \Rightarrow u = G(y - 2x)$$
$$u(x, y) = F(y + 2x) + G(y - 2x)$$

48) گزینه 3

$$A = x, B = -y, c = 0 \Rightarrow xr^2 + yr = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c_1 \Rightarrow v = y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow xy = c_2 \Rightarrow z = xy$$

49) گزینه 1

$$A = y^2, B = -2xy, c = x^2 \Rightarrow y^2r^2 + 2xyr + x^2 = 0$$

معادله سهمي‌گون:
$$r_1 = r_2 = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy + xdx = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 = c_1 \Rightarrow \xi = x^2 + y^2$$

η تابع دلخواهی است که می‌توانیم $\eta = y$ را انتخاب کنیم.

50) گزینه 3

$$A = 2xy - 1, B = x + 2y, c = 1$$
$$\Delta = B^2 - 4AC = (x + 2y)^2 - 4(2xy - 1) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 4$$

$\Delta = (x - 2y)^2 + 4 > 0$ هذلولی‌گون

51) گزینه 2

$$z_{xx} - x^2 z_{yy} = 0 \Rightarrow A = 1, B = 0, C = -x^2 \Rightarrow \Delta = 4x^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} = H(\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, z, t, u)$$

در گزینه‌ها به جای ϕ باید **z** قرار گیرد بنابراین گزینه (2) صحیح است.

52) گزینه 1

جواب عمومی: $Z = Z_h + Z_p$

$$z_{xx} - z_{yy} = \mathbf{0} \Rightarrow (D^2 - D'^2)z = \mathbf{0} \Rightarrow (D - D')(D + D')z = \mathbf{0}$$

$$(D - D')z = \mathbf{0} \Rightarrow z = \phi_1(x + y)$$
$$(D + D')z = \mathbf{0} \Rightarrow z = \phi_3(y - x) = \phi_2(x - y)$$

جواب همگن: $z_h = \phi_1(x + y) + \phi_2(x - y)$

بنابراین گزینه 3 و 4 نادرست هستند. گزینه (2) نیز نادرست است چون در آن $z_p = \mathbf{0}$ است که در معادلـه دیفرانسـیل صدق نمی‌کند.

در گزینه (1)، $z_p = \frac{1}{4}x(x - y)^2$ می‌باشد که در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند بنابراین گزینه (1) صحیح می‌باشد.

مسئله اشتورم لیوویل

اگر توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، $h(x), f_1'(x)$ در بازه‌ی $[x_0, x_1]$ پیوسته بوده و توابع $h(x), f_1(x)$ در این بازه مثبت باشند آنگاه یک مسئله اشتورم لیوویل معمولی به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} f_1(x)y''(x)+f_1'(x)y'(x)+(f_2(x)+\lambda h(x))y(x)=0 \ , \ x_0<x<x_1 \\ c_1 y(x_0)+c_2 y'(x_0)=0 \qquad (1) \\ c_3 y(x_1)+c_4 y'(x_1)=0 \qquad (2) \end{cases}$$

روابط (1) و (2) شرایط مرزی را درمسئله اشتورم لیوویل مشخص می‌کنند. معادله‌ی فوق به صورت $(f_1(x)y'(x))'+(f_2(x)+\lambda h(x))y(x)=0$ نیز قابل بیان است.

مقادیر و توابع ویژه:

مسئله اشتورم ليوويل معمولي (عادي) داراي مقادير ويژه متفاوت حقيقي λ_n به تعداد نامحدود مي‌باشد و به ازاي هر مقدار ويژه λ_n، يك تابع ويژه $y_n(x)$ موجود است به طوريكه هر تابع هموار قطعه‌اي مانند $f(x)$، $x_0<x<x_1$ را مي‌توان بر حسب توابع ویژه $y_n(x)$ به صورت زیر بیان نمود.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$$

سری فوق در نقاط پیوستگی $f(x)$، به مقدار تابع $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حدود چپ و راست تابع $f(x)$ همگرا می‌باشد.

ضرایب a_n به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_n=\frac{(f(x), y_n(x))}{(y_n(x), y_n(x))}$$

$(f(x), y_n(x))$ ضرب داخلی توابع f, y_n با تابع وزنی $h(x)$ می‌باشد بطوریکه

$$(f(x), y_n(x))=\int_a^b f(x) y_n(x) h(x)\, dx$$

$$(y_n(x), y_n(x))=\int_a^b y_n^2(x) h(x)\, dx$$

نکته 4: توابع ویژه‌ی مسئله اشتورم لیوویل نسبت به تابع وزنی $h(x)$ متعامد هستند

بنابراین

$$(y_n(x), y_m(x))=\int_a^b y_n(x) y_m(x) h(x)\, dx=0 \ , \ n\neq m$$

نکته 5: مسائل اشتورم لیوویل مهم

$$y''(x)+\lambda y(x)=0 : 0<x<L, h(x)=1$$

شرایط مرزی $y(0)=y(L)=0$

$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \quad , y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x = \sin(\frac{n\pi}{L}x), n = 1,2,3,\dots$

(2

$y''(x) + \lambda y(x) = 0 ; 0 < x < L , h(x) = 1$

شرایط مرزی $y'(0) = y'(L) = 0$

$\lambda_n = 0 \ , \ (\frac{n\pi}{L})^2 , n = 1,2,3,\dots$

$y_0(x) = 1 , y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\, x = \cos(\frac{n\pi}{L}x), n = 1,2,3,\dots$

(3

$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < L , h(x) = 1$

شرایط مرزی $y(0) = y'(L) = 0$

$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2 \ , \ y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x = \sin(\frac{(2n-1)}{2L}\pi x), n = 1,2,3,\dots$

(4

$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad ; \quad 0 < x < L , h(x) = 1$

شرایط مرزی $y'(0) = y(L) = 0$

$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2 \quad , n = 1,2,\dots$

$y_0(x) = 1 , \ y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\, x = \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x), n = 1,2,\dots$

(5

$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \ ; -L < x < L \ , h(x) = 1$

شرایط مرزی: $\begin{cases} y(-L) = y(L) \\ y'(-L) = y'(L) \end{cases}$

$\lambda_n = 0, (\frac{n\pi}{L})^2 \ ; \ n = 1,2,\dots$

$y_n(x) = 1 , \sin(\frac{n\pi}{L}x), \cos(\frac{n\pi}{L}x); n = 1,2,\dots$

معادله‌ی فوق را مسئله اشتورم لیوویل با شرایط تناوبی می‌نامیم.

(6

$y''(x)+\lambda y(x)=0\;,0<x<\infty\;,h(x)=1$

در این مسئله $\lim_{x\to\infty} y(x)$ کراندار است.

مقادیر ویژه: $\lambda_\omega=\omega^2\;;\;\omega>0$

توابع ویژه: $y_\omega(x)=\sin(\omega x);\omega>0$

(7

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\;\;;0<x<\infty\;,h(x)=1$$

$$y'(0)=0$$

در این مسئله $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ کراندار است.

توابع ویژه: $y_\omega(x)=\cos(\omega x),\omega\geq 0$ مقادیر ویژه: $\lambda_\omega=\omega^2,\omega\geq 0$

(۸ $y''(x)+\lambda y(x)=0,-\infty<x<\infty,h(x)=1$

در این مسئله $\lim_{x\to\pm\infty} y(x)$ کراندار هستند.

مقادیر ویژه $\lambda_\omega=\omega^2\;;\;\omega\geq 0$

توابع ویژه: $y_\omega(x)=\sin(\omega x),\cos(\omega x)\;;\;\omega\geq 0$

معادلات 6 و 7 و 8 را مسئله اشتورم لیوویل منفرد می‌نامیم.

مثال ۱۷: توابع ویژه مسئله زیر کدامند؟

$$\begin{cases}-\dfrac{d^2u}{dx^2}=\lambda u\,,0<x<\pi\\ u(0)=0,\;\;u'(\pi)=0\end{cases}$$

1) $u_k(x)=\sin x\cos^2(k+\frac{1}{2})x$

2) $u_k(x)=\sin ky(1+\cos x)$

3) $u_k(x)=\sin kx\cos\frac{x}{2}-\cos kx\sin\frac{x}{2}$

4) هیچکدام

پاسخ: گزینه 3

$$\begin{cases}u''(x)+\lambda u(x)=0\;\;,\;0<x<\pi\\ u(0)=u'(\pi)=0\end{cases}$$

معادله‌ی فوق با قسمت سوم نکته (5) مطابقت دارد بنابراین توابع ویژه عبارتند از

$$\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2\pi}x)=\sin(\frac{(2n-1)}{2}x)=\sin(n-\frac{1}{2})x\;\;,\;n=1,2,\ldots$$

$$\sin kx\cos\frac{\quad}{2}-\cos kx\sin\frac{\quad}{2}=\sin(kx-\frac{\quad}{2})=\sin(k-\frac{\quad}{2})x$$

مثال ۱۸: مسئله با مقادیر مرزی

$$(x^2e^x\phi'(x))'-x\phi(x)+\lambda\cos x\phi(x)=0,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\phi(\frac{\pi}{2})=2\phi'(\frac{\pi}{2})\ ,\ \phi(-\frac{\pi}{2})=\phi'(-\frac{\pi}{2})$$

مفروض است. اگر ϕ_n, ϕ_m دو تابع ویژه مختلف برای این مسئله باشند در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)\phi_m(x)\cos x dx=2\pi$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\phi_n(x)\phi_m(x)-1)\cos x dx=-2$

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)\phi_m(x)\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi_n^2(x)dx$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\phi_n(x)\phi_m(x)-n)\cos x dx=0$

پاسخ: گزینه 2

این مسئله، یک مسئله اشتورم لیوویل با توابع $f_1(x)=x^2e^x$, $f_2(x)=-x$ و تابع وزن $h(x)=\cos x$ می‌باشد بنابراین توابع ویژه ϕ_n, ϕ_m نسبت به $h(x)$ متعامدند.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\phi_n(x)\phi_m(x)\cos x dx=0$$

ضمناً $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2$ بنابراین:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\phi_n(x)\phi_m(x)-1)\cos x dx=-2$$

8-5) معادله موج، روش دالامبر

مسئله مقدار مرزی موج به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+h(x,t)\ ,\ 0<x<L\ ,t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=g(x) & \text{شرایط اولیه (زمانی):} \\ u(0,t)=g_1(t),u(L,t)=g_2(t) & \text{شرایط مرزی (مکانی):} \end{cases}$$

دامنه موج در مکان **x** و در لحظه‌ی $t=u(x,t)$

وضعیت اولیه موج $=u(x,0)$

شتاب قائم در مکان x = $u_{tt}(x,t)$

تقعر موج = $u_{xx}(x,t)$

نیروی ایجادکننده موج که به مکان **X** در لحظه **t** وارد می‌شود= $h(x,t)$

مدول یانگ (پارامتر ثابت): c^2

در مسئله فوق اگر نوسان را در یک میله یا تار در نظر بگیریم در اینصورت طول آن محدود (L) فرض شده است ممکن است میله نامحدود $(-\infty < x < \infty)$ و یا نیمه محدود $(0 < x < \infty)$ باشد در اینصورت شرایط مرزی نیز تغییر می‌کنند.

شرایط مرزی ممکن است برحسب مقادیر $u_x(0,t)$ و $u_x(L,t)$ بیان شود.

اگر $h(x,t) = 0$ باشد، معادله موج را همگن می نامیم.

اگر $g_1(t) = g_2(t) = 0$ باشد، شرایط مرزی را همگن می‌نامیم.

روش دالامبر:

در این روش از تبدیل معادله موج به فرم کانونی استفاده می‌کنیم. برای بررسی روش دالامبر، معادله‌ی موج همگن با شرایط مرزی همگن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \ , \ 0 < x < L \ , t > 0 & \text{(میله محدود)} \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) & \text{:شرایط اولیه} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{:شرایط مرزی دیریکله} \end{cases}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$A = 1, B = 0, C = -c^2 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4C^2 > 0$$

بنابرین معادله موج، یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم از نوع هذلولی‌گون می‌باشد

معادله مشخصه: $r^2 - c^2 = 0$

$$r = \pm c$$

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x - ct = c_1 \Rightarrow \alpha = x - ct$$

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x + ct = c_2 \Rightarrow \beta = x + ct$$

با تغییر متغیرهای $\beta = x + ct, \alpha = x - ct$ معادله موج به فرم کانونی تبدیل می‌گردد.

$$u_{tt} = c^2(u_{\beta\beta} - 2u_{\alpha\beta} + u_{\alpha\alpha}), u_{xx} = u_{\beta\beta} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\alpha\alpha}$$

$$u_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow u_\alpha = \phi_1(\alpha) \Rightarrow u = \phi(\alpha) + \psi(\beta)$$

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$$

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

با فرض اینکه $\psi(a) - \phi(a) = 0$ از معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[a,x]$ انتگرال می‌گیریم

$$\begin{cases} \psi(x) - \phi(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_a^x g(s)\,ds \\ \psi(x) + \phi(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x g(s)\,ds \Rightarrow \psi(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_a^{x+ct} g(s)\,ds$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x g(s)\,ds \Rightarrow \phi(x-ct) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_a^{x-ct} g(s)\,ds$$

بنابراین $u(x,t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[f(ct) + f(-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(s)\,ds = 0$$

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[f(L+ct) + f(L-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{L-ct}^{L+ct} g(s)\,ds = 0$$

چون توابع **f , g** مستقل از هم هستند بنابراین از روابط فوق نتیجه می‌گیریم که باید توابع g,f را حول نقطه $x = L, x = 0$ به صورت فرد بسط دهیم بنابراین دوره تناوب این توابع برابر $2L$ خواهد بود.

خلاصه‌ی روش بالا را به همراه شرایط مرزی دیگر در نکته (6) مطرح می‌کنیم.

نکته 6: روش دالامبر برای معادله موج در میله محدود

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \; 0 < x < L, \; t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \text{ :شرایط اولیه} \\ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

اگر شرایط مرزی (دیریکله) $u(0,t) = u(L,t) = 0$ موردنظر باشد آنگاه توابع g,f را حول نقاط $x = L, x = 0$ به صورت فرد

اگر شرایط مرزی (نیومن) $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$ موردنظر باشد آنگاه توابع g,f را حول نقاط $x=L, x=0$ به صورت زوج بسط می‌دهیم بنابراین g,f دارای دوره تناوب $2L$ خواهند بود.

اگر شرایط مرزی $u(0,t)=u_x(L,t)=0$ موردنظر باشد آنگاه توابع g,f را حول $x=0$ به صورت فرد و حول $x=L$ به صورت زوج بسط می‌دهیم بنابراین g,f دارای دوره تناوب $4L$ خواهند بود.

اگر شرایط مرزی $u_x(0,t)=u(L,t)=0$ باشد آنگاه $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ را حول $x=0$ به صورت زوج و حول $x=L$ به صورت فرد بسط می‌دهیم. بنابراین $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ دارای دوره تناوب $4\mathbf{L}$ خواهند بود.

نکته 7: روش دالامبر برای معادله موج در میله نامحدود

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \quad ,-\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=f(x), -\infty<x<\infty \\ u_t(x,0)=g(x), -\infty<x<\infty \end{cases}$$

پاسخ معادله موج فوق به صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$$

نکته 8: روش دالامبر برای معادله موج در میله نیمه محدود

الف) شرط مرزی دیریکله

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \quad ,0<x<\infty \;\; t>0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x) & \text{شرایط اولیه:} \\ u(0,t)=g_1(t) & \text{شرط مرزی:} \end{cases}$$

پاسخ معادله موج فوق به صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds+g_1(t-\frac{x}{c})H(t-\frac{x}{c})$$

$H(t)$ تابع پله واحد می‌باشد بنابراین

$$H(t-\frac{x}{c})=\begin{cases} 1 & t>\frac{x}{c} \\ 0 & t<\frac{x}{c} \end{cases}$$

در پاسخ فوق توابع $g(x), f(x)$ حول نقطه $x=0$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند.

ب) شرط مرزی نیومن

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x) \\ u_x(0,t)=g_1(t) \end{cases}$$ شرایط اولیه:

در این حالت توابع $g(x), f(x)$ حول نقطه $x=0$ به صورت زوج بسط داده می‌شوند و پاسخ معادله موج به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds - c\left(\int_0^{t-\frac{x}{c}} g_1(s)\,ds\right)H\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

مثال ۱۹: اگر تابع $u(x,t)$ **جواب مسئله** $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad ,0<x<1\ ,t>0 \\ u(x,0)=0\ , u_t(x,0)=x(1-x)\ ,\ 0<x<1 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$ **باشد آنگاه** $u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ **برابر است با:**

1) $\frac{1}{24}$ 2) $-\frac{1}{24}$ 3) 0 4) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه 4

$f(x)=0\ , g(x)=x(1-x)\ ,0<x<1$

با توجه به شرایط مرزی $u_x(0,t)=u(1,t)=0$، توابع g, f حول $x=0$ به صورت زوج و حول $x=1$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند بنابراین دوره تناوب آن‌ها $4L=4$ خواهد بود.

$$x=\frac{1}{4}, t=\frac{3}{4}, c=1 \Rightarrow x-ct=-\frac{1}{2}, x+ct=1$$

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(s)\,ds=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(s)\,ds$$

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(s)\,ds$$

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\int_0^{\frac{1}{2}} s(1-s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} s(1-s)\,ds=\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \ , \ x > 0 \ , t > 0 \\ w(x,0) = 0 = w_t(x,0) \ , x \geq 0 \\ w_x(0,t) = \cos bt \ , t \geq 0 \end{cases}$$

1) $\frac{1}{b}\sin b(t-x)$ 2) $\frac{1}{b}\cos b(t-x)$

3) $-\frac{1}{b}\sin b(t-x)$ 4) $\begin{cases} -\frac{1}{b}\sin b(t-x) & t > x \\ 0 & t \leq x \end{cases}$

پاسخ: گزینه 4

معادله موج برای میله نیمه محدود با شرط مرزی نیومن می‌باشد بنابراین

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds - c\left(\int_0^{t-\frac{x}{c}} g_1(s)\,ds\right)H\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$f(x) = g(x) = 0 \ , \ g_1(x) = \cos bx \ , c = 1$$

$$w(x,t) = -\int_0^{t-x} \cos bs\,ds\,H(t-x) = -\frac{1}{b}\sin b(t-x)H(t-x)$$

$$H(t-x) = \begin{cases} 1 \ , \ x < t \\ 0 \ , \ x \geq t \end{cases}$$

$$w(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{b}\sin b(t-x) \ , x < t \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \ x \geq t \end{cases}$$

9-5) معادله موج، روش جداسازی متغیرها

در این بخش ابتدا معادله موج همگن با شرایط مرزی همگن دیریکله را با روش جداسازی متغیرها مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس پاسخ معادله موج را در حالات دیگر مطرح می‌کنیم.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , 0 < x < L \ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \text{:شرایط اولیه} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ :شرایط مرزی دیریکله} \end{cases}$$

پاسخ معادله موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$u_{tt} = F(x)G''(t) \ , \ u_{xx} = F''(x)G(t)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t) \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

برابر مقدار ثابت **k** باشند بنابراین

$$F''(x)-kF(x)=0$$
$$G''(t)-c^2kG(t)=0$$

در این قسمت شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$u(0,t)=0\Rightarrow F(0)G(t)=0$$
$$u(L,t)=0\Rightarrow F(L)G(t)=0$$

اگر $G(t)=0$ باشد آنگاه $u(x,t)=0$ خواهد بود که مورد قبول نیست بنابراین $G(t)\neq 0$ است و از

روابط فوق نتیجه می‌گیریم

$$F(0)=F(L)=0$$

برای تابع $F(x)$ یک مسئله اشتورم لیوویل به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases}F''(x)-kF(x)=0 \ , \ 0<x<L\\ F(0)=F(L)=0\end{cases}$$

مقادیر ویژه: $-K=(\frac{n\pi}{L})^2, n=1,2,\ldots$

توابع ویژه $F_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{L}x), n=1,2,\ldots$

مقادیر ویژه را به صورت $\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2, n=1,2,\ldots$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به مقادیر $K=-(\frac{n\pi}{L})^2, n=1,2,\ldots$، معادله زیر برای $G(t)$ به دست می‌آید.

$$G''(t)+(\frac{cn\pi}{L})^2G(t)=0$$

به ازای هر مقدار **n**، پاسخ زیر برای معادله‌ی فوق حاصل می‌گردد

$$G_n(t)=A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t) \ , n=1,2,\ldots$$

$$u_n(x,t)=G_n(t)F_n(x), n=1,2,\ldots$$

برای اعمال شرایط اولیه معادله موج، پاسخ معادله موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

برای محاسبه ضرایب A_n , B_n، از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow \sum_{n=1} A_n \sin(\frac{}{L}x)=f(x)$$

براساس سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ داریم:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\,,\ n=1,2,\ldots$$

$$u_t(x,0)=g(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{cn\pi}{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)=g(x)$$

$$B_n\frac{cn\pi}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

$$B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\ ,\ n=1,2,\ldots$$

نکته 9: پاسخ معادله موج

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=g(x) \quad \text{شرایط اولیه:} \\ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

حالت 1: اگر فاصله محدود $(0<x<L)$ و شرایط مرزی (دیریکله) به صورت $u(0,t)=u(L,t)=0$ باشد آنگاه

مقادیر ویژه: $\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2, n=1,2,\ldots$

توابع ویژه $F_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x=\sin(\frac{n\pi}{L}x)\ , n=1,2,\ldots$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right]\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

ضرایب B_n, A_n با استفاده از شرایط اولیه، محاسبه می‌شوند.

حالت 2: اگر فاصله محدود $(0<x<L)$ و شرایط مرزی (نیومن) به صورت $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$ باشد آنگاه

$$\begin{cases} \lambda_0=0 \\ \lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2\,, n=1,2,\ldots \end{cases} \qquad \text{مقادیر ویژه}$$

توابع ویژه: $F_n(x)=1,\cos(\frac{n\pi}{L}x), n=1,2,\ldots$

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right]\cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

حالت 3: اگر فاصله محدود $(0<x<L)$ و شرایط مرزی به صورت $u(0,t)=u_x(L,t)=0$ باشد آنگاه

مقادیر و توابع ویژه: $\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2, F_n(x)=\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}\left[A_n\cos(\frac{}{L}t)+B_n\sin(\frac{}{L}t)\right]\sin(\frac{}{2L}x)$$

حالت 4: اگر فاصله محدود $(0<x<L)$ و شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t)=u(L,t)=0$ باشد آنگاه

مقادیر و توابع ویژه: $\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2L})^2,F_n(x)=\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2L})$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right]\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$$

حالت 5: اگر فاصله محدود $(-L<x<L)$ و شرایط مرزی (تنـاوبی) بـه صـورت $u(-L,t)=u(L,t),\ u_x(-L,t)=u_x(L,t)$ باشد آنگاه

$$\lambda_0=0,\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2,F_0(x)=1\ ,\ F_n(x)=\cos(\frac{n\pi}{L}x),\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)+B_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right]\left[C_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)+D_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\right]$$

حالت 6: اگر فاصله نیمه محدود $(0<x<\infty)$ و شرط مرزی به صورت $u(0,t)=0$ و $u(\infty,t)$ کراندار باشد آنگاه:

مقادیر و توابع ویژه $\lambda_\omega=\omega^2,F_\omega(x)=\sin(\omega x)\ ,\omega>0$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos(\omega ct)+B(\omega)\sin(\omega ct))\sin(\omega x)d\omega$$

حالت 7: اگر فاصله نیمه محدود $(0<x<\infty)$ و شرط مرزی به صورت $u_x(0,t)=0$ و $u(\infty,t)$ کراندار باشد آنگاه

$$\lambda_\omega=\omega^2,F_\omega(x)=\cos(\omega x)\ ,\omega\geq 0$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos(\omega ct)+B(\omega)\sin(\omega ct))\cos(\omega x)d\omega$$

حالت 8: اگر فاصله نامحدود $(-\infty<x<\infty)$ و $u(-\infty,t)$ و $u(\infty,t)$ کراندار باشند آنگاه

$$\lambda_\omega=\omega^2,F_\omega(x)=\cos(\omega x)\ ,\sin(\omega x)\ ,\omega\geq 0$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos(\omega ct)+B(\omega)\sin(\omega ct))(c(\omega)\cos(\omega x)+D(\omega)\sin(\omega x))\,d\omega$$

مثال ۲۱: جواب مسئله $\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}\ ,0<x<\pi\ ,t>0\\ u(x,0)=1,u_t(x,0)=0\quad ,0\leq x\leq\pi\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\ ,t\geq 0\end{cases}$ **عبارت است از:**

1) $u(x,t)=1+\sin t\cos x$

2) $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\sin(2n-1)t$

3) $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$

4) $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\sin(2n-1)x$

معادل موج فوق با فاصله محدود $(0 < x < \pi)$ و شرایط مرزی دیریکله $(u(0,t) = u(\pi,t) = 0)$ می‌باشد بنابراین براساس حالت (1) نکته (9):

$$c = 1,\ \frac{n\pi}{L} = n$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)\sin(nx)$$

A_n , B_n را با شرایط اولیه تعیین می‌کنیم

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$u(x,0) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 1 \Rightarrow A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2k-1)} & , n = 2k-1 \\ 0 & , n = 2k \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1}\sin(2k-1)x$$

مثال ۲۲: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} , 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = k\sin 3x - \dfrac{k}{2}\sin 6x \end{cases}$$

1) $u(x,t) = \frac{k}{3}\cos 3t \cos 3x - \frac{k}{4}\cos 6t \cos 6x$

2) $u(x,t) = \frac{k}{3}\sin 4t \cos 4x - \frac{k}{12}\sin 4t \sin 6x$

3) $u(x,t) = \frac{k}{3}\sin 3t \sin 3x - \frac{k}{12}\sin 6t \sin 6x$

4) $u(x,t) = \frac{k}{2}\sin 3t \sin 3x - \frac{k}{10}\sin 6t \sin 6x$

پاسخ: گزینه 3

$$c=1,\frac{n\pi}{L}=n$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin(nx)$$

$$u(x,0)=0\Rightarrow A_n=0\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nt)\sin(nx)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\sin(nx)=k\sin 3x-\frac{k}{2}\sin 6x$$

$$3B_3=K\Rightarrow B_3=\frac{K}{3},6B_6=-\frac{K}{2}\Rightarrow B_6=-\frac{K}{12}$$

$$u(x,t)=\frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x-\frac{k}{12}\sin 6t\sin 6x$$

10-5) معادله حرارت

مسئله مقدار مرزی انتقال گرما (حرارت) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} u_t=c^2u_{xx}+h(x,t),0<x<L,t>0 \\ u(x,0)=f(x) \text{ :شرط اولیه} \\ u(0,t)=g_1(t),u(L,t)=g_2(t) \text{ :شرط مرزی (دیریکله)} \end{cases}$$

منبع حرارتی که به مکان **x** در زمان **t** اعمال می‌شود: $h(x,t)$

آهنگ تغییردما $u_t(x,t)$

شرایط مرزی، مشابه معادله‌ی موج، ممکن است بر حسب $u_x(L,t),u_x(0,t)$ بیان شوند و فاصله نیز ممکن است نیمه محدود $(0<x<\infty)$ یا نامحدود $(-\infty<x<\infty)$ باشد.

اگر $h(x,t)=0$ آنگاه معادله حرارت را همگن می‌نامیم و اگر $g_1(t)=g_2(t)=0$ آنگاه شرایط مرزی را همگن می‌گوئیم:

هشت حالت مطرح شده در نکته (9)، در مورد مسئله حرارت نیز صادق است فقط در هر مورد تابع متغیر **t** به صورت $e^{-c^2\lambda_n t}$ یا $e^{-c^2\lambda_\omega t}$ می‌باشد.

برای تعیین پاسخ مسئله حرارت در فواصل نامحدود و نیمه محدود، علاوه بر حالات (6 و 7 و 8) در نکته (9) از نکته (10) نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

نکته 10:

الف) در فاصله نامحدود $(-\infty<x<\infty)$ پاسخ مسئله حرارت به صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\omega)e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}}d\omega$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(\omega)\left[e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}}-e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4c^2t}}\right]d\omega$$

ب) در فاصله نیمه محدود $(0<x<\infty)$ با شرط مرزی (نیومن) $u_x(0,t)=0$، پاسخ مسئله حرارت به صورت زیر می‌باشد.

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(\omega)\left[e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4c^2t}}+e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4c^2t}}\right]d\omega$$

نکته 11: در مسئله حرارت برای تعیین دمای حالت پایدار $(t\to\infty)$، $u_t=0$ فرض کرده و براساس شرایط مـرزی، پاسـخ را تعیین می‌کنیم.

مثال ۲۳: معادله انتقال حرارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ در میله‌ای به طول L با شرایط مرزی $\begin{cases}u(0,t)=T_0\\ u(L,t)=2T_0\end{cases}$ مفروض اسـت. اگر شرایط اولیه $u(x,0)=T_0$ برقرار باشد: توزیع دمای میله در حالت پایدار $(t\to\infty)$ برابر است با:

1) صفر
2) $\frac{3T_0}{2}$
3) $T_0(1+\frac{x}{L})$
4) $x^2+(\frac{T_0}{L}-L)x+T_0$

پاسخ: گزینه 3

برای تعیین پاسخ حالت پایدار، $u_t=0$ فرض می‌کنیم.

$$u_t=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=A_1\Rightarrow u=A_1x+A_2$$

$$u(0,t)=T_0\Rightarrow A_2=T_0$$

$$u(L,t)=2T_0\Rightarrow A_1=\frac{T_0}{L}$$

$$u=T_0(\frac{x}{L}+1)$$

مثال ۲۴: فرض می‌کنیم، یک میله به طول ۱۰ که دو سر آن در دمای صفر اسـت و در لحظـه اولیـه در دمـای $u(x,0)=x(10-x)$ باشد اگر در نقطه x و در زمان t دما با $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\lambda_n x e^{-\lambda^2c^2t}$ بیان شـود و $\lambda_n=\frac{n\pi}{10}$ و $c^2=1$ آنگاه دما در وسط میله برابر است با:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2K-1)^3\pi^3}(-1)^{k-1}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2t}{100}}$
2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2K)^3\pi^3}(-1)^{k-1}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2t}{100}}$
3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2K-1)^3\pi^3}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2t}{100}}$
4) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2K)^3\pi^3}e^{-\frac{(2k)^2\pi^2t}{100}}$

$$u(x,0)=x(10-x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{10}x)$$

$$A_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}x(10-x)\sin(\frac{n\pi}{10}x)dx=\frac{400}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{800}{(2k-1)^3\pi^3}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2k-1)^3\pi^3}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 t}{100}}\sin(\frac{(2k-1)\pi x}{10})$$

$$x=5\Rightarrow\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2})=(-1)^{k-1}$$

$$u(5,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{800}{(2k-1)^3\pi^3}(-1)^{k-1}e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 t}{100}}$$

مثال ۲۵: جواب مسئله انتقال حرارت یک بعدی $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ با شرایط مرزی و اولیه زیر کدام است؟

$$T_x(0,t)=0\ ,\ T_x(1,t)=0\ ,\ T(x,0)=f(x)\quad(0<x<1,t>0)$$

1) $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$

2) $T(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$

3) $T(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\pi x)e^{n^2\pi^2 t}$

4) $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\pi x)e^{n^2\pi^2 t}$

پاسخ: گزینه 2

شرایط این مسئله مشابه حالت (2) نکته (9) می‌باشد بنابراین

$$\frac{n\pi}{L}=n\pi, c=1\ ,\ \lambda_n=(n\pi)^2$$

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n\pi x)e^{-(n\pi)^2 t}$$

مسائل ناهمگن موج و گرما

حالت اول: مسائل ناهمگن موج و گرما با شرایط مرزی همگن

با در نظر گرفتن شرایط مرزی دیریکله، این مسائل به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\ , u_t(x,0) = g(x) \text{ :شرایط اولیه} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ :شرایط مرزی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t), 0 < x < L\ ,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{ :شرط اولیه} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ :شرایط مرزی} \end{cases}$$

برای تعیین مقادیر و توابع ویژه این مسائل می‌توانی از نکته (9) استفاده کنیم ولی تابع وابسته به **t** متفاوت خواهد بود.

اگر تابع ویژه مسئله، $F_n(x)$ باشد در اینصورت $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) F_n(x)$ را در معادله موج یا گرما قرار می‌دهیم و با حل یک معادله دیفرانسیل می‌توانیم $G(t)$ را به دست آوریم.

حالت دوم: مسائل ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن (مستقل از زمان)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x), 0 < x < L\ ,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\ , u_t(x,0) = g(x) \text{ شرایط اولیه} \\ u(0,t) = A, u(L,t) = B \text{ شرایط مرزی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x), 0 < x < L\ ,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad \text{ شرط اولیه} \\ u(0,t) = A, u(L,t) = B \text{ شرایط مرزی} \end{cases}$$

در این مسائل از تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ استفاده می‌کنیم و $w(x)$ را چنان تعیین می‌کنیم که معادله‌ی مربوط به $v(x,t)$، همگن با شرایط مرزی همگن باشد.

اگر تغییر متغیر را در مسئله موج قرار دهیم آنگاه $u(x,t) = v(x,t) + w(x) \Rightarrow u_{tt} = v_{tt}, u_{xx} = v_{xx} + w''(x)$

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + c^2 w''(x) + h(x)$$

$$u(0,t) = A \Rightarrow V(0,t) = A - w(0)$$

$$u(L,t) = B \Rightarrow v(L,t) = B - w(L)$$

برای اینکه مسئله همگن با شرایط مرزی همگن برای $v(x,t)$ به دست آید باید شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} w(0) = A \\ w(L) = B \end{cases}$$

حالت سوم: مسائل ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن (وابسته به زمان)

با فرض شرایط مرزی دیریکله این مسائل به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), 0 < x < L \ , \ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , u_t(x,0) = g(x) \ \text{شرایط اولیه} \\ u(0,t) = A(t), u(L,t) = B(t) \ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t), 0 < x < L \ , \ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{شرط اولیه} \\ u(0,t) = A(t), u(L,t) = B(t) \ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

در این مسائل از تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ استفاده می‌کنیم و $w(x,t)$ را طوری تعیین می‌کنیم که شرایط مرزی $v(x,t)$ همگن گردند و سپس مشابه حالت اول، $v(x,t)$ را به دست می‌آوریم.

اگر تغییر متغیر $u = v + w$ را در معادله گرما قرار دهیم آنگاه

$$u_t = v_t + w_t \ , u_{xx} = v_{xx} + w_{xx}$$

$$v_t + w_t = c^2 v_{xx} + c^2 w_{xx} + h(x,t)$$

$$u(0,t) = A(t) \Rightarrow v(0,t) = A(t) - w(0,t)$$

$$u(L,t) = B(t) \Rightarrow v(L,t) = B(t) - w(L,t)$$

برای اینکه شرایط مرزی تابع $v(x,t)$ همگن باشد باید $w(0,t) = A(t)$ و $w(L,t) = B(t)$ گردد. معمولاً $w(x,t)$ را به صورت معادله خط در نظر می‌گیریم

در اینصورت

$$w(x,t) = \frac{B(t) - A(t)}{L} x + A(t)$$

برای تابع فوق، $w_{xx} = 0$ است.

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow v(x,0) = f(x) - w(x,0)$$

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} + h(x,t) - w_t , 0 < x < L \ , \ \ t > 0 \\ v(x,0) = f(x) - w(x,0) \quad \text{شرط اولیه} \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

مسئله فوق ناهمگن با شرایط مرزی همگن می‌باشد بنابراین مشابه حالت اول، $v(x,t)$ را به دست می‌آوریم و $u(x,t)$ به

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{B(t)-A(t)}{L}x+A(t)$$

مثال ۲۶: برای حل معادله ناهمگن حرارت با شرایط

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t)\quad,\quad u(0,t)=u(L,t)=0$$

و بـا فـرض $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$ کـه در آن $A_n(t)$ از معادلـه دیفرانسـیل $A_n'(t)+c^2(\frac{n\pi}{L})^2A_n(t)=B_n(t)$ بدسـت می‌آید، مقدار $B_n(t)$ کدام است؟ (برق ـ 80)

1) $\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ 2) $\frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ 3) $\frac{1}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ 4) $\frac{2}{L}\int_{-L}^L q(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

پاسخ: گزینه 2

مسئله حرارت از نوع ناهمگن با شرایط مرزی همگن می‌باشد و کافی است $u(x,t)$ را در معادله دیفرانسیل قرار دهیم.

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(t)\sin\frac{n\pi}{L}x\ ,\ u_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{L})^2A_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n'(t)+c^2(\frac{n\pi}{L})^2A(t))\sin(\frac{n\pi}{L}x)=q(x,t)$$

$$A_n'(t)+c^2(\frac{n\pi}{L})^2A(t)=\frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

$$B_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

مثال ۲۷: معادل دیفرانسیل جزئی را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}u_{xx}-u_{tt}=t,\ 0\le x\le 1,\ t\ge 0\\ u(0,t)=2t\ ,\ u(1,t)=t\\ u(x,0)=x, u_t(x,0)=2\end{cases}$$

با جانشینی $u(x,t)=v(x,t)+A(t)x+B(t)$ معادله به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases}v_{xx}-v_{tt}=t,(0\le x\le 1,\ t\ge 0)\\ v(0,t)=v(1,t)=0\\ v(x,0)=F_1(x)\ ,v_t(x,0)=F_2(x)\end{cases}$$

در اینصورت مقادیر A,B,F_1,F_2 کدامند؟ (مکانیک ـ 80)

1) $A=B=t, F_1=2, F_2=x$ 2) $F_1=F_2=x, A=-t, B=2t$

3) $F_1=x\ ,\ F_2=2x, A=1\ ,\ B=t$ 4) $F_1=-t\ ,\ F_2=x\ ,\ A=-t, -B=2t$

معادله موج از نوع ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن (وابسته به زمان) است.

$u(0,t)=2t \Rightarrow v(0,t)+B(t)=2t \Rightarrow B(t)=2t$

$u(1,t)=t \Rightarrow v(1,t)+A(t)+B(t)=t \Rightarrow A(t)=-t$

$u(x,t)=v(x,t)-tx+2t$

$u(x,0)=x \Rightarrow v(x,0)=x \Rightarrow F_1(x)=x$

$u_t(x,0)=2 \Rightarrow v_t(x,0)-x+2=2 \Rightarrow v_t(x,0)=x \Rightarrow F_2(x)=x$

مثال ۲۸: می‌دانیم که جواب مسئله $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,, & 0\le x\le L\,,\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t\ge 0 \\ u(x,0)=\phi(x) & ,\ 0\le x\le L \end{cases}$ **به ازای تابع $\phi(x)$ مفروض به شکل** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t}\sin\frac{k\pi}{L}x$ **می‌باشد که در آن ضرایب ثابت b_k ضرایب سینوس فوریه ϕ هستند در اینصورت جواب مسئله**

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=\sin(\frac{\pi}{L}x), & 0<x<L\,,\ t>0 \\ u(0,t)=b\ ,u(L,t)=a \\ u(x,0)=b+\frac{a-b}{L}x \end{cases}$$

در $x=\frac{L}{2}$ عبارتست از: (برق ـ 74)

1) $u(\frac{L}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}+(\frac{L}{\pi})^2(1-e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t})$

2) $u(\frac{L}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}$

3) $u(\frac{L}{2},t)=b+\frac{a-b}{2}+\sum e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t}\sin(\frac{k\pi}{L}x)$

4) $u(\frac{L}{2},t)=(\frac{L}{\pi})^2(1-e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t})$

پاسخ: گزینه 1

معادله موج دوم، ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن (مستقل از زمان) است بنابراین با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$

به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن برای $v(x,t)$ می‌رسیم

$$v_t - v_{xx} - w''(x) = \sin(\frac{\pi}{L}x) \Rightarrow w''(x) = -\sin(\frac{\pi}{L}x)$$

$$u(0,t) = b \Rightarrow w(0) = b \;,\; u(L,t) = a \Rightarrow w(L) = a$$

$$\begin{cases} w''(x) = -\sin(\frac{\pi}{L}x) \\ w(0) = b, w(L) = a \end{cases} \Rightarrow w(x) = (\frac{L}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{a-b}{L}x + b$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x) = b + \frac{a-b}{L}x \Rightarrow v(x,0) = -(\frac{L}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{L}x)$$

بنابراین مسئله مربوط به $v(x,t)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = -(\frac{L}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{L}x) \end{cases}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) = -(\frac{L}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{L}x)$$

$$b_1 = -(\frac{L}{\pi})^2 , b_n = 0 \;;\; n \geq 2$$

$$v(x,t) = -(\frac{L}{\pi})^2 e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{\pi}{L}x) + (\frac{L}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{a-b}{L}x + b$$

$$u(\frac{L}{2},t) = (\frac{L}{\pi})^2 (1 - e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t}) + \frac{a-b}{2} + b$$

12-5) معادلات موج و حرارت در ابعاد بالاتر

در فضای دو بعدی معادلات موج و گرما به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2\nabla^2 u \\ u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y) \text{ :شرایط اولیه} \\ \text{شرایط مرزی} \end{cases}$$

اگر ناحیه مربوط به مسائل فوق را یک مستطیلی $(0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a)$ در نظر بگیریم در اینصورت

مقادیر ویژه: $\lambda_{mn} = \pi^2(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})$

$F_{mn}(x,y) =$ (تابع ویژه بر حسب **x**) (تابع ویژه بر حسب **y**)

پاسخ معادله موج:

پاسخ معادله‌گرما:

$$u(x,y,t)=\sum_{m}\sum_{n}(A_{mn}e^{-c^2\lambda_{mn}t}F_{mn}(x,y)$$

مشابه مسائل گرما و موج یک بعدی، شرایط مرزی نوع توابع ویژه را بر حسب **x , y** تعیین می‌کنند.

اگر در مسئله موج دو بعدی شرایط مرزی دیریکله به صورت زیر باشند

$$u(0,y,t)=u(a,y,t)=u(x,0,t)=u(x,b,t)=0$$

در اینصورت

$$F_{mn}(x,y)=\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y),\lambda_{mn}=\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{mn}\cos(c\sqrt{\lambda_{mn}}t)+B_{mn}\sin(c\sqrt{\lambda_{mn}}t)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

$$u(x,y,0)=f(x,y)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)=f(x,y)$$

$$u_t(x,y,0)=g(x,y)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}cB_{mn}\sqrt{\lambda_{mn}}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)=g(x,y)$$

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dydx$$

$$B_{mn}=\frac{4}{abc\sqrt{\lambda_{mn}}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,dydx$$

13-5) معادله لاپلاس، معادله پواسون

معادله‌ی $\nabla^2u=0$ را معادله لاپلاس یا معادله پتانسیل می‌نامیم و معادله‌ی $\nabla^2u=h$ را معادله پواسون می‌گوییم.

در مختصات دکارتی، ∇^2u به صورت زیر می‌باشد:

فضای دو بعدی: $\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}$

فضای سه بعدی: $\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$

در مختصات قطبی (دو بعدی) و استوانه‌ای (سه بعدی)، ∇^2u به صورت زیر می‌باشد:

قطبی: $\nabla^2u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ یا $\nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

استوانه‌ای: $\nabla^2u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}$

$$\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{\rho^2} u_\phi + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\phi} u_{\theta\theta}$$

معادله لاپلاس در مختصات دکارتی دو بعدی:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ x_0 < x < x_1 \ , \ y_0 < y < y_1 \\ \text{شرایط مرزی مربوط به } x \\ \text{شرایط مرزی مربوط به } y \end{cases}$$

حالت اول: شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{x}$ همگن می‌باشد

در این حالت براساس نوع شرایط مرزی $\mathbf{x}$ (مشابه معادلات موج و گرما)، جواب معادلـه لاپـلاس بـه صـورت زیـر تعیـین می‌شود.

فاصله محدود برای x : $\lambda_n , F_n(x)$

$$u(x,y) = \sum_n (a_n \cosh(\sqrt{\lambda_n}\, y) + B_n \sinh(\sqrt{\lambda_n}\, y)) F_n(x)$$

اگر $\lambda_n = 0$ باشد، بخش وابسته به $\mathbf{y}$ بر حسب توابع $y,1$ نوشته می‌شود.

فاصله نامحدود یا نیمه‌محدود برای $\mathbf{x}$: $\lambda_\omega = \omega^2 \ , \ F_\omega(x)$

$$u(x,y) = \int_0^\infty (A_\omega \cosh(\omega y) + B_\omega \sinh(\omega y) F_\omega(x) d\omega$$

حالت دوم: شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{y}$ همگن باشد

مشابه حالت اول است فقط نقش y,x را عوض می‌کنیم.

در روابط فوق بخش وابسته به y را می‌توانیم به صورت $A_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y}$ یا $A_\omega e^{\omega y} + B_\omega e^{-\omega y}$ نیـز بیـان کنـیم بـه ویژه اگر فاصله مربوط به $\mathbf{y}$ نامحدود یا نیمه محدود باشد استفاده از توابع نمایی مناسب‌تر است.

نکته 12: اگر شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{x}$ همگن باشد آنگاه حالات زیر را در مورد معادله لاپلاس می‌توان در نظر گرفت:

حالت 1: اگر $0 \le x \le a \ , \ 0 \le y \le b$ و شرایط مرزی به صورت زیر باشد

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , u(x,0) = g_1(x), u(x,b) = g_2(x)$$

آنگاه

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2 \ , \ F_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{a} x) \ , \ n = 1,2,\dots$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh(\frac{n\pi}{a} y) + B_n \sinh(\frac{n\pi}{a} y)) \sin(\frac{n\pi}{a} x)$$

$$u_x(0,y)=u_x(a,y)=0$$

$$u(x,0)=g_1(x)\ ,\ u(x,b)=g_2(x)$$

آنگاه

$$\lambda_0=0\ ,\ F_0(x)=1\ ,\ y$$

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2\ ,\ F_n(x)=\cos(\frac{n\pi}{a}x), n=1,2,\ldots$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh(\frac{n\pi}{a}y)+B_n\sinh(\frac{n\pi}{a}y))\cos(\frac{n\pi}{a}x)+A_0+B_0y$$

حالت 3: اگر $0\le y\le b, 0\le x\le a$ و شرایط مرزی به صورت زیر باشد

$$u(0,y)=u_x(a,y)=0\ ,\ u(x,0)=g_1(x), u(x,b)=g_2(x)$$

آنگاه

$$\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2a})^2\ ,\ F_n(x)=\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x)\ , n=1,2,\ldots$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh(\sqrt{\lambda_n}y)+B_n\sinh(\sqrt{\lambda_n}y))\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

حالت 4: اگر $0\le y\le b, 0\le x\le a$ شرایط مرزی به صورت زیر باشد

$$u_x(0,y)=u(a,y)=0\ ,\ u(x,0)=g_1(x), u(x,b)=g_2(x)$$

آنگاه

$$\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2a})^2\ ,\ F_n(x)=\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x)\ , n=0,1,2,\ldots$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh(\sqrt{\lambda_n}y)+B_n\sinh(\sqrt{\lambda_n}y))\cos(\sqrt{\lambda_n}x)$$

حالت 5: اگر $0\le y\le b, 0\le x\le \infty$ شرایط مرزی به صورت زیر باشد

$$u(0,y)=0\ ,\ u(x,0)=g_1(x)\ ,\ u(x,b)=g_2(x)$$

آنگاه

$$\lambda_\omega=\omega^2\ ,\ F_\omega(x)=\sin(\omega x)\ ,\omega>0$$

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}(A_\omega\cosh(\omega y)+B_\omega\sinh(\omega y))\sin(\omega x)d\omega$$

$u_x(0,y)=0\ ,\ u(x,0)=g_1(x)\ ,\ u(x,b)=g_2(x)$

آنگاه اگر $g_1(x)$, $g_2(x)$ هر دو مقادیر ثابتی باشند، $u(x,y)=Ay+B$ و در غیر اینصورت

$\lambda_\omega=\omega^2\ ,\ F_\omega(x)=\cos(\omega x)\ ,\ \omega\geq 0$

$u(x,y)=\int_0^\infty (A_\omega\cosh(\omega y)+B_\omega\sinh(\omega y))\cos(\omega x)d\omega$

حالت 7: اگر $0<x<\infty\ ,\ 0<y<\infty$ و شرایط مرزی به صورت $u(0,y)=0\ ,u(x,0)=g(x)$ باشد آنگاه $u(x,y)=\int_0^\infty A(\omega)e^{-\omega y}\sin(\omega x)d\omega\ ,\ F_\omega(x)=\sin(\omega x),\lambda_\omega=\omega^2$ خواهد بود. اگر $u_x(0,y)=0$ باشد آنگاه $u(x,y)=\int_0^\infty A(\omega)e^{-\omega y}\cos(\omega x)d\omega$ می‌باشد.

حالت 8: اگر $-\infty<x<\infty\ ,\ 0<y<\infty$ و شرط مرزی $u(x,0)=g(x)$ برقرار باشد آنگاه

$\lambda_\omega=\omega^2\ ,F_\omega(x)=\cos\omega x,\sin\omega x$

$u(x,y)=\int_0^\infty (A\cos\omega x+B\sin\omega x)e^{-\omega y}d\omega$

به دلیلی کراندار بودن $u(x,\infty)$، پاسخ $u(x,y)$، شامل $e^{\omega y}$ نمی‌باشد.

در حالت فوق به جای توابع هیپربولیک از توابع نمایی نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

اگر شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{Y}$ همگن باشد حالات فوق را می‌توانیم تکرار کنیم فقط نقش y,x را عوض می‌کنیم.

معادله پواسون در یک ناحیه مستطیلی:

$$\begin{cases}\nabla^2u=h(x,y)\quad 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\\ u(0,y)=g_1(y)\ ,u(a,y)=g_2(y) & \text{شرایط مرزی مربوط به } x:\\ u(x,0)=h_1(x)\ ,u(x,b)=h_2(x) & \text{شرایط مرزی مربوط به } y:\end{cases}$$

با استفاده از تغییر متغیر $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$، دو معادله زیر را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\nabla^2v=h(x,y)\\ v(0,y)=v(a,y)=0\\ v(x,0)=h_1(x),\ v(x,b)=h_2(x)\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\nabla^2w=0\\ w(0,y)=g_1(y),w(a,y)=g_2(y)\\ w(x,0)=w(x,b)=0\end{cases}$$

پاسخ معادله‌ی مربوط به w به صورت زیر می‌باشد.

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}x)+B_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x))\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

برای حل معادله‌ی مربوط به $\mathbf{V}$، $v(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$v(x,y)=\sum_{n=1} G_n(y)\sin(\frac{\ }{a}x)$

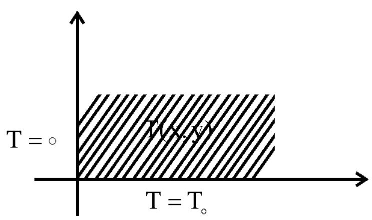
با قرار دادن رابطه‌ی فوق در معادله‌ی $\nabla^2 V = h(x,y)$، یک معادله دیفرانسیل برای $G_n(y)$ به دست می‌آید که با حل آن، $G_n(y)$ حاصل می‌شود.

نکته 13: پاسخ حالت پایدار مسائل موج و گرما در فضای دو بعدی، براساس یک معادله لاپلاس تعیین می‌شود.

$u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}), u_t = c^2(u_{xx}+u_{yy})$

در حالت پایدار $u_t = 0$ می‌باشد بنابراین معادله $u_{xx}+u_{yy}=0$ حاصل می‌شود.

مثال ۲۹: دمای حالت پایدار و کراندار در ربع اول و با شرط مرزی نشان داده شده، $T(x,y)$ برابر است با:



1) $T(x,y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$

2) $T(x,y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$

3) $T(x,y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2}$

4) $T(x,y) = T_0 - \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

پاسخ: گزینه 2

روش اول:

شرایط مرزی $T(0,y)=0, T(x,0)=T_0$ فقط در گزینه (2) صدق می‌کنند بنابراین گزینه (2) پاسخ تست می‌باشد.

روش دوم:

شرایط همگن به $\mathbf{X}$ مربوط است $(T(0,y)=0=T(\infty,y))$ بنابراین

$$T = \int_0^\infty (Ae^{\omega y}+Be^{-\omega y})\sin\omega x\, d\omega$$

با توجه به $T(x,\infty)=0$ باید $A=0$ باشد

$$T(x,y) = \int_0^\infty Be^{-\omega y}\sin\omega x d\omega$$

$$T(x,0) = T_0 \Rightarrow \int_0 B\sin\omega x d\omega = T_0 \Rightarrow B = \frac{\quad}{\pi}\frac{\quad}{\omega}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega}e^{-\omega y}d\omega = \frac{2T_0}{\pi}L(\frac{\sin\omega x}{\omega})\Big|_{s=y}$$

$$L(\sin\omega x) = \frac{x}{s^2+x^2}, L(\frac{\sin\omega x}{\omega}) = \int_s^\infty \frac{x}{s^2+x^2}ds = \tan^{-1}\frac{s}{x}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{x}$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{x})\Big|_{s=y} \Rightarrow T(x,y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

مثال ۳۰: تابع $u(x,y)$ **حل معادله لاپلاس** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ **در کانال چهارگوش به ابعاد** $a\times b$ **با شرایط مرزی** $u(0,y)=u(a,y)=0, u(x,0)=0, u(x,b)=v_0\sin(\frac{\pi x}{a})$ **برابر است با**

1) $V_0\dfrac{Sh(\frac{\pi}{a}y)}{Sh(\frac{\pi b}{a})}\sin(\frac{\pi x}{a})$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{V_0}{n\pi}\frac{Sh(\frac{n\pi}{a}y)}{Sh(\frac{n\pi}{a}b)}\sin(\frac{n\pi x}{a})$

3) $\displaystyle V_0\sum_{n=1}^\infty \frac{Sh\left[\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right]}{Sh\left[\frac{(2n-1)\pi b}{a}\right]}\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{a})$

4) $V_0\dfrac{Sh(\frac{\pi y}{2a})}{Sh(\frac{\pi b}{2a})}\sin(\frac{\pi x}{a})$

پاسخ: گزینه 1

چون $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $u(0,y)=u(a,y)=0$ بنابراین

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^\infty (A_n\cosh(\frac{n\pi}{a}y)+B_n\sinh(\frac{n\pi}{a}y))\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

$$u(x,0)=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)=0 \Rightarrow A_n=0$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^\infty B_n\sinh(\frac{n\pi}{a}y)\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

$$u(x,b) = v_0\sin(\frac{n\pi}{a}) \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty B_n\sinh(\frac{n\pi}{a}b)\sin(\frac{n\pi}{a}x) = v_0\sin(\frac{\pi}{a}x)$$

$$B_1 Sh(\frac{\pi b}{a}) = V_0 \Rightarrow B_1 = \frac{V_0}{Sh(\frac{\pi b}{a})}\ ,\ B_n = 0\ ;\ n\ge 0$$

$$u(x,y) = v_0\frac{Sh(\frac{\pi y}{a})}{Sh(\frac{\pi b}{a})}\sin(\frac{\pi}{a}x)$$

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\ , r_0\le r\le r_1\ ,\ \theta_0\le\theta\le\theta_1 \\ \text{شرایط مرزی مربوط به } r \\ \text{شرایط مرزی مربوط به } \theta \end{cases}$$

فرض می‌کنیم شرایط مرزی مربوط به θ، همگن باشند بنابراین چون تغییرات θ محدود است (حداکثر $-\pi\le\theta\le\pi$)، پاسخ به صورت سری خواهد بود.

با روش جداسازی متغیرها، فرم کلی پاسخ به صورت زیر می‌باشد

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\mathrm{Ln}r+\sum_{n=1}^{\infty}(A\cos(\sqrt{\lambda_n}\theta)+B\sin(\sqrt{\lambda_n}\theta))(cr^{\sqrt{\lambda_n}}+Dr^{-\sqrt{\lambda_n}})$$

حالت 1: ناحیه داخل یک دایره کامل با شعاع r_1 است $(-\pi\le\theta\le\pi, 0\le r\le r_1)$ و شرایط مرزی مربوط به θ به صورت $u(r,\pi)=u(r,-\pi)$ یا $u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)$ می‌باشد در اینصورت

$$\lambda_n=n^2\ ,n=1,2,\ldots,\lambda_0=0$$

شرط کراندار بودن پاسخ در $r=0$: $B_0=D=0$

$$u=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))r^n$$

ضرایب A_0, A_n, B_n با شرط مرزی مربوط به r $(u(r_1,\theta)=g(\theta))$، تعیین می‌شوند.

حالت 2: ناحیه خارج یک دایره کامل است $(-\pi\le\theta\le\pi, r_1\le r<\infty)$ و شرایط مرزی مربوط به θ مشابه حالت (1) می‌باشد در اینصورت

$$\lambda_n=n^2\ ,\ n=1,2,\ldots\ ,\lambda_0=0$$

شرط کراندار بودن پاسخ در $r=\infty$: $B_0=C=0$

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))r^{-n}$$

حالت 3: ناحیه بین دو دایره کامل است $(-\pi\le\theta\le\pi, r_1\le r\le r_2)$ و شرایط مرزی θ مشابه حالت قبل می‌باشد در اینصورت

$$\lambda_n=n^2\ ,\ n=1,2,\ldots\ ,\lambda_0=0$$

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\mathrm{Ln}r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))(C_nr^n+C_nr^{-n})$$

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{\theta_1})^2 \ , \ n = 1,2,\ldots \ , \lambda_0 = 0$$

$$A_0 = A = 0 \ \ , \ B_0 = D = 0$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n}\theta)$$

در این حالت شرایط مرزی θ را به صورت شرایط دیریکله در نظر گرفتیم که تابع ویژه $\sin(\sqrt{\lambda_n}\theta)$ حاصل شد. با عوض کردن شرایط مرزی θ (مشابه مسائل موج و گرما، تابع ویژه تغییر می‌کند.

به عنوان مثال با شرایط $u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\theta_1) = 0$، تابع ویژه $\cos(\sqrt{\lambda_n}\theta)$ حاصل می‌شود.

حالت 5: ناحیه خارج قطاع است $(0 \le \theta \le \theta_1, r_1 \le r \le \infty)$ و شرایط مرزی θ، $u(r,0) = u(r,\theta_1) = 0$ می‌باشد در اینصورت

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{\theta_1})^2 \ , \ n = 1,2,\ldots \ , \lambda_0 = 0$$

$$A_0 = A = 0, B_0 = C = 0$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n}\theta)$$

حالت 6: ناحیه به صورت $r_1 \le r \le r_2$ و $0 \le \theta \le \theta_1$ و شرایط مرزی θ، $u(r,0) = u(r,\theta_1) = 0$ در این صورت

$$A = 0, \ \lambda_n = (\frac{n\pi}{\theta_1})^2, n = 1,2,\ldots, \lambda_0 = 0, A_0 = B_0 = 0$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^{\sqrt{\lambda_n}} + D_n r^{-\sqrt{\lambda_n}}) \sin(\sqrt{\lambda_n}\theta)$$

نکته 14: اگر پاسخ معادله لاپلاس، مستقل از θ باشد در اینصورت $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ است و معادله‌ی لاپلاس به صورت زیر حل می‌شود.

معادله دیفرانسیل معمولی: $u_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$

$$\frac{u_{rr}}{u_r} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \ln u_r = -\ln r + \ln c_1 \Rightarrow u_r = \frac{c_1}{r}$$

جواب معادله لاپلاس: $u = c_1 Lnr + c_2$

متغیرها به صورت زیر است

$$u(\rho,\phi)=\sum_{\lambda}(A_1\cos\lambda\phi+B_1\sin\lambda\phi)(A_2\rho^{\lambda}+B_2\rho^{-\lambda})$$

با توجه به شکل مسئله کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟ (مکانیک ـ 75)

1) $B_2=0,\lambda=0,1,4,\ldots$ 2) $A_2=0,\lambda=0,1,2,\ldots$ 3) $B_2=0,\lambda=0,1,2,\ldots$ 4) $A_2=0,\lambda=0,2,4,\ldots$

پاسخ: گزینه 3

$$\lambda_n=n^2\ ,\ n=0,1,2,\ldots$$

براساس حالت (1) داریم:

$$\lambda=\sqrt{\lambda_n}=n\ ,\ n=0,1,2,\ldots$$

$$B_2=0$$

مثال ۳۲: هرگاه پتانسیل الکترواستاتیکی موجود در روی بدنه دو استوانه هم محور و به شعاع‌های قاعـده ۱ و e به ترتیب برابر ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشند و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صـورت $\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$ باشد، آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با:

1) $100r+220$ 2) $110(Lnr+1)$ 3) $110Lnr+220$ 4) $\frac{110}{e-1}(r+e-2)$

پاسخ: گزینه 2

با توجه به اینکه پتانسیل روی سطح هر استوانه ثابت است بنابرین بین دو استوانه u به θ وابستگی نـدارد و بنـابر نکتـه (14):

$$u=C_1Lnr+C_2$$

$$r=1\Rightarrow u=C_2=110$$

$$r=e\Rightarrow u=C_1+C_2=220\Rightarrow C_1=110$$

$$u=110(Lnr+1)$$

[illegible]

بـــه ترتیـــب برابـــر $0,1$اســـت، اگـــر مقـــدار پتانســـیل در نقـــاط درونـــی دایـــره برابـــر باشـــد بـــا:

$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),(0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ **آنگاه:**

1) $\begin{cases} A_n=0 \\ B_n=-\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$ به ازای هر $n>0$

2) $\begin{cases} A_n=1 \\ B_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \end{cases}$ به ازای هر $n>0$

3) $\begin{cases} A_n=0 \\ B_n=-\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2} \end{cases}$ به ازای هر $n>0$

4) $\begin{cases} A_n=1 \\ B_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \end{cases}$ به ازای هر $n>0$

پاسخ: گزینه ۱

$$u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=\begin{cases} 0 & , \quad 0<\theta<\pi \\ 1 & , \quad \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\theta)\cos n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos n\theta d\theta=0$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\theta)\sin n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin n\theta d\theta=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

معادله لاپلاس در مختصات کروی:

در مختصـــات کـــروی $(\rho,\theta,\phi)\ (\rho\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi)$ معادلـــه لاپـــلاس (پتانســـیل) بـــه صـــورت $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u_\rho)+\frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi u_\phi)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0$ و یا به صورت $u_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{\rho^2}u_\phi+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $\mathbf{u}$ مستقل از θ باشد و شرط مرزی به صورت $u(R,\theta,\phi)=f(\phi)$ صادق باشد در اینصورت $u_{\theta\theta}=0$ بـوده و معادله لاپلاس (پتانسیل) به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho^2 u_{\rho\rho}+2\rho u_\rho+u_{\phi\phi}+\cot\phi u_\phi=0$$

از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم با جایگذاری $u(\rho,\phi)=G(\rho)H(\phi)$ در معادله فوق، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$(1-w^2)\frac{d^2H}{dw^2}-2w\frac{dH}{dw}+n(n+1)H=0\ ,\ \ w=\cos\phi$$

معادله فوق، معادله لژاندر است و $P_n(\cos\phi)$ جواب معادله می‌باشد که P_n چند جمله‌ای لژاندر است.

$$\rho^2\frac{d^2G}{d\rho^2}+2\rho\frac{dG}{d\rho}-n(n+1)G=0$$

معادله فوق، معادله کوشی است و ρ^n , $\rho^{-(n+1)}$ در معادله صدق می‌کنند.

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-(n+1)})P_n(\cos\phi)$$

الف) اگر پاسخ معادله لاپلاس در داخل کره $(\rho\le R)$ موردنظر باشد آنگاه برای کراندار بودن پاسخ در $\rho=0$ باید $B_n=0$، بنابراین

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\rho^n p_n(\cos\phi),\ \rho\le R$$

اگر شرط مرزی $u(R,\phi)=f(\phi)$ برقرار باشد آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nR^nP_n(\cos\phi)=f(\phi)$$

$$A_nR^n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

ب) اگر پاسخ معادله لاپلاس در خارج کره $(\rho\ge R)$ مورد نظر باشد آنگاه برای کراندار بودن پاسخ در $\rho\to\infty$ باید $A_n=0$ ، بنابراین

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\rho^{-(n+1)}p_n(\cos\phi)\quad ,\qquad \rho\ge R$$

با شرط مرزی $u(R,\phi)=f(\phi)$ آنگاه:

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_nR^{-(n+1)}p_n(\cos\phi)=f(\phi)$$

$$B_n=\frac{2n+1}{2}R^{n+1}\int_0^{\pi}f(\phi)p_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi\ ,\ n=0,1,2,\ldots$$

در نکته (15) از ویژگی‌های چند جمله‌ای لژاندار استفاده کردیم که در نکته (16) به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

نکته 16:

الف) چند جمله‌ای‌های لژاندار در بازه $[-1,1]$ متعامدند بنابراین

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & ,\ n\ne m\\ \dfrac{2}{2n+1} & ,\ n=m\end{cases}$$

با جایگذاری $x=\cos\phi$ نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\phi)P_m(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & , \quad n=m \end{cases}$$

ب) برای محاسبه چند جمله‌ای‌های لژاندار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_0(x) = 1 \ , \ P_1(x) = x \ , P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) =$$

مثال ۳۴: می‌دانیم که پاسخ معادله لاپلاس (پتانسیل) در هر نقطه (r, θ, ϕ) داخل یک کره (در حالت تقارن نسبت به ϕ) در مختصات کروی به صورت زیر است

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

که $P_n(\cos\theta)$ توابع لژاندار هستند. اگر پتانسیل روی سطح کره یکه (کره به شعاع واحد) با عبارت $u(1,\theta) = 1+2\cos^2\frac{\theta}{2}$ بیان شود، $u(r,\theta)$ داخل کره عبارت است از

1) $2 + r\cos\theta$ 2) $1+2r\cos\theta$ 3) $1+\frac{1}{2}r^2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 4) $2+r^2\cos\theta$

پاسخ: گزینه 1

در این تست به جای ρ از $\mathbf{r}$ استفاده شده است و جای θ, ϕ نیز عوض شده است.

$$u(1,\theta) = 1+2\cos^2\frac{\theta}{2} = 2+\cos\theta$$

$$u(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = 2+\cos\theta$$

$$A_0P_0(\cos\theta) + A_1P_1(\cos\theta) = A_0 + A_1\cos\theta = 2+\cos\theta \Rightarrow A_0 = 2 \ , A_1 = 1$$
$$A_n = 0 \ ; \ n \geq 2$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) = A_0P_0(\cos\theta) + A_1 r P_1(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = 2 + r\cos\theta$$

[illegible]

ثابت بوده و θ زاویه شعاع در هر نقطه با محور Z می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در نقاط خارج کره به فاصــله r از مرکز عبارت است از

1) $v_0(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$ 2) $v_0(1-\frac{a^2}{r^2}\cos\theta)$ 3) $v_0(\frac{a}{r}-\cos\theta)$ 4) $v_0\frac{a}{r}(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$

پاسخ: گزینه 4

دری این تست نیز $r \to \rho$، $\theta \to \phi$ تبدیل شده‌اند براساس نکته (15) پتانسیل در خارج کره به صورت زیر می‌باشد

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta), u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=v_0(1-\cos\theta)$$

$$\frac{B_0}{a}+\frac{B_1}{a^2}\cos\theta=v_0-v_0\cos\theta \Rightarrow B_0=av_0, B_1=-a^2v_0, B_n=0, n\geq 2 \Rightarrow u(r,\theta)=B_0r^{-1}+B_1r^{-2}\cos\theta$$

$$u(r,\theta)=\frac{V_0a}{r}(1-\frac{a}{r}\cos\theta)$$

3 - 14) تبدیلات لاپلاس و فوریه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

تبدیل لاپلاس:

اگر $u(x,t)$ پاسخ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد آنگاه از تبدیل لاپلاس براساس خواص زیر، در حل معادله می‌توانیم استفاده کنیم.

$$U(x,s) = L(u(x,t))$$

$$L(u_x(x,t)) = U_x(x,s)\ ,\ L(u_{xx}(x,t)) = U_{xx}(x,s)$$

$$L(u_t(x,t)) = SU(x,s) - u(x,\mathbf{0})$$

$$L(u_{tt}(x,t)) = S^2U(x,s) - Su(x,\mathbf{0}) - u_t(x,\mathbf{0})$$

$$L(u(\mathbf{0},t)) = U(\mathbf{0},s)$$

تبدیل فوریه:

از تبدیل فوریه نسبت به **x** به صورت زیر در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، می‌توانیم استفاده کنیم.

$$U(\omega,t) = F(u(x,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

$$F(u_t(x,t)) = U_t(\omega,t), F(u_{tt}(x,t)) = U_{tt}(\omega,t)$$

$$F(u_x(x,t)) = i\omega U(\omega,t)$$

$$F(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

$$F(u(x,\mathbf{0})) = U(\omega,\mathbf{0})$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی:

$$F_S(u(x,t)) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} u(x,t)\sin\omega x dx$$

$$F_C(u(x,t)) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} u(x,t)\cos\omega x dx$$

$$F_S(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}(F_s(u(x,t)))$$

$$F_C(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}(F_C(u(x,t)))$$

$$F_S(u_{tt}(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F_s(u(x,t)))$$

$$F_C(u_{tt}(x,t)) = \frac{}{\partial t^2}(F_C(u(x,t)))$$

$$F_S(u_x(x,t)) = -\omega F_C(u(x,t))$$

$$F_C(u_x(x,t)) = \omega F_S(u(x,t)) - u(0,t)$$

$$F_S(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 F_S(u(x,t)) + \omega u(0,t)$$

$$F_C(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 F_C(u(x,t)) - u_x(0,t)$$

مثال ۳۶: اگر تبدیل فوریه تابع $f(x,y)$ نسبت به $\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف شود آنگاه تبدیل فوریه جواب کراندار مسئله مقدار مرزی زیر کدام است؟ (برق ـ ۸۰)

$$\bar{f}(\omega,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i\omega x}dx$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty \, , \, 0 < y < a)$$

$$u(x,0) = 0 \, , \; u(x,a) = \begin{cases} 1 & , \; |x| < b \\ 0 & , \; |x| > b \end{cases}$$

1) $\frac{\sin \omega b}{\omega}\frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$ 2) $\frac{2\sin \omega b}{\omega}\frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$ 3) $\frac{\sinh \omega b}{\omega}\frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$ 4) $\frac{2\sinh \omega b}{\omega}\frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a}$

پاسخ: گزینه 2

$$F(u_{xx}) = -\omega^2 U(\omega,y)$$

$$F(u_{yy}) = U_{yy}(\omega,y)$$

$$F(u(x,0)) = 0, F(u(x,a)) = U(\omega,a) = \int_{-b}^{b} e^{i\omega x}dx = \frac{2}{\omega}\sin(\omega b)$$

$$\begin{cases} U_{yy}(x,y) - \omega^2 U(\omega,y) = 0 \\ U(\omega,0) = 0, U(\omega,a) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega b) \end{cases}$$

$$r^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\omega \Rightarrow U(\omega,y) = A\cosh(\omega y) + B\sinh(\omega y)$$

$$U(\omega,0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow U(\omega,y) = B\sinh(\omega y)$$

$$U(\omega,a) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega b) \Rightarrow B = \frac{2}{\omega}\frac{\sin(\omega b)}{\sinh(\omega a)}$$

$$U(\omega,y) = \frac{2}{\omega}\frac{\sin(\omega b)}{\sinh(\omega a)}\sinh(\omega y)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \ , \ x > 0, t > 0$$

$$u(x,0) = A \ , \ \ x > 0$$

$$u(0,t) = \begin{cases} B \ , \ 0 < t < t_0 \\ 0 \ , \ \ t > t_0 \end{cases}$$

پاسخ:

$$U(x,s) = L(u(x,t))$$

$$L(u_t) = L(a^2 u_{xx})$$

$$L(u_t) = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) - A$$

$$L(u_{xx}) = U_{xx}(x,s)$$

$$sU(x,s) - A = a^2 U_{xx}(x,s)$$

$$U_{xx} - \frac{S}{a^2} U = -\frac{A}{a^2}$$

$$r^2 - \frac{s}{a^2} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{\sqrt{s}}{a}$$

$$U(x,s) = c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{a} x} + c_2 e^{\frac{-\sqrt{s}}{a} x} + \frac{A}{s}$$

با فرض کراندار بودن $u(x,t)$، $U(x,s)$ باید به ازای $s \to \infty$، کراندار باشد بنابراین

$$C_1 = 0 \Rightarrow U(x,s) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a} x} + \frac{A}{s}$$

$$u(0,t) = \begin{cases} B \ , \ 0 < t < t_0 \\ 0 \ , \ t > 0 \end{cases} \Rightarrow U(0,s) = \frac{B}{S} - \frac{B}{S} e^{-St_0}$$

$$U(0,S) = C_2 + \frac{A}{S} = \frac{B}{S} - \frac{B}{S} e^{-St_0} \Rightarrow C_2 = \frac{B-A}{S} - \frac{B}{S} e^{-St_0}$$

$$U(x,S) = \left[\frac{B-A}{S} - \frac{B}{S} e^{-St_0} \right] e^{-\frac{\sqrt{S}}{a} x} + \frac{A}{S}$$

۱ــ در حل مسـئله مقدار اولیه ــ مرزی (کرانـه‌ای) $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < L \ , t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le L \\ u_x(0,t) = 0, u(L,t) = 0 \ , \ t \ge 0 \end{cases}$ تـابع مفـروض و تکـه‌ای هموار $\phi(x)$، نسبت به کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟

1) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{2\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{2L}, \ldots$

2) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L}, \ldots, \cos\frac{(2K-1)\pi x}{2L}, \ldots$

3) $\sin\frac{\pi x}{2L}, \sin\frac{3\pi x}{2L}, \ldots, \sin\frac{(2K-1)\pi x}{2L}, \ldots$

4) $\cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{3\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots$

۲ــ به ازای چـه تـابع $\psi(x)$ تغییـر متغیـر $u(x,t) = w(x,t) + \psi(x)$، مسـئله $u_t = 4u_{xx} + \sin x$، بـا شـرایط $u(x,0) = f(x), u(0,t) = 1, u_x(0,t) = -1$ را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب w تبـدیل خواهـد کرد؟

1) $\psi(x) = \frac{1}{4}\sin x - \frac{5}{4}x + 1$

2) $\psi(x) = -\frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}x + 1$

3) $\psi(x) = -\frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{4}x + 1$

4) $\psi(x) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{5}{4}x + 1$

۳ــ اگـر پاسـخ معادلـه لاپـلاس در نـیم صـفحه بـالای محـور x بـا شـرایط مـرزی روی محـور x: $u(x,0) = \begin{cases} 0 \ , \ |x| > 1 \\ u_0 \ (\text{ثابت}), |x| < 1 \end{cases}$ را با $u(x,y)$ نمایش دهیم، آنگاه مقدار $u(0,1)$ کدام است؟

1) 0

2) $\frac{u_0}{2}$

3) $\frac{u_0}{4}$

4) $\frac{3u_0}{4}$

۴ــ با فرض $L\{u(x,t)\} = U(x,s)$، تبدیل لاپلاس معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = xt$ با شرط $u(x,0) = 0$ عبارت است از:

1) $\frac{\partial U}{\partial t} + SU = \frac{x}{s^2}$

2) $\frac{\partial U}{\partial t} - (s+1)U = \frac{x}{t^2}$

3) $\frac{\partial U}{\partial x} - (s+1)U = \frac{x}{s^2}$

4) $\frac{\partial U}{\partial x} + (s+1)U = \frac{x}{s^2}$

۵ـ معادله یک بعدی حرارت به صورت $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t>0$, $0<x<1$ را با شرایط مرزی و اولیـه زیـر در نظـر می‌گیریم:

$$u(0,t)=1\,,\ u(1,t)=0\ ,\ u(x,0)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

در این صورت پاسخ حالت پایدار $(t\to\infty)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $1-x$ 3) $x(1-x)$ 4) $\left|x-\frac{1}{2}\right|$

۶ـ جواب مسئله مقدار کرانه‌ای (یا مرزی)

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\quad ,1<r<e\quad ,0\le\theta\le 2\pi$$

با فرض $u(1,\theta)=c_1,u(e,\theta)=2c_1(c_1\in R)$ کدام است؟ (پتانسیل بین دو استوانه هم محور به شعاع‌هـای ۱ و e بـا شرایط کرانه‌ای داده شده است)

1) $u=c_1Lnr+c_1$ 2) $u=\frac{c_1}{e-1}+\frac{e-2}{e-1}$

3) $u=c_1(2-e)Lnr+c_1r^2$ 4) $u=\frac{(2-e)c_1}{e^2-e}r^2+\frac{(2-e^2)}{e-e^2}c_1$

۷ـ معادله دیفرانسیل حاکم بردمای میله $0<x<L$ به صورت $u_t=c^2u_{xx}$. شرایط کرانه‌ای (مـرزی) میلـه بـه صورت $u(0,t)=a\ ,u(L,t)=b$ بوده است. مدت طولانی از لحظه اولیه گذشته به طوری که دمای نقاط میلـه بـه حالت پایدار (پایا) در آمده است (بدنه میله با عایق حرارتی پوشش داده شده) دمای نقاط مختلـف میلـه در حال حاضر کدام است؟

1) $u=\frac{a+b}{2}$ 2) $u=(b-a)\frac{x}{L}+a$ 3) $u=x^2+(\frac{b-a}{L}-L)x+a$ 4) $u=\begin{cases}a\ ,\ 0<x<\frac{L}{2}\\ b\ ,\ \frac{L}{2},x<L\end{cases}$

۸ــــ u جـــواب معادلــه لاپـــلاس $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ درون حلقـــه $a\le r\le b$ و $0\le\theta\le 2\pi$ بـــا اطلاعـــات مرزی $u(b,\theta)=k_2\,,u(a,\theta)=k_1$

1) تابعی از θ است 2) تابعی از r است 3) تابعی از θ,r است 4) تابعی ثابت است

۹ـ جواب معادله لاپلاس $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ در قطاع $0\le r\le a,\alpha\le\theta\le\beta$ با شرایط مرزی $u(r,\alpha)=u(r,\beta)=0, u(a,\theta)=f(\theta)$ کدام است؟

1) $u=g(r)$ 2) $u=g(\theta)$ 3) $u=g(r,\theta)$ 4) $u=g(\theta)+h(r)$

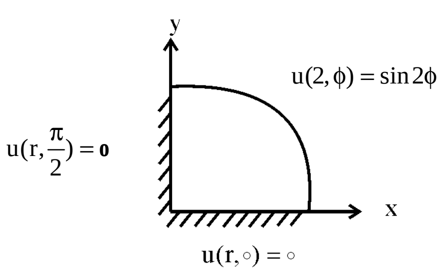
۱۰ـ توزیع مکانی ـ زمانی درجه حرارت $u(x,t)$ در میله‌ای به طول π که دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی، توزیع دمای اولیه $u(x,0)=f(x)=\sin x$ را از خود بجا گذاشته و در معادله $u_t-u_{xx}=0$ صدق می‌کند، کدام است؟

1) $\sin x\cos t$ 2) $\sin xe^{-\pi t}$ 3) $\sin xe^{-t}$ 4) $\sin xe^{-\frac{t}{\pi}}$

۱۱ـ پتانسیل الکتریکی در داخل ربع دایره‌ای با شرایط مرزی داده شده در معادله زیر صدق می‌کند (در مختصات قطبی ϕ, r):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

عبارت پتانسیل، $u(r,\phi)$ کدام است؟



1) $2r\sin2\phi$ 2) $\frac{r^2}{2}\sin2\phi$ 3) $\frac{r}{2}\sin\phi$ 4) $\frac{r^2}{4}\sin2\phi$

۱۲ـ فرض کنید $g(t)$، $t\ge0$، تابع مفروض و دارای تبدیل لاپلاس $G(s)$ و $\begin{cases}u_t-u_{xx}=g(t), t>0, x>0\\ u(x,0)=0\ ,\ u(0,t)=0\end{cases}$ اگر $U(x,s)$ تبدیل لاپلاس جواب کراندار مسئله باشد، آن‌گاه $U(x,s)$ برابر است با:

1) $G(s)(1-e^{-x\sqrt{s}})$ 2) $G(s)+A(s)e^{-x\sqrt{s}}$ که در آن $A(s)$ تابع دلخواه است

3) $\frac{1}{s}G(s)(1-e^{-x\sqrt{s}})$ 4) $\frac{1}{s}G(s)A(s)e^{-x\sqrt{s}}$

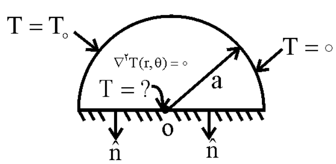
۱۳ـ مقدار $u(\frac{}{2},3)$ را در مسئله مقدار اولیه مرزی (کرانه‌ای) زیر حساب کنید

(g معلوم و با مشتق تکه‌ای پیوسته)

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<1, t>0 \\ u(x,0)=x\cos^3(\frac{\pi x}{2})\ ,\ 0\le x\le 1 \\ u_t(x,0)=g(x), 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

1) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ 2) صفر 3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

۱۴ـ پاسخ حالات پایدار درجه حرارت، $T(r,\theta)$، در معادله لاپلاس $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}=0$ صدق می‌کند. حل مسئله در ناحیه نیم‌دایره‌ی به شعاع a موردنظر است. شرایط مرزی روی قوس نیم دایره عبارتند از:

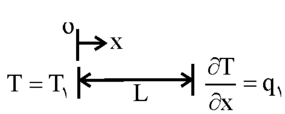


$$\begin{cases} T(a,\theta)=0\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ T(a,\theta)=T_0\ ,\ \frac{\pi}{4}<\theta<\pi \end{cases}$$

و روی قطر داریم $\frac{\partial T}{\partial n}=0$ درجه حرارت در مرکز نیم‌دایره، O عبارتست از:

1) 0 2) T_0 3) $\frac{T_0}{2}$ 4) $\frac{3T_0}{4}$

۱۵ـ می‌خواهیم مسئله انتقال حرارت را در مورد شکل مقابل با استفاده از تبدیل فوریه محدود تحلیل کنیم، کرنل تبدیل مزبور کدام است؟



1) $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ 2) $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ 3) $\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{2L})$ 4) $\cos(\frac{(2n+1)\pi x}{2L})$

۱۶ــ معادله انتقال حرارت $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در میله‌ای با شرایط مرزی (یا کرانه‌ای) $u(0,t)=T_0$, $u(L,t)=2T_0$ (ثابت) مفروض است. توزیع دمای میله در حالت پایدار($t\to\infty$ زمان)، با شرط اولیه $u(x,0)=T_0$، کدام است؟

1) 0
2) $\frac{3}{2}T_0$
3) $T_0(1+\frac{x}{L})$
4) $x^2+(\frac{T_0}{L}-1)x+T_0$

۱۷ــ مسئله مقدار مرزی دیریشله در ناحیه بین دو دایره هم مرکز، به شعاع‌های **a** , **b** $(b>a)$ و با شرایط مرزی ثابت

$$\begin{cases}\nabla^2T=T_{rr}+\frac{1}{r}T_r+\frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}=0 \ , a<r<b\\ T(a,\theta)=A, T(b,\theta)=B \quad (\text{ثابت‌اند } \mathbf{B} \text{ و } \mathbf{A})\end{cases}$$

داده شده است. جواب مسئله، $T(r,\theta)$، کدام است؟

1) $\frac{ab(A-B)}{b-a}\frac{1}{r}+\frac{bB-aA}{b-a}$
2) $\frac{A-B}{a-b}r+\frac{Ba-Ab}{a-b}$
3) $\frac{A-B}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{BLna-ALnb}{Lna-Lnb}$
4) $\begin{cases}A+(r-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta), a\le r\le\frac{a+b}{2}\\ B+(b-r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\theta), \frac{a+b}{2}\le r\le b\end{cases}$

۱۸ــ چه تغییر متغیری مسئله معادله حرارت زیر را به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌کند؟

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+6x\\ u(0,t)=1\\ u(1,t)=1\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

1) $u(x,t)=w(x,t)-x^3+x+1$
2) $u(x,t)=w(x,t)-x^3+2x-1$
3) $w(x,t)=u(x,t)-x^3+2x+1$
4) $w(x,t)=u(x,t)-x^3+x+1$

۱۹ــ معادله لاپلاس $\nabla^2u(x,y)=0$ را در ربع اول $(y\ge 0, x\ge 0)$ با شرایط مرزی زیر در نظر می‌گیریم:

$u(0,y)=0$, $u(x,0)=f(x)$

شکل کلی پاسخ معادله $u(x,y)$ عبارت است از: ($B(K),A(k)$ توابعی از K هستند)

1) $\int_0^\infty A(K)e^{-ky}\cos(kx)dk$
2) $\int_0^\infty A(K)e^{-ky}\sin(ky)dk$
3) $\int_0^\infty A(K)e^{-ky}\sin(kx)dk$
4) $\int_0^\infty (A(K)\cos kx+B(k)\sin kx)e^{-ky}dk$

۲۰ـ اگر معادله دیفرانسیل $u_{tt}-u_{xx}=\delta(t-\frac{x}{a})$ به همراه شرایط اولیه $u(x,0)=0$ و $u_t(x,0)=0$ داده شده باشد،

آنگاه تبدیل لاپلاس جواب (یا جواب‌ها) در حالت $a\neq 1$ کدام است؟

1) $U(x,s)=c_1e^{-sx}+c_2e^{sx}+\frac{1}{s^2(1-a^2)}e^{-\frac{x}{a}s}$

2) $U(x,s)=c_1e^{-sx}+c_2e^{sx}+\frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}e^{-\frac{x}{a}s}$

3) $U(x,s)=c_1e^{-sx}+c_2e^{sx}+\frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}e^{\frac{x}{a}s}$

4) $U(x,s)=c_1e^{-sx}+c_2e^{sx}+\frac{1}{s^2(a^2-1)}e^{-\frac{x}{a}s}$

۲۱ـ اگر $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, 0<x<L, t>0\\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), 0<x<L\\ u(0,t)=0=u(L,t)\end{cases}$ که در آن تابع f در بازه‌ی $0<x<L$ (باز هیچ جا صفر نمی‌شود، آنگاه مقدار $u(x,L)$ کدام است؟

1) $f(x+L)$ 2) $2f(x+L)$ 3) $2f(x-L)$ 4) $\int_{x-L}^{x+L}g(s)\,ds$

۲۲ـ اگر $u(x,y)$ مسئله مقدار کرانه‌ای (یا مرزی) زیر در داخل یک مستطیل باشد:

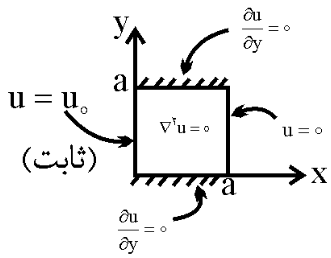
$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, 0<x<\pi \quad ,0<y<1\\ u_x(0,y)=0, u(\pi,y)=0\ ,\ 0\le y\le 1\\ u(x,0)=0\ ,\ u(x,1)=\cos\frac{x}{2}\ ,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

آنگاه مقدار $u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$ برابر است با:

1) 0 2) $\frac{1}{\sqrt{2}\cosh\frac{1}{4}}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{2}\cosh\frac{1}{4}}$ 4) $\frac{1}{2\cosh\frac{1}{4}}$

[illegible]

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0\ ,0 < x < a\,,0 < y < a\\ u_y(x,0) = 0 = u_y(x,a)\\ u(0,y) = u_0 \qquad ,u(a,y) = 0\end{cases}$$ و (u_0 ثابت)



1) $u_0(1-\frac{x}{a})$ 2) $u_0 \frac{\sin(a-x)}{\sin a}$

3) $u_0(1-\frac{x}{a})\cos\frac{\pi y}{a}$ 4) $\frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=1,3,\ldots}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}(a-x)}{n}\cos\frac{\pi}{a}y$

۲۴ـ فرض کنید $\begin{cases}u_{xx}+u_{yy} = 0, 0 < x < a \quad ,0 < y < b\\ u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0\\ u(x,0) = f(x)\\ u(x,b) = g(x)\end{cases}$ **جواب این مسئله کدام است؟**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n(y)\cos\frac{n\pi x}{a}$ 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n(x)\cos\frac{n\pi y}{b}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b}$

۲۵ـ ابتدای یک میله به طول L (ثابت) در دمای $a > 0$ نگهداری، و بدنه میله و انتهای آن را با عایق حرارتی پوشانده‌ایم. اگر مدت طولانی از لحظه اولیه سپری شده باشد، آنگاه دمای نقاط میله در حالت پایدار برابر است با (معادله دیفرانسیل حرارت یک بعدی را $u_t - u_{xx} = 0$ بگیرید)

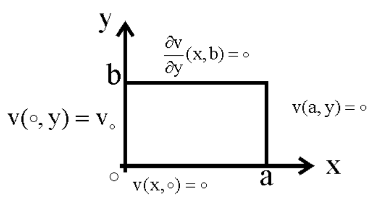
1) صفر 2) a 3) $a+x$ 4) $a-x$

۲۶ـ در یک ناحیه نیمه محدود ($x > 0$) معادله حرارت را به صورت $\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0\ ,\ t > 0$ در نظر می‌گیریم. حالت اولیه عبارت است از $u(x,0) = f(x)$ و ناحیه در $x = 0$ عایق شده است. پاسخ عمومی معادله، $u(x,t)$ به کدام صورت است؟

1) $\int_0^{\infty} D(P)e^{-P^2C^2t}\sin px\,dp$ 2) $\int_0^{\infty} D(P)e^{-P^2C^2t}\cos px\,dp$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-P^2C^2t}[A(p)\cos px + B(p)\sin px]dp$ 4) $\int_0^{\infty} e^{-P^2C^2t}[A(p)\cos px + B(p)\sin px]dp$

۲۷ـ اگر بخواهیم توزیع پتانسیل را در داخل شکل زیر به دست آوریم، کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند مناسب باشد؟



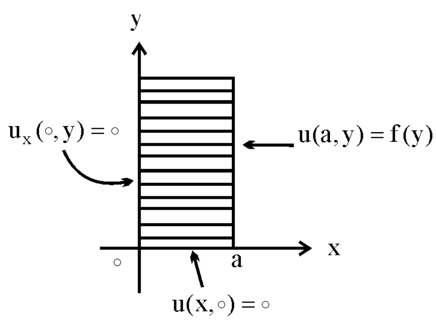
1) $\sum A_n \cosh k_n x \sin k_n y$

2) $\sum A_n \cosh k_n x \cos k_n y$

3) $\sum (A_n \cosh k_n x + B_n \sinh k_n x) \cos k_n y$

4) $\sum (A_n \cosh k_n x + B_n \sinh k_n x) \sin k_n y$

۲۸ـ جواب معادله لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0 \ , \ 0<x<a \ , y>0$ با شرایط مرزی داده شده در شکل زیر به چه صورت است؟



1) $\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda x \cosh\lambda y d\lambda$

2) $\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda y \cosh\lambda x d\lambda$

3) $\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda y \cosh\lambda x d\lambda$

4) $\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda y \sinh\lambda x d\lambda$

۲۹ـ معادله حرارت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \ , \ 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=1 \ , \ u(1,t)=2 \ , u(x,0)=1+x^2 \end{cases}$$

پاسخ حالت پایدار برای u (وقتی $t\to\infty$) در نقطه $x=\frac{2}{3}$ عبارت است از:

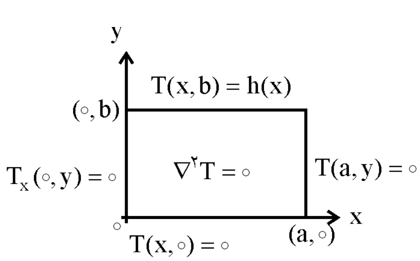
1) $\frac{3}{2}$

2) $\frac{4}{3}$

3) $\frac{5}{3}$

4) $\frac{13}{9}$

۳۰ـ پایه متعامدی که در مسئله مقدار کرانه‌ای (یا مرزی) زیر برای بسط تابع تکه‌ای همـوار داده شـده **h** در روش جداسازی متغیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد، کدام است؟



1) $\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\right\}_{k\in N}$

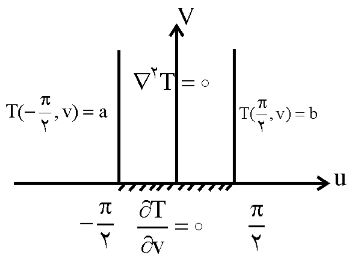
2) $\left\{\sin\frac{k\pi x}{a}\right\}_{k\in N}$

3) $\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2a}\right\}_{k\in N}$

4) $N_o=\{0,1,2,3,\ldots\} \ , \left\{\cos\frac{k\pi x}{a}\right\}_{k\in N_0}$

[illegible]

شده را در نقطه $(\frac{\pi}{4}, v)$ بیابید



1) $\frac{5}{4}b - \frac{a}{4}$ 2) $\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$ 3) $(\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a)e^{-v}$ 4) $be^{-\frac{3}{4}v} + ae^{-\frac{1}{4}v}$

۳۲ــ برای مسئله مقدار اولیه ــ کرانه‌ای زیر، مقدار $u(\frac{L}{3}, \frac{11L}{4})$ را پیدا کنید

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \ , \ 0 \le x \le L \ , \ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), t > 0 \end{cases}$$

1) $-\frac{23L^2}{144}$ 2) $-\frac{23L^2}{72}$ 3) $\frac{23L^2}{72}$ 4) $\frac{23L^2}{144}$

۳۳ــ مسئله مقدار مرزی زیر مفروض است. مقدار $u(\frac{3}{2}, 1)$ چقدر است؟

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

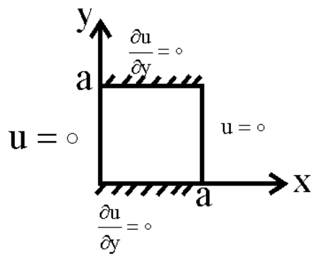
$$u(0,t) = 0$$

$$u(3,t) = 0$$

$$u(x,0) = 10\sin(\pi x) - 6\sin(2\pi x)$$

1) -10 2) $-10e^{-\pi^2}$ 3) $-16e^{-\pi^2}$ 4) $-10e^{-4\pi^2}$

۳۴ـ به دست اوردن پاسخ معادله حرارت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0$ روی ناحیه مربعی شکل به ضـلع a مـوردنظر است. حالت اولیه $u(x,y,0)=f(x,y)$ فرض می‌شود. شـرایط مـرزی عبـارت است از: (I) درجه حرارت روی دو ضلع $x=0,a$ صفر است. (II) دو ضلع دیگر، $y=0,a$ عایق شده است. شـکل کلـی پاسـخ معادلـه حرارت روی این ناحیه عبارت است از:



1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}t}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

2) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

3) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}y$

4) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}y$

۳۵ـ کدام یک از گزینه‌ی زیر می‌تواند پاسخ معادلـه دیفرانسـیل بـا مشـتقات جزئـی (مقـدار ثابـت $=\alpha$) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, 0<x<\pi\ ,\ t>0$ با شرایط کرانه‌ای، $y(x,0)=\sin(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\cos(x)$ باشد:

1) $\sin(x)\cos(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin(\alpha t)$

2) $\sin(x)\cos(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\sin(x)\sin(\alpha t)$

3) $\sin(x)\sin(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin(\alpha t)$

4) $\frac{1}{\alpha}\cos(x)\sin(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos(x)\cos(\alpha t)$

۳۶ـ اگر $S>0, L\{\frac{k}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{-k^2}{4t}}\}=e^{-k\sqrt{s}}$ (تبدیل لاپلاس) (k ثابت مثبتی است)، آنگاه جواب کراندار مسـئله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای (مرزی) زیر کدام است؟ (μ تابعی تکه‌ای پیوسته و کراندار مفروض)

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0\ ,\forall x>0\ ,\ \forall t>0 \\ u(x,0)=0, u(0,t)=\mu(t) \end{cases}$$

1) $u(x,t)=\int_0^{\infty}\mu(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau$

2) $u(x,t)=\int_0^{t}\mu(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau$

3) $u(x,t)=\int_0^{t}\mu(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}d\tau$

4) $u(x,t)=\int_0^{\infty}\mu(\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau$

[illegible]

دست می‌آید؟

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u \ , \ t > 0 \ , 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \\ u(x,0) = 0 \ , 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

1) $\sin(k\pi t)$ 2) $\sin\left[t\sqrt{(k\pi)^2 - 1}\right]$ 3) $\sin\left[t(k^2\pi^2 - 1)\right]$ 4) $\sinh\left[t\sqrt{(k\pi)^2 - 1}\right]$

۳۸ـ معادله غیرهمگن حرارت در امتداد میله‌ای به طول L به شکل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 1$ $0 < x < L \ , \ t > 0$**، است شرایط مرزی عبارتند از:** $u(x,0) = f(x), u(0,t) = u(L,t) = 0$ **در این صورت پاسخ** $u(\frac{L}{3},t)$ **در حالت پایدار** $(t \to \infty)$**برابر است با:**

1) $\frac{2L^2}{3}$ 2) $\frac{L^2}{9}$ 3) $-\frac{L^2}{9}$ 4) $-\frac{L^2}{3}$

۳۹ـ معادله دیفرانسیل زیر با شرایط داده شده مفروض است

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ , \ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 3, u(\pi,t) = 1 \\ u(x,0) = 1, u_t(x,0) = x \end{cases}$$

با فرض $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$**، عبارت** $v(x)$ **کدام گزینه باشد تا معادله حاکم بر** $w(x,t)$ **از نوع همگن و با شرایط مرزی صفر باشد؟**

1) $-4\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}x + 3$ 2) $-4\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}x + 2$ 3) $-\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}x + 3$ 4) $-4\sin\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}x + 4$

۴۰ـ معادله لاپلاس با یک درجه تقارن در مختصات کروی $(0 \le \theta \le \pi, r \ge 0 \ , \ 0 \le \phi \le 2\pi)$ **برای** $u(r,\theta)$ **جوابی به صورت زیر دارد:** $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$ **که در آن** $P_n(x)$ **چند جمله‌ای های لژاندر می‌باشند.**

اگر شرایط مرزی به صوت $\begin{cases} u(a,\theta) = 0 \\ u(r,\theta) \ ; \ r\cos\theta, r \to \infty \end{cases}$ **باشد،** $u(r,\theta)$ **برای خارج کره کدام گزینه است؟**

1) $(r^{-1} - a^3 r^2)P_1(\cos\theta)$ 2) $(1 - a^{-1}r^{-1})P_0(\cos\theta)$ 3) $(r - a^2 r^{-1})P_1(\cos\theta)$ 4) $(r - a^3 r^{-2})P_1(\cos\theta)$

۴۱ـ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ -1<x<1\ ,\ t>0$$

$$u(-1,t)=u(1,t),t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$$

$$u(x,0)=x\,,-1<x<1$$

1) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-n^2t}\sin nx$

2) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-n^2t}\cos nx$

3) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x$

4) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x$

۴۲ـ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0$$

$$u(x,0)=\cos 3x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\ ,0<x<\pi$$

1) $u(x,t)=\cos 3t\sin 3x$

2) $u(x,t)=\cos 3t\cos 3x$

3) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos nt\sin nx\ ,\ n=0,1,2,\ldots\ A_n\neq 0$

4) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos nt\cos nx\ ,\ n=0,1,2,\ldots\ A_n\neq 0$

۴۳ـ معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0, 0<x<\pi, \lambda>0$ با شرایط مرزی $\phi'(0)=0$ و $\phi'(\pi)+\phi(\pi)=0$ مفروض است.

مقادیر ویژه و توابع ویژه آن عبارت است از:

1) مقادیر ویژه جواب های معادله $tg(\sqrt{\lambda}\pi)=-\sqrt{\lambda}$ هستند و $\phi_\lambda(x)=\cos\sqrt{\lambda}x$

2) مقادیر ویژه جواب های معادله $\cot g(\sqrt{\lambda}\pi)=\sqrt{\lambda}$ هستند و $\phi_\lambda(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$

3) مقادیر ویژه جواب های معادله $tg(\sqrt{\lambda}\pi)=-\sqrt{\lambda}$ هستند و $\phi_\lambda(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$

4) مقادیر ویژه جواب های معادله $\cot g(\sqrt{\lambda}\pi)=\sqrt{\lambda}$ هستند و $\phi_\lambda(x)=\cos\sqrt{\lambda}x$

۴۴ـ جواب مسئله مقدار مرزی زیر کدام است؟

$u_t = u_{xx}\,, t > 0,\ 0 < x < 2$

$u_x(0,t) = 0\ ,\ \ u_x(2,t) = 0$

$u(x,0) = 4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x$

1) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x - e^{-4\pi^2 t}\cos 2\pi x + \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$

2) $4e^{-\pi^2 t}\cos\pi x - 2e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x$

3) $e^{-\pi^2 t}(4\cos\pi x - 2\cos 3\pi x)$

4) $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x$

۴۵ـ با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + t + (\sin t - t)x$ **مسئله**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = h\ \ ,\ 0 < x < 1\,, t > 0 \\ u(0,t) = t\ \ ,\ u(1,t) = \sin t \\ u(x,0) = x(1-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

و (**h** ثابت)

به کدام مسئله تبدیل می‌شود؟

1) $\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h - x\sin t\ ,\ 0 < x < 1\,, t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x(1-x) \\ v_t(x,0) = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t\ ,\ 0 < x < 1\,, t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x(1-x) \\ v_t(x,0) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h - x\sin t\ ,\ 0 < x < 1\,, t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x(1-x) \\ v_t(x,0) = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t\ ,\ 0 < x < 1\,, t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = x(1-x) \\ v_t(x,0) = -1 \end{cases}$

۴۶ـ دمای مانا (پایا، حالت پایدار) در ربع اول صفحه xy **با شرایط کرانـه‌ای (مـرزی)** $T(x,0) = T_0$ **و** $T(0,y) = 0$ **را**

با $T(x,y)$ **نشان می‌دهیم، صورت کراندار آن برابر است با:**

1) $T_0 - \frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{2xy}{x^2 - y^2}$

2) $T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{2xy}{x^2 - y^2}$

3) $T_0 - \frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{x}$

4) $T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{x}$

۴۷ـ جواب مسئله مقدار اولیه کرانه‌ای (یا مرزی) $\begin{cases} u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=2\sin x\ ,\ 0\le x\le \pi \\ u(0,t)=0=u(\pi,t), t\ge 0 \end{cases}$ کدام است؟

1) $u(x,t)=2\sin x\sin t$

2) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\sin(nx)\sin(nt)$

3) $u(x,t)=2\sin x\cos t$

4) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(nx)\sin(nt)$

۴۸ـ به ازای چه تابع $\psi(x)$ تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$ معادله حاصل بر حسب w در مورد معادله گرمای $\begin{cases} u_t=4u_{xx}+x \\ u(0,t)=1, u_x(\pi,t)=2 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ را همگن می‌کند؟

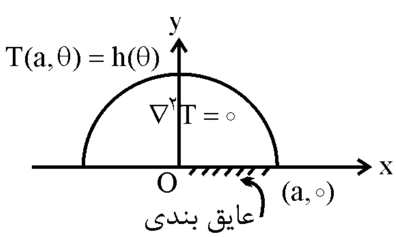
1) $\psi(x)=6x^3+(\pi^2+2)x+1$

2) $\psi(x)=\frac{x^3}{6}+\pi^2 x+1$

3) $\psi(x)=-\frac{x^3}{6}+(\pi^2+2)x+1$

4) $\psi(x)=-\frac{1}{24}x^3+(2+\frac{\pi^2}{8})x+1$

۴۹ـ در مسئله مقدار مرزی زیر در داخل یک نیم‌دایره به شعاع a حل معادله لاپلاس موردنظر است. بر پیرامون نیم‌دایره، $h(\theta)$ تکه‌ای هموار فرض می‌شود. بر روی نیمه راست قطر عایق‌بندی داریم و بر روی نیمه چپ آن $T(r,\pi)=0$، پایه (مبنای) متعامد بسط فوریه تابع $h(\theta)$ در این مسئله کدام است؟



1) $\{\cos k\theta\}_{k=0}^{\infty}$

2) $\left\{\cos(\frac{2k-1}{2})\theta\right\} k\in z$

3) $\left\{\cos(k-\frac{1}{2})\theta\right\} k\in N$

4) $\left\{\sin(k-\frac{1}{2})\theta\right\} k\in N$

۵۰ـ معادله گرما به صورت $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0<x<\pi\ ,\ t>0$ با شرایط $u_x(0,t)=0\ ,\ u_x(\pi,t)=0\ ,\ u(x,0)=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. شکل کلی جواب $u(x,t)$ عبارت است از (E_n, A_0 ضرایبی ثابت‌اند)

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n e^{-a^2n^2t}\sin nx$

2) $\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n e^{-a^2n^2t}\cos nx$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n e^{-a^2n^2t}\sin n\pi x$

4) $\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n e^{-a^2n^2t}\cos n\pi x$

[illegible]

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)$$

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,t)=\lim_{x\to \pi^-} u(x,t)=0\ ,\ t>0$$

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t)=f(x)\ \ ,\ 0<x<\pi$$

کدامند؟

1) $\sin\sqrt{n}x,\lambda=n$ ، $n=1,2,\ldots$

2) $\sin(nx),\lambda=n^2$ ، $n=1,2,\ldots$

3) $\sin(\frac{x}{n}),\lambda=\frac{1}{n}$ ، $n=1,2,\ldots$

4) $\sin(nx),\lambda=\sqrt{n}$ ، $n=1,2,\ldots$

۵۲ـ در حل مسئله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای (یا مرزی) زیر، تابع مفروض و تکه‌ای هموار $\phi(x)$ نسبت بـه کـدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, 0<x<L, t>0 \\ u(x,0)=\phi(x)\ , 0\le x\le L \\ u(L,t)=0, u_x(0,t)=0\ ,\ t\ge 0 \end{cases}$$

1) $\cos\frac{k\pi x}{2L},\ \forall k\in N$

2) $\cos\frac{\pi x}{2L},\cos\frac{3\pi x}{2L},\cos\frac{5\pi x}{2L},\ldots\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}$

3) $\sin\frac{\pi x}{2L},\sin\frac{3\pi x}{2L},\sin\frac{5\pi x}{2L},\ldots\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2L}$

4) $\cos\frac{\pi x}{L},\cos\frac{2\pi x}{L},\cos\frac{3\pi x}{L},\ldots\cos\frac{n\pi x}{L},\ldots$

۵۳ـ جواب مسئله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای موج یک بعدی

$$u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<L\ ,t>0$$

$$u(x,0)=\left|x-\frac{L}{2}\right|\ ,\ 0\le x\le L\ ,\ u_t(x,0)=x(L-x)$$

$$u(0,t)=0, u(L,t)=0\ ,\ t\ge 0$$

در نقطه $x=\frac{L}{2}$ و در لحظه $t=\frac{5L}{2}$ برابر است با

1) $\frac{L}{2}(1+\frac{L^2}{6})$

2) $L(1-\frac{L^2}{6})$

3) $L(1+\frac{L^2}{6})$

4) $\frac{L}{2}(1-\frac{L^2}{6})$

۵۴ـ به ازای کدام تابع $\psi(x)$، تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + \psi(x)$، مسئله زیر را به مسئله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب w تبدیل خواهد کرد؟

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \sin x \\ u(0,t) = 1, u_x(0,t) = -1 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

1) $\psi(x) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{5}{4}x + 1$

2) $\psi(x) = -\frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{4}x + 1$

3) $\psi(x) = -\frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}x + 1$

4) $\psi(x) = \frac{1}{4}\sin x - \frac{5}{4}x + 1$

۵۵ـ در مسئله مقدار اولیه ـ مرزی زیر، مقدار $u_t(x,t)$ در $x = \frac{1}{3}$ و $t = 5$ چقدر است؟

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x \ , \ 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0$$

1) 1

2) 0

3) $\frac{1}{2}$

4) $-\frac{1}{2}$

۵۶ـ اگر جواب معادله $\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < L \ , t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t \ge 0 \end{cases}$ **به صورت** $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$ **باشد**

مقدار $u(x,t)$ در حالتی که $L = \pi, f(x) = \sin^3 x$ باشد، کدام است؟

1) $\frac{3}{4}e^{-c^2 t} + \frac{1}{4}e^{-9c^2 t}\sin 3x$

2) $\frac{1}{4}e^{-c^2 t}\sin x + \frac{1}{4}e^{-9c^2 t}\sin 3x$

3) $\frac{1}{4}e^{-c^2 t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9c^2 t}\sin 3x$

4) $\frac{3}{4}e^{-c^2 t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9c^2 t}\sin 3x$

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(-\pi,t) = u(\pi,t)\ ;\ t \geq 0$$
$$u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)\ ;\ t \geq 0$$

به کدام صورت است؟

۱) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$

۲) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$

۳) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos nx$

۴) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$

۵۸ـ پاسخ معادله لاپلاس، $\nabla^2 u(x,y) = 0$ در نیم صفحه بالای محور $\mathbf{X}$ با شرط مرزی

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

کدام پاسخ می‌تواند باشد؟

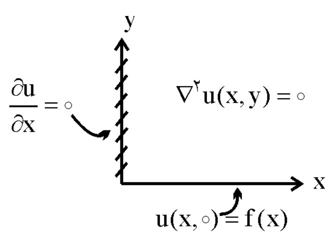
۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos k}{k} e^{-ky} \sin kx dk$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cosh kx\, dk$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cos kx\, dk$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sinh k}{k} e^{-ky} \cos kx\, dk$

۵۹ـ پاسخ معادله لاپلاس، $u(x,y)$ در ربع اول با شرایط مرزی نشان داده شده مـوردنظر اسـت. شـکل کلـی پاسخ عبارت است از:



۱) $\int_0^{\infty} E(P) e^{-py} \cos px\, dp$

۲) $\int_0^{\infty} E(P) e^{-px} \cos py\, dp$

۳) $\int_0^{\infty} E(P) e^{-py} \sin px\, dp$

۴) $\int_0^{\infty} [A(P) \cos px + B(P) \sin px] e^{-Py} dp$

1) گزینه 2

براساس نکته (9) حالت 4:

توابع ویژه (پایه متعامد): $F_n(x) = \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)\ ,\ n = 1,2,3,\ldots$

2) گزینه 1

$$u = w + \psi(x) \Rightarrow u_t = w_t\ , u_{xx} = w_{xx} + \psi''(x)$$

$$w_t = 4w_{xx} + 4\psi''(x) + \sin x \Rightarrow \psi''(x) = -\frac{1}{4}\sin x$$

$$\psi(x) = \frac{1}{4}\sin x + Ax + B$$

$$u(0,t) = 1 \Rightarrow \psi(0) = 1\ , u_x(0,t) = -1 \Rightarrow \psi'(0) = -1$$

$$\psi(0) = 1 \Rightarrow \psi'(0) = -1 \Rightarrow B = 1, A = -\frac{5}{4} \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{4}\sin x - \frac{5}{4}x + 1$$

3) گزینه 2

براساس نکته (12) حالت (8):

$$u(x,y) = \int_0^\infty (A_\omega e^{\omega y} + B_\omega e^{-\omega y})(C_\omega \cos(\omega x) + D_\omega \sin(\omega x))d\omega$$

برای اینکه به ازای $y \to \infty$، $u(x,y)$) کراندار باشد باید $A_\omega = 0$ بنابراین

$$u(x,y) = \int_0^\infty e^{-\omega y}(C'_\omega \cos(\omega x) + D'_\omega \sin(\omega x))d\omega$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty (c'_\omega \cos(\omega x) + D'_\omega \sin(\omega x))d\omega = \begin{cases} 0\ ,\ |x| > 1 \\ u_0\ ,\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$C'_\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u_0 \cos(\omega x)dx == \frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}, D'_\omega = 0$$

$$u(x,y) = \int_0^\infty \frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)e^{-\omega y}d\omega$$

$$u(0,1) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}e^{-\omega}d\omega = \frac{2u_0}{\pi}L(\frac{\sin\omega}{\omega})\Big|_{S=1}$$

$$L(\frac{\sin\omega}{\omega}) = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s \Rightarrow L(\frac{\sin\omega}{\omega})\Big|_{S=1} = \frac{\pi}{4}$$

$$u(0,1) = \frac{2u_0}{\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{u_0}{2}$$

$$L(u_x) = U_x \quad , L(u_t) = SU - u(x,0) = SU \ , L(xt) = \frac{x}{s^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + SU + U = \frac{x}{s^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + (s+1)U = \frac{x}{s^2}$$

5) گزینه 2

$$u_t = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u = Ax + B$$

$$u(0,t) = 1 \Rightarrow B = 1 \, , \, u(1,t) = 0 \Rightarrow A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$u = 1 - x$$

6) گزینه 1

u مستقل از θ است بنابراین

$$u_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0 \Rightarrow u = ALnr + B$$

$$u(1,\theta) = c_1 \Rightarrow B = c_1 \, , u(e,\theta) = 2c_1 \Rightarrow A + c_1 = 2c_1 \Rightarrow A = c_1$$

$$u = c_1 Lnr + c_1$$

7) گزینه 2

$$u_t = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u = Ax + B$$

$$u(0,t) = a, u(L,t) = b \Rightarrow B = a, A = \frac{b-a}{L} \Rightarrow u = \frac{b-a}{L}x + a$$

8) گزینه 2

براساس حالت (3) در بخش معادله لاپلاس در مختصات قطبی:

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 Lnr + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))(C_n r^n + D_n r^{-n})$$

$$u(a,\theta) = K_1 \, , \, u(b,\theta) = K_2 \Rightarrow A_n = B_n = 0 \ , \ A_0 + B_0 Lna = K_1 , A_0 + B_0 Lnb = K_2$$

$$B_0 = \frac{K_2 - K_1}{Lnb - Lna} \ , \ A_0 = \frac{K_1 \ln b - K_2 \ln a}{Lnb - Lna}$$

بنابراین **u** فقط تابعی از **r** است.

ناحیه موردنظر داخل یک قطاع با زاویه‌ی $\beta-\alpha$ می‌باشد و شرایط مرزی دیریکله است بنابراین

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{\sqrt{\lambda_n}}\sin(\sqrt{\lambda_n}(\theta-\alpha))$$

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{\beta-\alpha})^2$$

بنابراین **u** تابعی از θ, r می‌باشد.

10) گزینه 3

$$C=1,\ \frac{n\pi}{L}=n\ ,\ \frac{cn\pi}{L}=n$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

$$u(x,0)=\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\Rightarrow A_1=1, A_n=0; n\geq 2$$

$$u(x,t)=e^{-t}\sin x$$

11) گزینه 4

ناحیه موردنظر داخل قطاع با زاویه‌ی $(\theta_1=\frac{\pi}{2})$ است براساس حالت (4) در بخش معادله لاپلاس در مختصات قطبی:

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{\theta_1})^2=4n^2, \sqrt{\lambda_n}=2n$$

$$u(r,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{2n}\sin(2n\phi)$$

$$u(2,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}4^n B_n\sin(2n\phi)=\sin 2\phi\Rightarrow B_1=\frac{1}{4}, B_n=0, n\geq 2$$

$$u(r,\phi)=\frac{1}{4}r^2\sin(2\phi)$$

12) گزینه 3

$$L(u_t)=SU-u(x,0)=SU\ ,\ L(u_{xx})=U_{xx}$$

$$\begin{cases}SU-U_{xx}=G(s)\\ U(0,s)=0\end{cases}$$

$$s-r^2=0\Rightarrow r=\pm\sqrt{s}\Rightarrow U(x,s)=Ae^{\sqrt{s}x}+Be^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{s}G(s)$$

$$\lim_{s\to\infty} U(x,s)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow U(x,s)=Be \quad +\frac{1}{s}G(s)$$

$$U(0,s)=0 \Rightarrow B+\frac{1}{s}G(s)=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{s}G(s)$$

$$U(x,s)=\frac{1}{s}G(s)(1-e^{-\sqrt{s}x})$$

13) گزینه 1

$$f(x)=x\cos^3(\frac{\pi x}{2}) \ , \ 0<x<1$$

با توجه به شرایط مرزی، $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}$ نسبت به $x=1, x=0$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند.

$$x=\frac{1}{2}, t=3 \ , c=1 \Rightarrow x+ct=\frac{7}{2}, x-ct=-\frac{5}{2}$$

$$u(\frac{1}{2},3)=\frac{1}{2}\left[f(\frac{7}{2})+f(-\frac{5}{2})\right]+\frac{1}{2}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} g(s)\,ds$$

دوره تناوب $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}$ برابر $2L=2$ می‌باشد بنابراین

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} g(s)\,ds=\int_0^6 g(s)\,ds=2\int_0^2 g(s)\,ds=0$$

$$u(\frac{1}{2},3)=\left[f(\frac{7}{2})+f(-\frac{5}{2})\right]=\frac{1}{2}\left[f(-\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})\right]=\frac{1}{2}\left[-2f(\frac{1}{2})\right]$$

$$u(\frac{1}{2},3)=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

14) گزینه 4

با توجه به شرایط مرزی نیومن $(\frac{\partial T}{\partial n}=0)$ تابع ویژه مربوط به θ به صورت $\cos(\sqrt{\lambda_n}\theta)$ می‌باشد.

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{\pi})^2=n^2$$

$$u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos(n\theta)$$

$u(0,\theta)=a_0=T(a,\theta)$ مقدار متوسط

$$u(0,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} T_0\,d\theta=\frac{3}{4}T_0$$

15) گزینه 3

چون شرایط مرزی بر حسب $T(0,t), T_x(L,t)$ می‌باشد بنابراین توابع ویژه به صورت $\sin\left[\frac{\quad}{2L}\right]$ می‌باشد.

16) گزینه 3

$$u_t = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u = Ax + B$$

$$u(0,t) = T_0 \ ,\ u(L,t) = 2T_0 \Rightarrow u = T_0(1+\frac{x}{L})$$

17) گزینه 3

ناحیه بین دو دایره بوده و پاسخ معادله لاپلاس روی دو دایره مقادیر ثابت است در این حالت T به θ وابسته نمی‌باشد

$$T_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow T = c_1 Lnr + c_2$$
$$T(a,\theta) = A, T(b,\theta) = B \Rightarrow c_1 = \frac{A-B}{Lna - Lnb}, c_2 = \frac{BLna - ALnb}{Lna - Lnb}$$

18) گزینه 1

$$u = w + r(x) \Rightarrow u_t = w_t \ , u_{xx} = w_{xx} + r''(x)$$

$$w_t = w_{xx} + r''(x) + 6x \Rightarrow r''(x) = -6x \Rightarrow r(x) = -x^3 + Ax + B$$

$$u(0,t) = 1 \Rightarrow w(0,t) + r(0) = 1 \Rightarrow r(0) = 1$$

$$u(1,t) = 1 \Rightarrow r(1) = 1$$

$$r(0) = r(1) = 1 \Rightarrow A = 1 \ , \ B = 1 \Rightarrow r(x) = -x^3 + x + 1$$
$$u(x,t) = w(x,t) - x^3 + x + 1$$

19) گزینه 3

$$u(x,y) = \int_0^\infty (A_\omega e^{\omega y} + B_\omega e^{-\omega y})(C_\omega \cos(\omega x) + D_\omega \sin(\omega x))d\omega$$

$$u(0,y) = 0 \Rightarrow C_\omega = 0$$

$u(x,\infty) =$ کراندار $\Rightarrow A_\omega = 0$

$$u(x,y) = \int_0^\infty E_\omega e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega$$

20) گزینه 2

$$L(u_{tt}) = S^2U(x,s) - Su(x,0) - u_t(x,0) = S^2U(x,s)$$

$$L(u_{xx}) = U_{xx}(x,s) \ \ , \ \ L(\delta(t-\frac{x}{a})) = e^{-\frac{x}{a}s}$$

$$S^2U(x,s) - U_{xx}(x,s) = e^{-\frac{x}{a}s}$$

$$U_P = Ke^{-\frac{x}{a}s} \Rightarrow S^2K - \frac{ks^2}{a^2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}$$

$$U(x,s) = c_1e^{-sx} + c_2e^{sx}\,\frac{1}{s^2(1-\frac{1}{a^2})}e^{-\frac{x}{a}s}$$

21) گزینه 1

g , f حول $x = 0$, $x = L$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند و دوره تناوب آن‌ها $2L$ است.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-t) + f(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-L) + f(x+L)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-L}^{x+L} g(s)ds$$

$$\int_{x-L}^{x+L} g(s)ds = \int_{-L}^{L} g(s)ds = 0$$

$$f(x-L) = f(x-L+2L) = f(x+L)$$

$$u(x,L) = \frac{1}{2}\left[f(x+L) + f(x+L)\right] = f(x+L)$$

22) گزینه 3

شرایط مرزی **x**، مشابه حالت (4) نکته (12) می‌باشد بنابراین

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n ch(\sqrt{\lambda_n}y) + B_n sh(\sqrt{\lambda_n}y))\cos(\sqrt{\lambda_n}x)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n-1)\pi}{2\pi} = \frac{2n-1}{2}$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sh(\frac{(2n-1)y}{2})\cos(\frac{(2n-1)x}{2})$$

$$u(x,1) = \cos\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sh(\frac{2n-1}{2})\cos(\frac{(2n-1)x}{2})$$

$$B_1 = \frac{1}{sh(\frac{1}{2})}, B_n = 0 \quad , n \geq 2$$

$$u(x,y) = \frac{1}{sh(\frac{1}{2})}sh(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{sh(\frac{1}{2})}sh(\frac{1}{4})\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{sh(\frac{1}{4})}{2sh(\frac{1}{4})ch(\frac{1}{4})}=\frac{1}{2\sqrt{2}ch(\frac{1}{4})}$$

23) گزینه 1

شرایط مرزی مشابه حالت (2) نکته (12) است فقط جای **x , y** عوض شده است.

$$u(x,y)=A_0+B_0x+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n ch(\frac{n\pi}{a}x)+B_n sh(\frac{n\pi}{a}x))\cos(\frac{n\pi}{a}y)$$
$$u(x,y)=A_0+B_0x$$
$$u(a,y)=0\Rightarrow A_n=B_n=0, n\geq 1$$
$$u(x,y)=A_0+B_0x$$

$$u(a,y)=0\ ,\ u(0,y)=u_0\Rightarrow u=u_0(1-\frac{x}{a})$$

24) گزینه 2

براساس حالت (2) نکته (12)، گزینه (2) صحیح است.

25) گزینه 2

$$u_t=0\Rightarrow u_{xx}=0\Rightarrow u=Ax+B$$
$$u(0,t)=a, u_x(L,t)=0\Rightarrow A=0, B=a\Rightarrow u=a$$

26) گزینه 2

چون ناحیه در $x=0$ عایق شده است $(u_x(0,t)=0)$ بنابراین تابع ویژه $\cos\omega x$ می‌باشد و پاسخ به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}D(\omega)e^{-c^2\omega^2t}\cos(\omega x)d\omega$$

27) گزینه 4

براساس حالت (3) نکته (12)، با عوض کردن نقش **x , y** داریم:

$$k_n=\sqrt{\lambda_n}=\frac{(2n-1)\pi}{2b}$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh k_nx+B_n\sinh k_nx)\sin k_ny$$

28) گزینه 3

براساس حالت (5) نکته (12)، با عوض کردن نقش **x , y**، داریم

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}(A_\omega sh(\omega x)+B_\omega ch(\omega x))\sin(\omega y)d\omega$$

$u_x(0,y)=0 \Rightarrow A_\omega=0 \Rightarrow u(x,y)=\int_0^{\infty} B_\omega ch(\omega x)\sin(\omega y)d\omega$

29) گزینه 3

$u_t=0 \Rightarrow u_{xx}=0 \Rightarrow u=Ax+B$

$u(0,t)=1, u(1,t)=2 \Rightarrow B=1, A=1 \Rightarrow u=x+1$

$u(\frac{2}{3})=\frac{5}{3}$

30) گزینه 1

شرایط مرزی $T_x(0,y)=T(a,y)=0$ مشابه حالت (4) نکته (12) می‌باشد بنابراین

$\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2a})^2$

توابع ویژه (پایه متعامد): $F_n(x)=\cos(\sqrt{\lambda_n}x)=\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x)\ , n=1,2,3,\ldots$

31) گزینه 2

براساس شرایط مرزی $T(-\frac{\pi}{2},v)=a, T(\frac{\pi}{2},v)=b, T_V(u,0)=0$ پاسخ معادله لاپلاس به صورت زیر است.

$T=Au+B, T(-\frac{\pi}{2},V)=a, T(\frac{\pi}{2},V)=b \Rightarrow T=\frac{b-a}{\pi}u+\frac{b+a}{2}$

$T(\frac{\pi}{4},V)=\frac{a+3b}{4}$

32) گزینه 1

براساس شرایط مرزی $u(0,t)=u(L,t)=0$، تابع $\mathbf{f}$ به صورت فرد حول $x=L, x=0$ بسط داده می‌شود و دوره تناوب آن $2L$ است.

$f(x)=x(L-x), 0<x<L$

$x=\frac{L}{3}, t=\frac{11L}{4}, c=1 \Rightarrow x-ct=-\frac{29}{12}L, x+ct=\frac{37}{12}L$

$u(\frac{L}{3},\frac{11L}{4})=\frac{1}{2}\left[f(\frac{37}{12}L)+f(-\frac{29}{12}L)\right]=\frac{1}{2}\left[f(\frac{37}{12}L-4L)+f(-\frac{29}{12}L+2L)\right]$

$u(\frac{L}{3},\frac{11L}{4})=\frac{1}{2}\left[f(-\frac{11L}{12})+f(-\frac{5L}{12})\right]=-\frac{1}{2}\left[f(\frac{11}{12}L)+f(\frac{5L}{12})\right]$

$u(\frac{L}{3}+\frac{11L}{4})=-\frac{23L^2}{144}$

$$L=3\ ,\frac{n\pi}{L}=\frac{n\pi}{3},c=2,\frac{cn\pi}{L}=\frac{2n\pi}{3}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{4n^2\pi^2}{9}t}\sin(\frac{n\pi}{3}x)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin(\frac{n\pi}{3}x)=10\sin(\pi x)-6\sin(2\pi x)$$

$$A_3=10, A_6=-6, A_n=0, n\neq 3,6$$

$$u(x,t)=10e^{-4\pi^2 t}\sin(\pi x)-6e^{-16\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

$$u(\frac{3}{2},1)=-10e^{-4\pi^2}$$

34) گزینه 4

براساس شرایط $u(0,y)=u(a,y)=0$، تابع ویژه‌ی $F_m(x)=\sin(\frac{m\pi}{a}x)$ و براساس شرایط $u_y(x,0)=u_y(x,a)=0$، تابع ویژه‌ی $F_n(y)=\cos(\frac{n\pi}{a}y)$ حاصل می‌شود.

$$\lambda_{mn}=\frac{c\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}$$

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}e^{-\lambda_{mn}t}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{a}y)$$

35) گزینه 1

$$f(x)=\sin(x), g(x)=\cos(x)$$

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-\alpha t)+f(x+\alpha t)\right]+\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t}g(s)ds$$

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x-\alpha t)+\sin(x+\alpha t)\right]+\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t}\cos(s)ds$$

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x-\alpha t)+\sin(x+\alpha t)\right]+\frac{1}{2\alpha}\left[\sin(x+\alpha t)-\sin(x-\alpha t)\right]$$

36) گزینه 2

$$y(x,t)=\sin x\cos(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\cos x\sin(\alpha t)$$

$$L(u_t)=SU(x,s)-u(x,s)=0$$

$sU(x,s) - a^2 U_{xx}(x,s) = 0$

$$S - a^2 r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{\sqrt{s}}{a} \Rightarrow U(x,s) = Ae^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + Be^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

$$\lim_{s\to\infty} U(x,s) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow U(x,s) = Ae^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

$$L(u(0,t)) = L(\mu(t)) = U(0,s) \Rightarrow U(x,s) = L(\mu(t))e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

$$u(x,t) = \mu(t) * \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \mu(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau$$

37) گزینه 2

$$u = T(t)X(x) \Rightarrow u_{tt} = T''(t)X(x),\ u_{xx} = T(t)X''(x)$$

$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) = T(t)X(x)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 1 + \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$u(1,t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0\ ,\ u(x,0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0$$

$$\lambda = 1 - p^2 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -p^2 \Rightarrow X''(x) + p^2 X(x) = 0$$

$$r^2 + p^2 = 0 \Rightarrow r = \pm pi \Rightarrow X(x) = c_1 \cos px + c_2 \sin px$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 \sin px$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow \sin p = 0 \Rightarrow p = k\pi \Rightarrow \lambda = 1 - k^2\pi^2$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 1 - k^2\pi^2$$

$$T''(t) + (k^2\pi^2 - 1)T(t) = 0 \Rightarrow r^2 + k^2\pi^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{k^2\pi^2 - 1}i$$

$$T''(t) + (k^2\pi^2 - 1)T(t)0 \Rightarrow r^2 + k^2\pi^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{k^2\pi^2 - 1}$$

$$T(t) = c_1 \sin(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}t) + c_2 \cos(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}t)$$

$$T(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow T(t) = c_1 \sin(\sqrt{k^2\pi^2 - 1}t)$$

$$u_t = 0 \Rightarrow u_{xx} = 1 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Rightarrow B = 0, A = -\frac{L}{2} \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} - \frac{L}{2}x$$

$$u(\frac{L}{3},\infty) = -\frac{L^2}{9}$$

39) گزینه 1

$$u = w + v(x) \Rightarrow u_{xx} = w_{xx} + v''(x), u_{tt} = w_{tt}$$

$$w_{xx} + v''(x) = \sin\frac{x}{2} + w_{tt} \Rightarrow v''(x) = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow v(x) = -4\sin\frac{x}{2} + Ax + B$$

$$v(0) = 3, v(\pi) = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}, B = 3 \Rightarrow V(x) = -4\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}x + 3$$

40) گزینه 4

چون به ازای $r \to \infty$، $u(r,\theta) \neq 0$ بنابراین شرط $A_n = 0$ برقرار نمی‌باشد.

اگر $r \to \infty$ آنگاه:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) = r\cos\theta = rP_1(\cos\theta)$$
$$A_1 = 1, A_n = 0 \;,\; n \neq 1$$

$$u(a,\theta) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(A_n a^n + B_n a^{-(n+1)})P_n(\cos\theta) = 0 \Rightarrow B_n = 0 \;,\; n \neq 1$$

$$(a + B_1 a^{-2})P_1(\cos\theta) = 0 \Rightarrow B_1 = -a^3$$

$$u(r,\theta) = (r - a^3 r^{-2})P_1(\cos\theta)$$

41) گزینه 3

براساس حالت (5) نکته (9):

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + B_n\sin(\frac{n\pi}{L}x))e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

$$L = 1, C = 1 \Rightarrow u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\pi x) + B_n\sin(n\pi x))e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$x(x,0) = x \Rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\pi x) + B_n\sin(n\pi x)) = x \quad , -1 < x < 1$$

$$a_0 = 0, A_n = 0, B_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

42) گزینه 2

براساس حالت (2) نکته (9):

$$\frac{n\pi}{L} = n, c = 1$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\cos(nx) + a_0$$

$$u(x,0) = \cos 3x = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nx) + a_0 \Rightarrow a_0 = 0, A_3 = 1, A_n = 0, n \neq 3$$

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$u(x,t) = \cos(3t)\cos(3x)$$

43) گزینه 4

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \lambda > 0 \Rightarrow r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda}i$$

$$\phi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x$$

بنابراین توابع ویژه به صورت $\phi_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda x})$ می‌باشند.

$$\phi'(\pi) + \phi(\pi) = 0 \Rightarrow -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + A\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

معادله‌ی مربوط به مقادیر ویژه: $\cot(\sqrt{\lambda}\pi) = \sqrt{\lambda}$

44) گزینه 2

براساس حالت (2) نکته (9):

$$C = 1, \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{2}$$

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\cos(\frac{n\pi}{2}x)$$

$$u(x,0) = 4\cos \pi x - 2\cos 3\pi x = a_0 + \sum_{n=1} A_n \cos(\frac{}{2} x)$$

$$a_0 = 0 \ , \ A_2 = 4 \ , A_6 = -2 \ , \ A_n = 0 \ ; \ n \neq 2,6$$

$$u(x,t) = 4e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) - 2e^{-9\pi^2 t} \cos(3\pi x)$$

45) گزینه 4

$$u_{tt} = v_{tt} - (\sin t)x \, , u_{xx} = v_{xx}$$

$$v_{tt} - (\sin t)x - v_{tt} = h \Rightarrow v_{tt} - v_{xx} = h + x\sin t$$

گزینه (1) و (3) نادرست هستند.

$$u(0,t) = t \Rightarrow v(0,t) + t = t \Rightarrow v(0,t) = 0$$
$$u(1,t) = \sin t \Rightarrow v(1,t) + \sin t = \sin t \Rightarrow v(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = x(1-x) \Rightarrow v(x,0) = x(1-x)$$
$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow v_t(x,0) + 1 = 0 \Rightarrow v_t(x,0) = -1$$

شرایط فوق در گزینه (4) مطرح شده است بنابراین گزینه (4) صحیح می‌باشد.

46) گزینه 4

این تست در مثال (29) حل شده است.

47) گزینه 1

$$C = 1, \frac{n\pi}{L} = n$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx)$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nt) \sin(nx)$$

$$u_t(x,0) = 2\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx) \Rightarrow B_1 = 2 \ , \ B_n = 0 \ \ , n \neq 1$$

$$u(x,t) = 2\sin(t)\sin(x)$$

48) گزینه 4

$$u_t = w_t \ \ , u_{xx} = w_{xx} + \psi''(x)$$

$$w_t = 4w_{xx} + 4\psi''(x) + x \Rightarrow \psi''(x) = -\frac{x}{4} \Rightarrow \psi(x) = -\frac{x^3}{24} + Ax + B$$

$$\psi(0)=1 \Rightarrow B=1 \Rightarrow \psi(x)=-\frac{\quad}{24}+Ax+1$$

$$u_x(\pi,t)=2=w_x(\pi,t)+\psi'(\pi) \Rightarrow \psi'(\pi)=2$$

$$\psi'(x)=-\frac{x^2}{8}+A\,,\psi'(\pi)=2 \Rightarrow A=2+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\psi(x)=-\frac{x^3}{24}+(2+\frac{\pi^2}{8})x+1$$

49) گزینه 3

براساس شرایط مرزی مربوط به θ $(T(r,\pi)=0, T_\theta(r,0)=0)$:

توابع ویژه: $F_n(\theta)=\cos(\frac{(2n-1)}{2\pi}\pi\theta)=\cos(\frac{(2n-1)}{2}\theta)=\cos(n-\frac{1}{2})\theta$

مقادیر ویژه: $\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2\,, n=1,2,\mathbf{K}$

50) گزینه 2

براساس حالت (2) نکته (9):

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2n^2t}\cos(nx)$$

با فرض $a_0=\frac{A_0}{2}$، گزینه 2 حاصل می‌شود.

51) گزینه 2

براساس حالت (1) نکته (9):

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2=n^2\,, L=\pi\,, n=1,2,3\,\mathbf{K}$$

$$F_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{L}x)=\sin(nx)$$

52) گزینه 2

براساس حالت (4) نکته (9):

$$F_n(x)=\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)\ ,\ n=1,2,\mathbf{K}$$

53) گزینه صحیح ندارد.

$$C=1\ ,\ x=\frac{L}{2}, t=\frac{5L}{2} \Rightarrow x-ct=-2L\,, x+ct=3L$$

$$u(\frac{L}{2},\frac{5L}{2})=\frac{1}{2}[f(3L)+f(-2L)]+\frac{1}{2}\int_{-2L}^{3L}g(s)ds$$

$$f(x)=\left|x-\frac{L}{2}\right|,\ g(x)=x(L-x)$$

براساس شرایط $u(0,t)=u(L,t)=0$، g,f حول $x=L, x=0$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند و دوره تناوب آن‌ها $2L$است.

$$f(3L)=f(L)=\frac{L}{2}, f(-2L)=f(0)=\frac{L}{2}$$

$$\int_{-2L}^{3L}g(s)ds=\int_{2L}^{3L}g(s)ds=\int_{0}^{L}s(L-s)ds=\left[\frac{Ls^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0^L=\frac{L^3}{6}$$

$$u(\frac{L}{2},\frac{5L}{2})=\frac{1}{2}\frac{L^3}{6}=\frac{L^3}{12}$$

54) گزینه 4

$$u_t=w_t, u_{xx}=w_{xx}+\psi''(x)$$

$$w_t=4w_{xx}+4\psi''(x)+\sin x\Rightarrow \psi''(x)=-\frac{1}{4}\sin x$$

$$\psi(x)=\frac{1}{4}\sin x+Ax+B$$

$$\psi(0)=1, \psi_x(0)=-1\Rightarrow B=1,\ \ A=-\frac{5}{4}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{4}\sin x-\frac{5}{4}x+1$$

55) گزینه 2

براساس $u_x(0,t)=u(1,t)=0$، g,f حول $x=0$ به صورت زوج و حول $x=1$ به صورت فرد بسط داده می‌شوند و دوره تناوب $4L=4$ می‌باشد.

$$x=\frac{1}{3}, t=5, c=1\Rightarrow x-t=-\frac{14}{3}, x+t=\frac{16}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & , \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases},\ g(x)=0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]$$

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}[f'(x+t)-f'(x-t)]$$

$$u_t(\frac{1}{3},5)=\frac{1}{2}\left[f'(\frac{16}{3})-f'(-\frac{14}{3})\right]$$

تابع f' حول $x=0$ به صورت فرد و حول $x=1$ به صورت زوج خواهد بود.

$$f'(\frac{16}{3})=f'(\frac{16}{3}-4)=f'(\frac{4}{3})=f'(1+\frac{1}{3})=f'(1-\frac{1}{3})=f'(\frac{2}{3})=0$$

$$f'(-\frac{14}{3})=f'(-\frac{14}{3}+4)=f'(-\frac{2}{3})=-f'(\frac{2}{3})=0$$

$$u_t(\frac{1}{3},5)=0$$

56) گزینه 4

$$u(x,0)=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(nx)$$

$$c_1=\frac{3}{4},\quad c_3=-\frac{1}{4},\qquad c_n=0\quad;\qquad n\neq 1,3$$

$$u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-c^2t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-9c^2t}\sin(3x)$$

57) گزینه 2

براساس شرایط $u(-\pi,t)=u(\pi,t)$ و $u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)$ (حالت (5) نکته (9)) تابع ویژه به صورت $n=0,1,\ldots$ و $F_n(x)=A_n\cos nx+B_n\sin nx$ می باشد بنابراین:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

58) گزینه 3

پاسخ این تست، مشابه تست (3) می‌باشد کافی است در تست (3)، $u_0=1$ قرار گیرد.

59) گزینه 1

ناحیه $0<x<\infty$ و $0<y<\infty$ و شرط مرزی $u_x(0,y)=0$ مشابه حالت (7) نکته (12) می‌باشد بنابراین

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}A(\omega)e^{-\omega y}\cos(\omega x)d\omega$$

یا به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}E(P)e^{-Py}\cos(Px)dP$$