مدار الکتریکی
(مهندسی کامپیوتر)

مجموعه مهندسی کامپیوتر

مدار الکتریکی

سرشناسه	:	یزدانفر، سالار، 1362 -، گردآورنده
عنوان و نام پدیدآور	:	مدار الکتریکی / گردآورنده سالار یزدانفر.
مشخصات نشر	:	تهران: سنجش و دانش، 1391.
مشخصات ظاهری	:	251ص .: مصور، جدول، نمودار؛ 22×29س‌م.
شابک	:	978-600-232-367-5
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	مدارهای برقی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
رده بندی کنگره	:	139126/3060LB 4م464ی /
رده بندی دیویی	:	238076/373
شماره کتابشناسی ملی	:	2813065

مدار الکتریکی

گردآورنده: سالار یزدانفر
ناشر: انتشارات سنجش و دانش
صفحه آرایی: مهناز تقوی
نوبت چاپ: دوم،۱۳۹۳
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۵۰۲۰۰ تومان
شابک: 978-600-232-367-5

نشانی: تهران، میدان انقلاب، خیابان دانشگاه، تقاطع روانمهر، پلاک۱۲۶، ساختمان سنجش و دانش
تلفن: ۶۱۲۶ـ۰۲۱
www.sanjesh.ir

فهرست مطالب

سخن سنجش و دانش

آغاز هر سخن،زیبنده ستایش خالق یکتاست. اوست که بر هر نقشی، نگاری می بندد و بر هر نگاری، زیبایی.
بر هیچ عاقل و فرزانه ای پوشیده نیست که موتور پیشرفت و سربلندی هر کشوری بسته به علم و دانش است و طبق فرموده مقام معظم رهبری: اگر ملتی استقلال می خواهد ، اگر عزت می خواهد، اگر پیشرفت می خواهد باید دانشگاه خود را تقویت کند.
در این راستا، انتشارات سنجش و دانش(جامع ترین مرکز آموزش مکاتبه ای کشور) مفتخر است که سالهای متمادی در جهت خدمت به جامعه علمی کشور و بخصوص داوطلبان مقاطع کاردانی به کارشناسی ، کارشناسی ارشد و همچنین دکترا ، فعالیت می کند.

در این مسیر پر پیچ و خم علم آموزی و پیشرفت، یکی از مشکلاتی که همواره دانشجویان با آن مواجه هستند، از یک طرف گستردگی و پراکندگی منابع مطالعاتی و از طرف دیگر کمبود زمان آزمون کنکور ، جهت پاسخگویی به سوالات است. تا کنون جزوات و کتابهای گوناگونی در جهت رفع این مشکلات به بازار عرضه شده اما باز با این حال، پاسخ گوی نیاز خیلی از داوطلبان نیست، چرا که بعضاً یا خیلی خلاصه و گزیده است یا این که در تشریح مسائل و پاسخ گویی به سوالات از سیستمی استفاده شده که با وجود کامل و جامع بودن اکثراً با توجه به زمان محدود آزمون کنکور، عملاً سر جلسه امتحان قابل استفاده نمی باشد. به این معنا که داوطلب هر چند تسلط کامل به مطالب درسی دارد اما این مطالب در ذهن او از آنچنان انسجام و هماهنگی لازم برخوردار نیست که داوطلب بتواند در یک زمان کم به جواب سوال برسد لذا داوطلب در پاسخ گویی به سوالات دچار کمبود وقت گردیده و عملاً نمی تواند به تمام سوالات آنگونه که از خود انتظار دارد جواب دهد.
انتشارات سنجش و دانش با توجه به این دو مسئله مهم(یکی گستردگی منابع و دیگری زمان کم پاسخ گویی به سوالات کنکور) بر آن شد تا با استفاده از تجربه و علم اساتید مجرب و کارآزموده ، به تولید و انتشار کتبی بپردازد که عین خلاصه و موجز بودن کامل و جامع نیز باشد ، کما این که سعی گردیده در تشریح مسائل از یک سیستم جدید و راهکار میانبری استفاده شود که بدین وسیله مشکل کمبود زمان در جلسه کنکور نیز مرتفع گردد.
نیاز به استفاده از یک سیستم جدید به این دلیل است که توان پاسخ گویی به سوالات کنکور جدای از نیاز به بار علمی، نیازمند یک مهارت و شیوه خاص در تست زنی نیز می باشد. لذا در این خصوص سعی شده مطالب کتاب به گونه ای طرح ریزی و تألیف شود که ، داوطلب خود به خود علاوه بر یاد گیری مطالب به مهارت تست زنی نیز دست پیدا کند.
در آخر از مخاطبین محترم این کتاب نهایت سپاسگزاری و قدر دانی را داریم و امید داریم توانسته باشیم آنچه را که شایسته و برازنده یک دانشجوی ایرانی است ارائه کرده باشیم. از دانشجویان عزیز و اساتید محترم نیز تقاضامندیم ما را از نقطه نظرات و پیشنهادات خود بی بهره نگذارند چرا که تنها افتخار و دست آویز ما نگاه صمیمانه و رضایت بخش شماست.
به امید پیروزی و سربلندی در تمامی عرصه های زندگی

error.azmoon@gmail.com
تلفن ۰۲۱-۶۱۲۶

فصل اول:مبانی مدارهای الکتریکی

در این فصل سعی شده است مفاهیم اولیه به همراه اجزای تشکیل دهنده مدارهای الکتریکی معرفی گردند و ویژگی هر کدام از آنها مورد بررسی قرار گیرد.

تعاریف پایه

جریان الکتریکی

جریان را با i یا I نشان می دهند و آن تغییرات زمانی عبور بار در یک جهت خاص می باشد. یعنی:

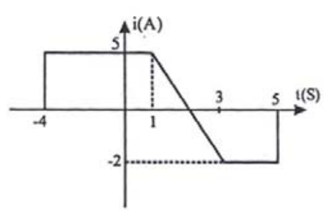
$$i(t)=\frac{dq}{dt} \qquad (۱)$$

واحد جریان آمپر (A) است. به کمک رابطه (۱) می توان جریان لحظه ای i(t) را حساب کرد. با انتگرال‌گیری از رابطه (۱) کل بار q منتقل شده تا زمان t به دست می آید.

$$q(t)=\int_{t_۰}^{t} i(t)dt+q(t_۰) \qquad (۲)$$

$q(t_۰)$ بار عبور در لحظه‌ی $t_۰$ است.

مثال۱: منحنی تغییرات جریان نسبت به زمان در شکل زیر نشان داده شده است. کل بار منتقل شده در فاصله زمانی $-۲<t<۱$ ثانیه چقدر است؟



حل:

تغییرات زمانی در فاصله زمانی $-۲ < t < ۱$ ثانیه ثابت و برابر $i = ۵$ آمپر است پس

$$q = \int_{-۲}^{۱} i dt = ۵ \times t \Big|_{-۲}^{۱} = ۱۵C$$

اختلاف پتانسیل (ولتاژ)

در المان مداری مقابل جریان مستقیمی به سر A عنصر مداری وارد و از سرB خارج می گردد که در این حالت فرض کنید برای عبور با مقداری انرژی صرف شود در این صورت می گوئیم بین دو سر المان ولتاژ الکتریکی قرار گرفته است.

$$v = v_A - v_B \qquad (۳)$$

واحد ولتاژ ولت(V) است. جهت ولتاژ با یک جفت علامت مثبت و منفی نشان داده می شود.

جهت قراردادی متناظر

مطابق شکل مقابل اگر جریان از طرف سر با علامت (+) به طورف سر با علامت (-) باشد، جهت جریان و ولتاژ را متناظر گویند.

توان الکتریکی

با رعایت نمودن جهت قراردادی متناظر، توان تحویل داده شده به یک عنصر مداری برابر است با حاصل ضرب ولتاژ دو سر المان در جریان عبوری از آن، یعنی

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (۴)$$

در صورتی که توان تحمیلی به المان مدار مثبت باشد، (p>۰)المان مصرف کننده (جذب کننده) توان و در غیر اینصورت (p<۰) المان تولید کننده توان خواهد بود. واحد توان وات(W) معادل ژول بر ثانیه است.

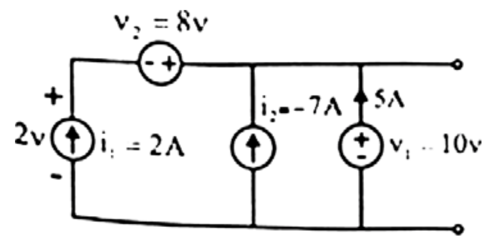
توجه۱: مقاومت ها به ازای (R>۰) همواره مصرف کننده توان (p>۰) هستند.

توجه ۲: منابع ولتاژ و جریان داخل یک مدار الکتریکی همواره تولید کننده توان (p<۰) نیستند و می توانند مصرف کننده توان هم باشند.

توجه ۳: توان الکتریکی همان تغییرات انرژی در واحد زمان است. یعنی

$$p=\frac{dw(t)}{dt} \qquad (۵)$$

مثال۲: در مدار زیر چهار منبع جریان و ولتاژ موجود است. کدام منبع توان جذب می کند؟



حل: با رعایت جهت قراردادی متناظر بین ولتاژ و جریان

$$p_{i۱}=۲\times i_۱=۲\times(-۲)=-۴w$$
$$p_{i۲}=v_۱\times i_۲=۱۰\times[-(-۷)]=۷۰w$$
$$p_{v۲}=v_۲\times i_۱=۸\times(-۲)=-۱۶w$$
$$p_{v۱}=v_۱\times(-۵)=۱۰\times(-۵)=-۵۰w$$

با توجه به نتایج به دست آمده $p_{i۲}>۰$ است و لذا منبع جریان $i_۲$ مصرف کننده(جذب کننده) توان است.

انرژی

انرژی در مدار الکتریکی کار انجام شده در حرکت یک بار الکتریکی بین دو نقطه که با هم اختلاف پتانسیل دارند، می باشد. انـرژی یا به عنصر داده می شود و یا از آن دریافت می گردد. از طرفی چون توان برابر مشتق انرژی است پس انـرژی برابـر انتگـرال تـوان است. به عبارت دیگر با فرض $w(t_۰)=۰$، انرژی تولید شده یا جذب شده در فاصله زمانی $t_۰$ تا t برابر است با

$$w(t)=\int_{t_۰}^{t}p(t)dt \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، p(t) معادله توان است. واحد انرژی ژول است و با علامت J نشان داده می شود.

مثال ۳: در یک عنصر مداری معادله توان به صورت $p(t)=٤(t^{٣}-٦t^{٢}+١١t-٦)$ وات می باشد. انرژی تحویلی به عنصر در فاصله زمانی ۳>t>۱ ثانیه چقدر است؟

حل:

$$w(t)=\int_{۱}^{۳}p(t)dt=\int_{۱}^{۳}۴(t^{۳}-۶t^{۲}+۱۱t-۶)dt$$

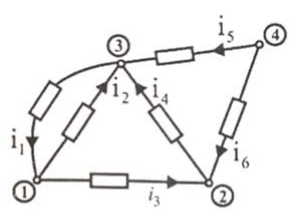
$$w=٤\left(\frac{t^{٤}}{٤}-٢t^{٣}+\frac{١١}{٢}t^{٢}-٦t\right)_{١}^{٣}=٠$$

در این فاصله زمانی انرژی تحویلی به عنصر صفر به دست می آید.

قانون جریان کیرشهف KLC

در هر گره ا زهر مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان های همه شاخه هایی که از یک گره خارج می شوند، برابر صفر است.

مثال ۴: مدار شکل زیر دارای ۶ شاخه و ۴ گره می باشد. قانون جریان کیرشهف را برای کلیه گره ها بنویسید.



حل:

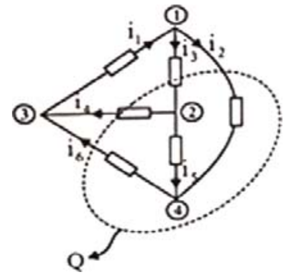
$$KCL\ ١:-i_{١}+i_{٢}+i_{٣}=٠$$

$$KCL\ ٢:-i_{٣}+i_{٤}-i_{٦}=٠$$

$$KCL\ ٣:i_{١}-i_{٢}-i_{٤}-i_{٥}=٠$$

توجه ۴: KLC نه تنها در هر گره ساده بلکه برای مسیر بسته ای که هر المان مداری را تنها یک بار قطع کند (کات ست) برقرار است.

مثال۵: در مدار مقابل، KLC را برای مسیر بسته که با خط چین کشیده شده (کات ستQ) بنویسید.



حل: کات ست Q دو گره ۲ و ۴ را در بر گرفته است و در مسیر بسته خود شاخه های ۴،۳،۲ و ۶ را قطع مـی نمایـد. بـرای شـاخه های فوق با در نظر جهت Q به سمت بیرون (مطابق شکل) داریم

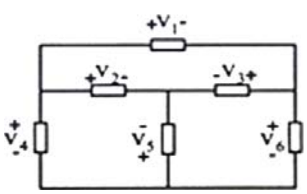
$$KCL: -i_{۲} - i_{۳} + i_{۴} + i_{۶} = ۰$$

توجه ۵: همانطور که مشاهده می کنید جریان شاخه ۵ در معادله Q ظاهر نشده است زیرا مسیر بسته شاخه ۵ را قطع نکرده است.

قانون ولتاژ کیرشهف KVL

در هر حلقه از هر مدار الکتریکی فشرده ودر هر لحظه از زمان، مجموع جبری ولتاژ های همه شاخه های حلقه، برابر صفر است.

مثال ۶: برای مدار مقابل KLV را برای حلقه های (۲،۴،۵) و (۳،۵،۶)، (۲،۳،۴،۶) در جهت ساعتگرد بنویسید.



حل:

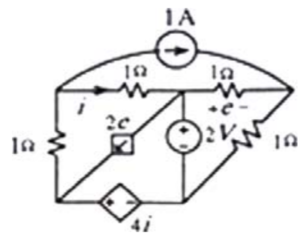
$$KVL\ ۱: v_{۲} - v_{۵} - v_{۴} = ۰$$

$$KVL\ ۲: -v_{۳} + v_{۶} + v_{۵} = ۰$$

$$KVL\ ۳: v_{۲} - v_{۳} + v_{۶} - v_{۴} = ۰$$

توجه ۶: معادلات KLV را می توان هم در جهت ساعتگرد و هم در جهت عکس ساعتگرد نوشت. زیرا جهـت، محـدودیت نیسـت و فقط یک قرارداد است.

مثال ۷: در مدار مقابل، شدت جریان i برابر است با



۱،۵A(۱ ۲A(۲

۲،۵A(۳ -۰،۵A(۴

حل ۷-۱) در جهت منبع ولتاژ مستقل و وابسته KVL می زنیم.

$$KLV: i + ۲ - ٤i + ۱ \times (i+۱) = ۰ \Rightarrow i = ۱.۵A$$

مدارهای فشرده

مدارهای فشرده از به هم پیوستن عناصر فشرده به دست می آیند و طبق تعریف در این گونه مدارات بزرگترین بعد فیزیکی مدار در مقایسه با طول موج بالاترین فرکانس مورد نظر، کوچکتر است.

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda >> d \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)،c: سرعت انتشار امواج الکترومغناطیس $\left(۳\times ۱۰^{۸}\frac{m}{s}\right)$, λ: طول موج، f: فرکانس و d، طول مدار است.

ویژگی های مدارهای فشرده

- ولتاژ دو سر هر شاخه یا هر جفت گره، کاملا معین است.

- جریانی که از یک سر وارد هر عنصر می شود، کاملا معین بوده و برابر جریانی است که از سر دیگر خارج می شود.

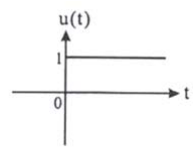
- مدارها با عناصر فشرده توسط معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می شوند.

- قوانین کیرشهف KVL و KCL فقط در مدارهای فشرده صادق اند.

۱-۲ شکل موج های مداری

در این قسمت به تعریف بعضی شکل موج های مفید که به طور مکرر در مدارهای الکتریکی به عنوان منابع ورودی مـورد اسـتفاده قرار می گیرند، می پردازیم.

تابع تحریک پله واحد



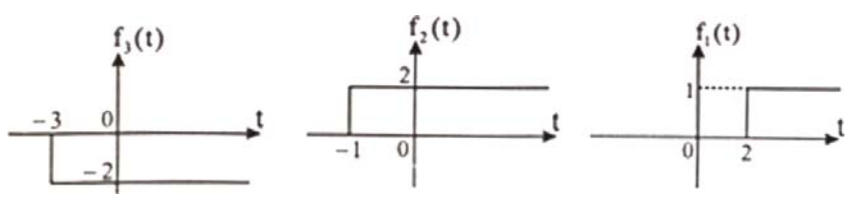
به صورت زیر تعریف می گردد

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{8}$$

اگر پله واحد به اندازه .tثانیه به تأخیر افتد خواهیم داشت

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases} \tag{9}$$

برای شکل موج های زیر داریم



$$f_3(t)=-2u(t+3) \quad f_2(t)=2u(t+1) \quad f_1(t)=u(t-2)$$

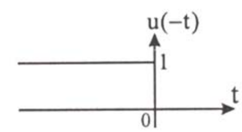
توجه ۷: در .t=t، تابع تحریک $u(t-t_0)$ به طور ناگهانی از صفر به یک می پرد و مقدار این تابع در .t=tتعریف نشده است.

توجه ۸: برای تابع تحریک $f_2(t)$ داریم

$$f_2(-2)=0,\ f_2(-\infty)=0,\ f_2(\sqrt{2})=2$$
$$f_2(0)=2,\ f_2(\infty)=2,\ f_2(\sin\pi)=2$$

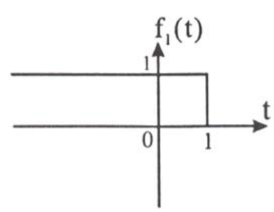
ضمنا $f_2(-1)$ تعریف نشده است زیرا در t=-۱ ثانیه مقدار f_2 بین صفر تا ۲ تغییر می کند.

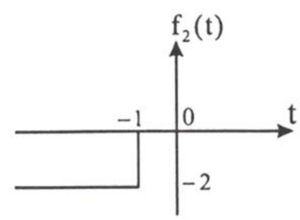
توجه ۹: تابع تحریک پله u(-t) به صورت زیر تعریف می گردد



$$u(-t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (10)$$

در این حالت تابع تحریک پله به ازای t<۰ مقدار یک و برای t>۰ مقدار صفر را می گییرد. تابع تحریک فوق برای مدارهایی به کار می رود که قبل از t=۰، منابع مستقل ورودی به مدار اعمال می گردند و برای t>۰ منابع مستقل حذف می گردند. برای شکل موج های زیر داریم

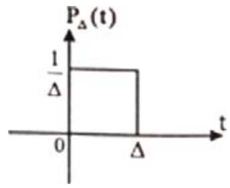




$f_1(t)=u(-t+1)$ $f_2(t)=-2u(-t-1)$

تابع تحریک پالس

در تحلیل مدارهای الکتریکی غالبا لازم است از یک پالس چهار گوش به عنوان ورودی مدار استفاده شود. تابع پالس $p_\Delta(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.



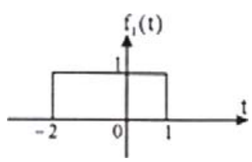
$$p_\Delta(t)\begin{cases} ۰ & t<۰ \\ \frac{۱}{\Delta} & ۰<t<\Delta \\ ۰ & t>\Delta \end{cases}$$

به عبارت دیگر $p_\Delta(t)$ پالسی به ارتفاع $\frac{۱}{\Delta}$ و عرض Δ است که در لحظه t=۰ شروع می شود تابع تحریک پالس بر حسب تابع پله واحد به صورت زیر است

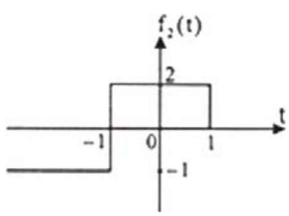
$$p_\Delta(t)=\frac{۱}{\Delta}u(t)-\frac{۱}{\Delta}u(t-\Delta) \tag{۱۱}$$

مثال ۸: سیگنال های نشان داده شده را برحسب توابع پله بنویسید.

حل:

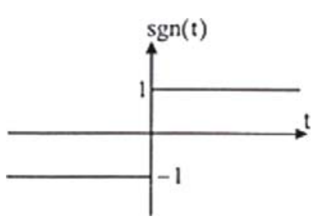


$$f_۱(t)=u(t+۲)-u(t-۱)$$
$$f_۲(t)=-u(t-۱)+۲u(t+۱)-۲u(t-۱)$$



تابع تحریک علامت

به صورت زیر تعریف می گردد

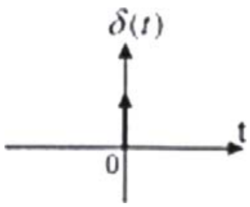


$$Sgn(t)=\begin{cases} -۱ & t<۰ \\ ۱ & t>۰ \end{cases}$$

$$Sgn(t)=u(t)-u(-t) \tag{۱۲}$$

تابع تحریک ضربه واحد

یکی از سیگنال های مهم در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی ضربه واحد است که به عنوان ورودی مستقل به مـدار اعمـال مـی گردد. تابع ضربه واحد به صورت زیر تعریف می گردد



$$\delta(t)=\begin{cases} ۰ & t\neq ۰ \\ \text{مقدار ویژه} & t=۰ \end{cases}$$ (۱۳)

تابع ضربه در مبدأ دارای ویژگی زیر است.

$$\int_{۰^-}^{۰^+}\delta(t)dt$$ (۱۴)

انتگرال (۱۴) بیان می دارد که مساحت سطح زیر نمودار تابع ضربه واحد برابر یک است. از تعریف توابع پله و ضربه نتیجه می شود که:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$$ (۱۵)

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$ (۱۶)

دو معادله فوق دارای اهمیت بسیاری در تعیین پاسخ شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان دارند. خاصیت مفید دیگر تـابع ضـربه خاصیت غربالی آن است. با فرض این که تابع f(t) یک تابع پیوسته در t=۰ باشد آنگاه

(۱۷)

$$\int_{۰^-}^{۰^+}f(t)\delta(t)dt=f(۰)$$

و در صورتی که f(t) در $t=t_0$ پیوسته باشد آن گاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad (۱۸)$$

توجه۱۰: حدود انتگرال (۱۸) در صورتی که از t_0^- الی t_0^+ تغییر می نمود باز جواب انتگرال $f(t_0)$ می باشد.

مثال۹: مقدار انتگرال های زیر را به دست آورید.

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-t}\delta(t)dt\ ,\quad \int_{0^-}^{+\infty} 2u(-t)\delta(t+1)dt\ ,\quad \int_{\pi}^{+\pi} \sin t\,\delta(t-1)dt$$

حل:

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-t}\delta(t)dt = 1$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} 2u(-t)\delta(t+1)dt = 0$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\,\delta(t-1)dt = 0$$

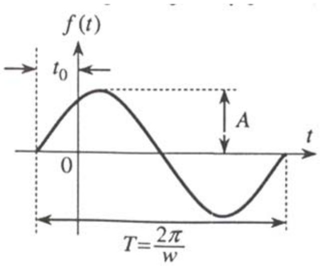
در انتگرال آخر تابع ضربه $\delta(t-1)$ خارج از حدود انتگرال قرار گرفته و لذا جواب انتگرال صفر است.

تابع تحریک سینوسی

نمایش یک شکل موج سینوسی برابر است با

$$f(t) = A\cos(wt+\varphi) \qquad (۱۹)$$

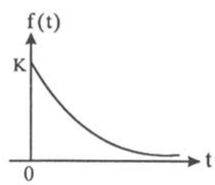
که در رابطه (۱۹) A دامنه، w فرکانس زاویه ای (برحسب رادیان بر ثانیه) و φ فاز سیگنال و T دوره تناوب سیگنال نامیده می شود. ضمنا محدوده‌زمانی t_0 برابر است با



$$t_0 = \frac{\pi}{2w} - \frac{\varphi}{w} \quad (\text{sec})$$ (۲۰)

تابع تحریک نمایی

از جمله سیگنال های متداول در مدارهای الکتریکی که به عنوان ورودی مدنظر قرار می گیرد، سیگنال نمایی است که بـه صـورت زیر نمایش داده می شود.



$$f(t) = ke^{-\alpha t}u(t) \qquad \alpha > 0$$ (۲۱)

از جمله ویژگی های آن عبارتند از

$$f(0^+) = k \ , \ f(\infty) = 0$$

ثابت زمانی آن برابر است با

$$\tau = \frac{1}{\alpha}$$ (۲۲)

مثال ۱۰: سیگنال‌های زیر را رسم کنید. $(\alpha, V_0 > 0)$

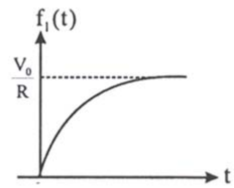
$$f_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

$$f_2(t) = V_0 e^{-\alpha t}u(t)$$

$$f_3(t) = V_0 + \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

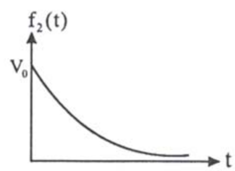
حل: برای $f_1(t)$ داریم

$$f_1(0^+) = 0 \,,\; f_1(\infty) = \frac{V_0}{R}$$



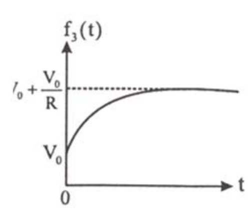
برای $f_2(t)$ داریم

$$f_2(0^+) = V_0 \;,\; f_2(\infty) = 0$$



برای $f_3(t)$ $f_3(t)$ داریم

$$f_3(0^+) = V_0 \;,\; f_3(\infty) = V_0 + \frac{V_0}{R}$$



یادآوری: $e^{-\infty} = 0 \,,\, e^{+\infty} = \infty \;,\; e^{0} = 1$

۳-۱- اجزای مدار

۱-۳-۱-مقاومت

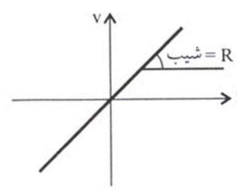
عنصری دو سر، که در هر لحظه از زمان، ولتاژ و جریان آن، توسط رابطه ای در صفحه vi می تواند توصیف شود. به عبارت دیگر، بین مقدار لحظه ای ولتاژ و جریان، رابطه ای مشخص وجود دارد.

مقاومت خطی[۱]: مقاومتی که رابطه بین ولتاژ و جریان آن یک رابطه خطی می باشد.

مقاومت خطی و تغییر پذیر با زمان[۲]:مقامتی متغیر با زمان که توسط معادله خطی $v(t) = R(t)i(t)$ توصیف می شود. از کاربردهای این نوع مقاومت، ایجاد یا تغییر فرکانس سیگنالهای سینوسی(مدولاسیون) می باشد.

مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان[۳]: نوع خاصی از مقاومت خطی است که د رآن مقاومت در تمامی مقداری ثابت دارد:

$$v(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow$$



رسانایی: به صورت $G = \frac{1}{R}$ تعریف می شود و واحد آن زیمنس[۴] است.

اتصال -کوتاه: حالت خاصی از مقاومت LTI که در آن R=۰ است. توجه کنید که در این حالت ولتاژ اتصال –کوتاه صفر است ولی جریان گذرنده از اتصال –کوتاه ممکن است صفر نباشد.

اتصال-باز: حالت خاصی که در آن $R \to \infty$ میل می کند، جریان اتصال –کوتاه باز همواره صفر است.

مقاومت غیر خطی: مقاومتی که خطی نباشد. مانند دیود ژرمانیوم، دیود تونلی، لامپ گازدار. مقاومت غیر خطی نیز، دارای انواع TI و TV می باشد.

نکات:

۱- برای تحلیل مدارات شامل مقاومت غیر خطی، معمولا از روش های تقریب قطعه ای- خطی استفاده می کنیم.

---

[۱]- Linear

[۲]- T.V=Time Variant

[۳]- T.I=Time Invariant

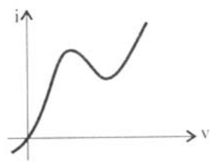
[۴]- د رگذشته واحد G موهو(℧) بوده است.

۲- مقاومت های غیر خطی معمولا فرکانس هایی متفاوت از فرکانس منبع ورودی تولید می کنند. (مشابه مقاومت های LTV)

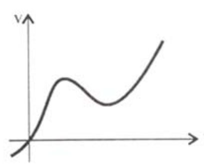
۳- در تحلیل های سیگنال کوچک، معمولا می توان مقاومت های غیر خطی را با مقاومت های خطی مدل کرد.

از دیدگاهی دیگر نیز می توانیم مقاومت ها را طبقه بندی کنیم:

۱- مقاومت کنترل شده با ولتاژ: مقاومتی که جریان آن تابعی از ولتاژش باشد. ((i=f(v)). دیود تونلی، نمونه ای از مقاومت های کنترل شده با ولتاژ است:



۲- مقاومت کنترل شده با جریان: مقاومتی که ولتاژ آن تابعی از جریانش باشد.((v=f(i)). لامپ گازدار، نمونه ای از مقاومت های (غیر خطی) کنترل شده با جریان است.



۳- مقاومت کنترل شده با ولتاژ جریان: مقاومتی که می تواند هم بوسیله ولتاژ و هم بوسیله جریان کنترل شود:

$$v = f^{-1}(i) \iff i = f(v)$$

مقاومت خطی با مقاومت   با مقاومت مثبت، حالت خاصی از چنین مقاومتی است، زیرا:

$$i = \frac{v}{R} \iff v = Ri$$

مقاومت دو طرفه: مقاومتی که مشخصه i-v آن نسبت به مبدا تقارن باشد. بنابراین، یک مقاومت دو طرفه را به هر ۲ طریق ممکن می توان در مدار قرار داد و لزومی ندارد که دو سر آن از همدیگر متمایز گردند.

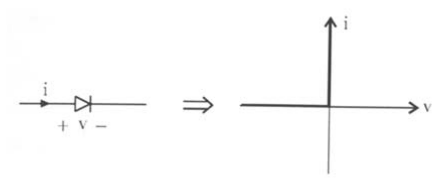
نمونه هایی از مقاومت های دو طرف: مقاومت خطی

نمونه هایی از مقاومت های غیر دو طرفه: دیود ژرمانیومی، دیود تونلی

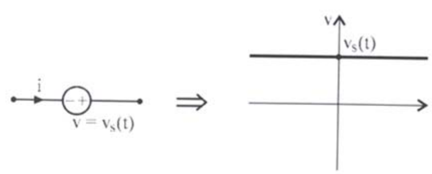
دیود: در حالتی که دیود روشن باشد، مانند اتصال- کوتاه عمل می کند و در حالتی که دیود خاموش باشد، مانند اتصال-باز عمل م یکند برای روشن بودن دیود باید دو شرط تواما برقرار باشد:

۱- ولتاژ آند بیشتر از ولتاژ کاتد باشد.

۲- جریان گذرنده از دیود مثبت باشد.



منبع ولتاژ مستقل: عنصری که ولتاژ دو سرش مستقل از جریان گذرنده از آن باشد. مشخصه منبع ولتاژش در لحظه مشخص t به صورت زیر می باشد:

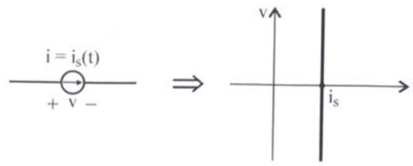


نکات:

۱- منبع ولتاژ، نوعی مقاومت غیر خطی کنترل شده با جریان به شمار می آید.

۲- اگر مقدار یک ولتاژ صفر باشد، آن منبع معادل اتصال-کوتاه عمل می کند:

منبع جریان مستقل: عنصری که جریان گذرنده از آن، مستقل از ولتاژ دو سرش می باشد. مشخصه منبع جریان در لحظه مشخص t به صورت زیر می باشد:

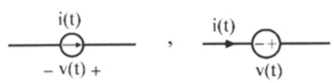


نکات:

۱- منبع جریان، نوعی مقاومت غیر خطی کنترل شده با ولتاژ به شمار می آید.

۲- اگر مقدار یک منبع جریان صفر باشد، آن منبع معادل مدار –باز عمل می کند:

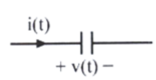
تذکر مهم: جهت قراردادهای متناظر، معمولا در مورد منابع مستقل بکار نمی روند. جهت های قراردادی بـرای منـابع مسـتقل، بـه صورت زیر می باشد:



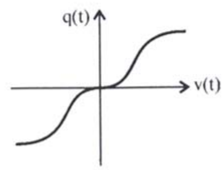
با توجه به نکته فوق، $p(t) = v(t)i(t)$ توانی خواهد بود که در لحظه t توسط منبع به مدار تحویل داده می شود.

۱-۳-۲- خازن

عنصری دو سر که در هر لحظه از زمان، بار و ولتاژ آن، توسط رابطه ای در صفحه qvمی تواند توصیف بشود. به عبارت دیگر، بـین مقدار لحظه ای ولتاژ و بار رابطه ای مشخص وجود دارد. از خازن ها بدلیل اینکه در میدان الکتریکی خود انرژی ذخیره می کننـد، در مدارهای الکتریکی استفاده می شود:



نمودار زیر، منحنی مشخصه یک خازن نوعی را در لحظه مشخص t به تصویر کشیده است.



نکته: برای یافتن مشخصه iv یک خازن، کافیست مشخصه qv آن را بدانیم و از تعریف $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ استفاده کنیم.

خازن خطی: خازنی که رابطه بین ولتاژ و جریان آن یک رابطه خطی می باشد. (به ازای تمام زمانها)

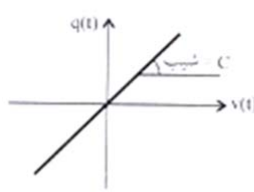
خازن خطی و تغییر پذیر با زمان: خازنی متغیر با زمان، که توسط رابطه خطی $q(t)=C(t)v(t)$ توصیف می شود. با توجه به تعریف $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$، و بنابراین رابطه ولتاژ و جریان خازن LTV عبارتست از:

$$i_c(t)=C(t)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{dC(t)}{dt}v(t)$$

گونه ای از خازن های LTV (خازن متغیر متناوب) در تقویت کننده های پارامتری استفاده قرار می گیرد.

خازن خطی و تغییر ناپذیر با زمان: نوع خاصی از خازن خطی است که در آن C(t) در تمامی زمان ها مقداری ثابت دارد:

$$q(t)=Cv(t) \quad \Leftrightarrow$$

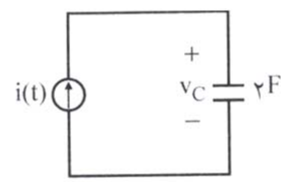


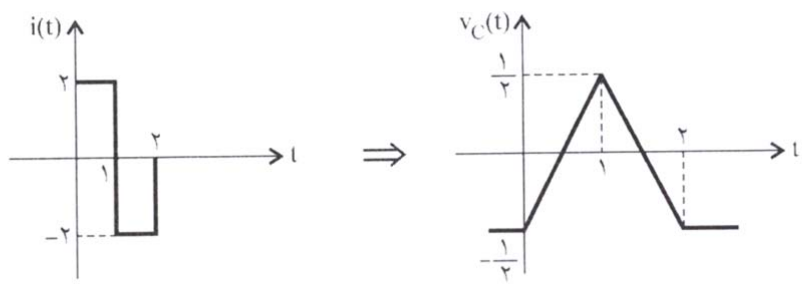
با استفاده از تعریف $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$، روابط ولتاژ و جریان خازن LTI نیز بدست می آیند:

$$\begin{cases} i_c(t)=C\dfrac{dv_c(t)}{dt} \\ v_c(t)=v_c(0^-)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)d\tau \quad (*) \end{cases}$$

نکته: برای توصیف کامل خازن های LTI، علاوه بر ظرفیت خازن، ولتاژ اولیه آن نیز باید مشخص باشد.

رابطه * نشان می دهد که خازن عنصری حافظه دار است، زیرا ولتاژش در لحظه مشخص t، به کلیه مقادیر جریان از ۰ تا t ، و همچنین به مقدار اولیه بستگی دارد. اگر $v_C(۰)=۰$ باشد، $v_C(t)$ تابع خطی از شکل موج $i_C(t)$ خواهد بود. مثال: در مدار زیر، بدلیل اینکه $v_C(۰)=\frac{-۱}{۲}\neq ۰$ است، v(t) تابع خطی از شکل موج i(t) نمی باشد.





نکته: هر خازن LTI با ولتاژ اولیه $V_۰$ را م یتوان به صورت اتصال سری یک خازن با ولتاژ اولیه صفر و یک منبع ولتاژ DC به صورت زیر مدل کرد:

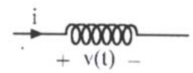
نکته: برای خازن های LTI، تا زمانی که جریان خازن کراندار باشد، ولتاژ خازن نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند[۱].

خازن غیر خطی: خازنی که خطی نباشد.مانند دیود واراکتور

[۱]- در حقیقت این اصل، نتیجه ای از پیوسته بودن بار خازن می باشد.

۱-۳-۳-سلف

عنصری دو سر که در هر لحظه از زمان، جریان آن، توسط رابطه ای در صفحه $i\phi$ می تواند توصیف بشود. به عبارت دیگر، بین مقدار لحظه ای جریان و شار رابطه ای مشخص وجود دارد. از سلف ها بدلیل اینکه در میدان مغناطیسی خود انرژی ذخیره می کنند ، در مدارهای الکتریکی استفاده می شود.



نکته: برای یافتن مشخصه vi یک سلف، کافیست مشخصه $i\phi$ آن را بدانیم و از قانون القای فارادی، $v(t)=\frac{d\phi}{dt}$، استفاده کنیم.

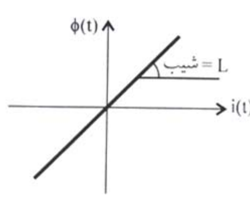
سلف خطی: سلفی که رابطه بین ولتاژ و جریان آن یک رابطه خطی می باشد.[۱](به ازای تمامی زمان ها)

سلف خطی و تغییرپذیر با زمان: سلفی متغیر با زمان، که توسط رابطه خطی $\phi(t)=L(t)i(t)$ توصیف می شود. با توجه به قانون فارادی، $v(t)=\frac{d\phi}{dt}$، و بنابراین رابطه ولتاژ و جریان خازن LTV عبارتست از:

$$v(t)=L(t)\frac{di(t)}{dt}+\frac{dL(t)}{dt}i(t)$$

سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان: نوع خاصی از سلف خطی که در آن L(t) در تمامی زمانها مقداری ثابت دارد.[۲]

$$\phi(t)=Li(t) \quad \Leftrightarrow$$



با استفاده از تعریف $v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}$، روابط ولتاژ و جریان سلف LTI نیز بدست می آیند:

---

[۱]- و یا به طور معادل، سلفی را خطی می گویند که در هر لحظه از زمان، مشخصه آن از مبداء صفحه $i\phi$ میگذرد.

[۲]- مشابه رابطه $G=\frac{1}{R}$، در سلفها نیز رابطه ای به صورت $\Gamma=\frac{1}{L}$ تعریف می شود.(Γ را اندوکتانس معکوس می نامیم.)

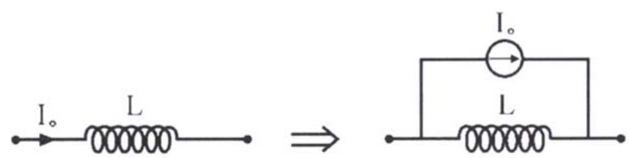
$$\begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t) = i_L(۰) + \dfrac{۱}{L}\displaystyle\int_{۰}^{t} v_L(\tau)d\tau \quad (*) \end{cases}$$

نکته: برای توصیف کامل سلفهای LTI، علاوه بر ظرفیت سلف، جریان اولیه آن نیز باید مشخص باشد.

رابطه(*) نشان می دهد که سلف عنصری حافظه دار است، زیرا جریانش در لحظه مشخص t ، به کلیه مقادیر جریـان از ۰ تـا t ، و همچنین به مقدار اولیه $i_L(۰)$، بستگی دارد.

نکته: تنها در صورتیکه $i_L(۰)=۰$ باشد، $i_L(t)$ تابعی خطی از شکل موج $v_L(t)$ خواهد بود.

نکته: هر سلف LTI با جریان اولیه .I را می توان به صورت اتصال موازی یک سلف با جریان اولیه صفر و یک منبـع جریـان DC بـه صورت زیر مدل کرد:



نکته: برای سلف های LTI، تا زمانی که ولتاژ سلف کراندار باشد، جریان سلف نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند.

سلف غیر خطی: سلفی که خطی نباشد.

۱-۳-۴-منابع وابسته[۱]

مقدار این منابع، به ولتاژ یا جریان شاخه دیگری در مدار وابسته است. به عنوان مثال ترانزیستور، با مدارهایی مدلسازی می شود که شامل منبع ولتاژ(یا جریانی) است که ولتاژ (جریان) آن به جریان (ولتاژ) گذرنده از منبع بستگی ندارد، اما تابعی از ولتاژ یا جریـان شاخه ای دیگر در مدار است. معمولا وابستگی این گونه منابع خطی است.(یعنی مقدار منبع، تابعی خطی از ولتاژ یا جریـان شـاخه ای دیگر می باشد.)

این نوع منابع جزو عناصر چند سر به شما می روند، زیرا ولتاژ یا جریان آنها، توسط ولتاژ یا جریان شاخه ای دیگر کنترل می شود. منابع وابسته در ۴ نوع متفاوت وجود دارند:

---

[۱]- منابع کنترل شده نیز می گویند.

۱- منبع ولتاژ، کنترل شده با ولتاژ

۲- منبع جریان، کنترل شده با ولتاژ

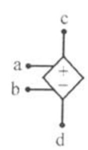
۳- منبع ولتاژ، کنترل شده با جریان

۴- منبع جریان، کنترل شده با جریان

برای متمایز ساختن منابع وابسته از منابع مستقل، از نماد لوزی(به جای دایره) استفاده می شود.

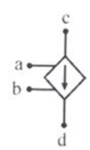
۱- منبع ولتاژ، کنترل شده با ولتاژ: عنصری ۴ سر است که ولتاژش تابعی از ولتاژ شاخه ای دیگر است. ترانسفورماتور می تواند نمونه ای از این عناصر باشد.

μثابتی بدون بعد است که بهره ولتاژ نامیده می شود.



$$\Rightarrow \qquad v_{Cd} = \mu v_{ad}$$

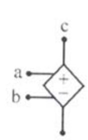
۲- منبع جریان، کنترل شده با ولتاژ: عنصری ۴ سر است که جریانش تابعی از ولتاژ شاخه ای دیگر است. ترانزیستور JFET نمونه ای از این عناصر است.



$$\Rightarrow \qquad i_{Cd} = g v_{ad}$$

g ثابتی با بعد زیمنس است و رسانایی متقابل یا ترانس کندوکتانس نامیده می شود.

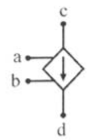
۳- منبع ولتاژ، کنترل شده با جریان: عنصری ۴سر است که ولتاژش تابعی از جریان شاخه ای دیگر است.



$$\Rightarrow \qquad v_{Cd} = r i_{ad}$$

r ثابتی با بعد اهم است و مقاومت متقابل یا ترانس رزیستانس نامیده می شود.

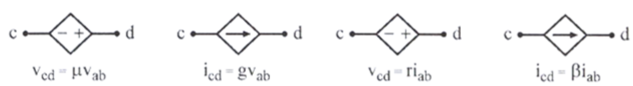
۴- منبع جریان، کنترل شده با جریان: عنصری ۴ سر است که جریانش تابعی از شاخه ای دیگر است.



$$\Rightarrow \qquad i_{Cd} = \beta i_{ad}$$

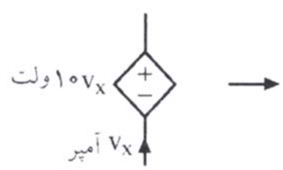
βثابتی بدون بعد است و بهره جریان نامیده م یشود.

نکته: گرچه این منابع کنترلی را به عنوان عناصر ۴ سر معرفی کردیم، اما معمولا پایه های کنترلی را نمایش نمی دهیم[۱].بنابراین نماد رایج این المان ها به شکل زیر می باشد:



۱-۳-۵- قضیه جذب منبع

در شرایط بسیار خاصی که جریان و ولتاژ دو سر یک منبع معلوم باشد، میتوان به جای آن منبع وابسته، یک مقاومت قرار داد. به عنوان مثال:



$$R = \frac{۱۰ v_x}{-v_x} = -۱۰(\Omega)$$

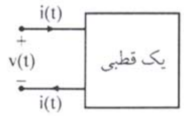
۱-۴- توان و انرژی

۱-۴-۱-یک قطبی

یک جفت از سرهای یک مدار، که در هر لحظه از زمان، جریان لحظه ای که وارد یکی از این سرها می شود، مساوی جریان لحظه ایی است که از سر دیگر خارج می گردد.i(t) و v(t) را به ترتیب جریان قطب و ولتاژ قطب می نامند.

---

[۱]- زیرا به عنوان مثال عبارت $v_{Cd} = \mu v_{ad}$ ، به طور ضمنی به تاثیرگذاری شاخه کنترلی ab بر مقدار منبع اشاره می کند.



تذکر: هرگاه واژه یک قطبی را به کار م یبریم، می خواهیم نشان دهیم فقط ولتاژ و جریان قطب بـرای مـا مهـم اسـت و محتویـات داخل یک قطبی برایمان اهمیتی ندارد.[۱]

توان لحظه ای که در زمان t به یک یک – قطبی تحویل داده می شود، برابر است با:[۲]

$$p(t) = v(t)i(t)$$

و از آنجایی که انرژی انتگرال توان است، انرژی تحویل داده شده مولد به یک قطبی از زمان t_0 تا زمان t برابر است با:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{\Delta t} v(\tau)i(\tau)d\tau$$

عنصر پسیو[۳]: عنصری که در تمامی زمان ها، توان دریافتی آن نامنفی باشد. مانند: دیود تونلی، مقاومت LTI، دیود ژرمانیوم و ...

عنصر اکتیو[۴]: عنصری که پسیو نباشد. منبع ولتاژ و منابع جریان می توانند به صورت عنصر اکتیو عمل کنند.

توان ورودی به مقاومت: با توجه به تعریف توان، $p(t) = v(t)i(t)$:

- چنانچه در لحظه t نقطه کار $Q(i,v)$ در ربع اول یا سوم باشد، مقاومت به صورت عنصری پسیو عمل می کند.

- چنانچه در لحظه t نقطه کار $Q(i,v)$ در ربع دوم یا چهارم باشد، مقاومت به صورت عنصری اکتیو عمل می کند.

نکات:

۱- یک مقاومت خطی، اکتیو است اگر و فقط اگر به ازای برخی زمان ها، $R(t)<0$ باشد.

۲- توان تلف شده در یک مقاومت LTI برابر است با:

$$p(t) = Ri^2(t)$$

---

[۱]- اصلا چون نمی توانیم محتویات داخل این یک قطبی را ببینیم، آنرا جعبه سیاه می نامیم!
[۲]- به شرطی که ولتاژ و جریان قطب مطابق با جهت های قراردادی متناظر باشند.
[۳]- مصرف کننده توان
[۴]- تولید کننده توان

۱-۴-۲- انرژی خازن

اگر مشخصه qv خازن توسط ضابطه $\hat{v}(q)$ تعریف شده باشد. با توجه به تعریف انرزی، می توانیم بنویسیم:

$$w(t_{۰},t)=\int_{q(t_{۰})}^{q(t)}\hat{v}(q_{۱})dq_{۱} \xrightarrow{dq=i(t)dt} w(t_{۰},t)=\int_{t_{۰}}^{t}v(\tau)i(\tau)d\tau$$

بنابراین در حالتی که بار اولیه خازن صفر باشد[۱]، انرژی ذخیره شده در خازن برابر خواهد بود با :

نتیجه: چنانچه در لحظه t نقطه کار Q(v,q) در ربع اول یا سوم باشد، خازن به صورت عنصری پسیو عمل می کند[۲].

نکات:

۱- انرژی ذخیره شده در یک خازن LTI برابر است با:

$$w_c(t)=\frac{q^{۲}(t)}{۲c}=\frac{۱}{۲}Cv^{۲}(t)$$

۲- این تصور که خازن عنصری پسیو می باشد، کاملا نادرست است! در شرایط خاص و توسط مدارهای الکترونیکی واسط، می توانیم خازن هایی با ظرفیت منفی ایجاد کنیم.

۱-۳-۴-انرژی سلف

اگر مشخصه φi سلف ضابطه $\hat{i}(\varphi)$ تعریف شده باشد، با توجه به تعریف انرژی، می توانیم بنویسیم:

$$d\varphi=v(t)dt$$

$$w(t_{۰},t)=\int_{\varphi(t_{۰})}^{\varphi(t)}\hat{i}(\varphi_{۱})d\varphi_{۱}$$

$$w(t_{۰},t)=\int_{t_{۰}}^{t}v(\tau)i(\tau)d\tau$$

---

[۱]- انرژی اولیه ذخیره شده در خازن صفر باشد.

[۲]- از نظر فیزیکی، تحقق خازنی که مخصه qv آن در ربع های دوم و چهارم باشد، غیر عملی است.

بنابراین در حالتی که شار اولیه سلف باشد[۱]، انرژی ذخیره شده در سلف برابر خواهد بود با:

$$w_L(t)=\int_{0}^{\varphi(t)}\hat{i}(\varphi_1)d\varphi_1$$

نتیجه: چنانچه در لحظه t نقطه کار $Q(i,\varphi)$ در ربع اول و سوم باشد، سلف به صورت عنصری پسیو عمل می کند.[۲]

نکات:

۱- انرژی ذخیره شده در یک سلف LTI برابر است با :

$$w_L(t)=\frac{\varphi^2(t)}{2L}=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

۲- این تصور که سلف عنصری پسیو می باشد، کاملا نادرست است! در شرایط خاص و توسط مدارهای الکترونیکی واسط، می توانیم سلف هایی با ظرفیت منفی ایجاد کنیم.

۱-۵-تجزیه و تحلیل مدار

تعیین جریان و ولتاژ تمام شاخه های مدار(یا برخی از آنها)

متغیر شبکه: جریان و ولتاژ هر یک از شاخه های مدار

مدار معادل: مدارهای قطبی زمانی معادل (هم ارز) یکدیگر هستند که دارای مشخصه iv یکسانی باشند.

---

[۱]- انرژی اولیه ذخیره شده در سلف صفر باشد.

[۲]- از نظر فیزیکی، تحقق سلفی که مشخصه φi آن در ربع های دوم و چهارم باشد، غیر عملی است.

۱-۵-۱-اتصال عناصر مدار به یکدیگر

۱-۵-۱-۱-اتصال سری

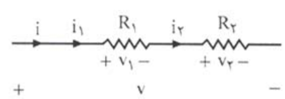
همانطور که میدانیم، چنانچه به صورت سری با یکدیگر بسته شده باشند، جریان گذرنده از آنها برابر است. بنابراین چنانچه بخواهیم مشخصه vi معادل این عناصر را بیابیم(ترسیم کنیم)، کافیست به ازای جریان های یکسان، ولتاژهای متناظر دو سر عناصر را با هم جمع کنیم. الگوریتم کلی رسم مشخصه اتصال سری چند عنصر عبارتست از:

۱- رسم مشخصه v برحسب i[1]

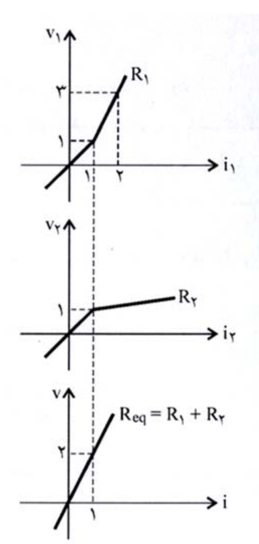
۲- جمع نمودن مشخصه کلیه عناصر[2]

در این بخش به بررسی اتصال سری عناصر مختلف می پردازیم.

الف-مقاومت: مقاومت های غیر خطی R_1وR_2، با مشخصه های نشان داده شده در شکل زیر با یکدیگر سری شده اند. مقاومت معادل ترکیب سری R_1وR_2را بیابید.



روش ترسیمی:



[1]- اگر مشخصه iv داده شده، کافیست همین مشخصه را نسبت به ربع نیمساز اول و سوم قرینه کنید تا مشخصه iv بدست بیاید.

[2]- هنگام جمع نمودن دو خط، شیب ها با هم و عرض از مبداها با هم جمع می شوند.

روش تحلیلی:

$$v_1=\begin{cases} i_1 & i_1\le 1\\ 2i_1-1 & i_1>1\end{cases} \quad , v_2=\begin{cases} i_2 & i_2\le 1\\ 1 & i_2>1\end{cases}$$

با توجه به سری بودن R_1وR_2، جریان های i_1،i_2 و i_3 برابرند و می توانیم بنویسیم:

$$v=v_1+v_2=2i \qquad \Rightarrow \qquad R_{eq}=\frac{v}{i}=2\Omega$$

نکته: همانطور که می بینیم، گرچه R_1وR_2 غیر خطی بودند، اما ترکیب سری آنها مانند یک مقاومت خطی عمل می کند.[1]

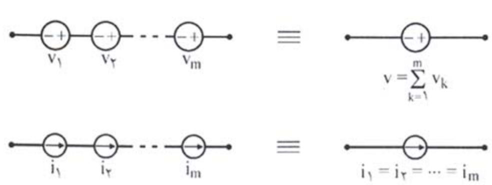
نکات:

۱- در حالتی که مقاومت ها به صورت سری با یکدیگر بسته شده اند، روش تحلیلی تنها زمانی که کلیه مقاومت ها کنترل شده با جریان باشند کاربرد دارد، در حالیکه روش ترسیمی برای مقاومت هایی که کنترل شده با جریان نباشد نیز نمی تواند بکار برود.

۲- اتصال سری m مقاومت کنترل شده با جریان با مشخصه های $v_k=f_k(i_k)$، معادل مقاومتی کنترل شده با جریان است که دارای مشخصه $v=\sum_{k=1}^{m} f_k(i_k)$ می باشد.

۳- مقاومت معادل اتصال m مقاومت خطی سری: $R_{eq}=\sum_{k=1}^{m} R_k$

۴- از آنجایی که منابع ولتاژ و جریان نیز نوعی مقاومت (غیر خطی) به شمار می روند، می توان گفت:



همانطور که می بینیم، اتصال سری منابع جریان تنها زمانی ممکن است که مقدار این منابع مساوی باشد.(زیرا در غیر اینصورت KCL نقض می شود!)

[1]- و چقدر این نکته در عمل کاربرد دارد.

ب- خازن: اتصال سری m خازن LTI ، هریک با ظرفیت C_k و ولتاژ اولیه $v_k(0)$، معادل یک خازن LTIبا ظرفیت $\frac{1}{C}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_k}$، و ولتاژ اولیه $v(0)=\sum_{k=1}^{m}v_k(0)$ می باشد.

ج- سلف: اتصال سری m سلف LTI، هریک با ظرفیت L_k وجریان اولیه یکسان $i(0)$، معادل یک سلف LTI با ظرفیت $L=\sum_{k=1}^{m}L_k$، با همان جریان اولیه $i(0)$ می باشد.

نکته: چنانچه m سلف با جریان های اولیه متفاوت را با هم سری کنیم، با توجه به اینکه شار هر یک از سلف ها پیش از سری شدن $\varphi_k=L_k i_k(0)$ می باشد، و با توجه به اینکه پس از بسته شدن کلید شار مغناطیسی خالص [1] گذرنده از مجموعه سلف ها تغییری نمی کند[2]، می‌توانیم بنویسیم:

$$\varphi'=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k \qquad \Rightarrow \qquad Li(0)=L_1 i_1(0)+L_2 i_2(0)+\ldots+L_m i_m(0)$$

بنابراین، جریان اولیه ترکیب m سلف سری با جریان های اولیه متفاوت برابر خواهد بود با:

$$i(0)=\frac{L_1 i_1(0)+L_2 i_2(0)+\ldots+L_m i_m(0)}{L_1+L_2+\ldots+L_m}$$

۱-۵-۱-۲- اتصال موازی

همانطور که می دانیم، چنانچه چند عنصر به صورت موازی با یکدیگر بسته شده باشند، ولتاژ آنها با هم برابر است. بنابراین چنانچه بخواهیم مشخصه iv معادل این عنصر را بیابیم(ترسیم کنیم)، کافیست به ازای ولتاژهای یکسان، جریان های متناظر عناصر را با هم جمع کنیم. الگوریتم کلی رسم مشخصه اتصال موازی چند عنصر عبارتست از:

۱- رسم مشخصه i برحسب v

۲- جمع نمودن مشخصه کلیه عناصر

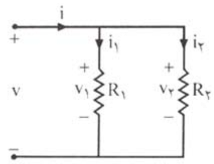
در این بخش به بررسی اتصال موازی عناصر مختلف می پردازیم.

---

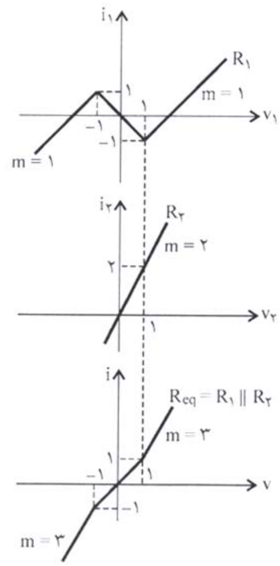
[1]- جمع جبری شارهای مغناطیسی

[2]- طبق اصل بقای شار

الف- مقاومت: مقاومت های غیر خطی R_1وR_2، با مشخصه های نشان داده شده در شکل زیر با یکدیگر مـوازی شـده‌انـد. مقاومـت معادل ترکیب موازی R_1وR_2را بیابید.



روش ترسیمی:



روش تحلیلی:

$$i_1 = \begin{cases} v_1 + 2 & v_1 < 1 \\ -v_1 & -1 \le v_1 \le 1 \\ v_1 - 2 & v_1 > 1 \end{cases} \qquad , \qquad i_2 = 2v_2$$

با توجه به موازی بودن R_1وR_2، ولتاژهای v_2،v_1 و v_3 برابرند و می توانیم بنویسیم:

$$i = i_1 + i_2 = \begin{cases} 3v + 2 & v < 1 \\ v & -1 \le v_1 \le 1 \\ 3v - 2 & v > 1 \end{cases}$$

همانطور که می بینیم، گرچه R_1 مقاومت کنترل شده با ولتاژ نیست، اما ترکیب موازی آن با R_2، به مقاومتی کنترل شده بـا ولتـاژ تبدیل شده است.

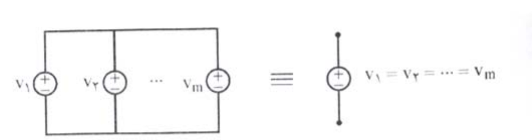
نکات:

۱- در حالتی که مقاومت ها به صورت موازی با یکدگر بسته شده اند، روش تحلیلی تنها زمانی که کلیه مقاومت ها کنترل شده بـا ولتاژ باشند کاربرد دارد، در حالیکه روش ترسیمی برای مقاومت هایی که کنترل شده با ولتاژ نباشند نیز کاربرد دارد.

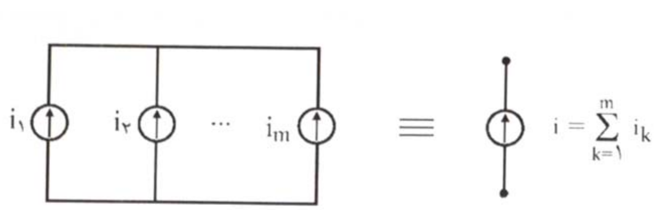
۲- اتصال موازی m مقاومت کنترل شده با ولتاژ با مشخصه های $i_k = g_k(v_k)$، معادل مقاومتی کنترل شده با ولتاژ است که دارای مشخصه $i = \sum_{k=1}^{m} g_k(v_k)$ می باشد.

۳- مقاومت معادل اتصال m مقاومت خطی موازی: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}$

۴- از آنجایی که منابع ولتاژ و جریان نیز نوعی مقاومت (غیر خطی) به شمار می روند، می توان گفت:



همانطور که می بینیم، اتصال موازی منابع ولتاژ تنها زمانی ممکن است که مقدار این منابع مساوی باشد. (زیـرا در غیـر اینصـورت KVL نقض می شود!)



ب- خازن: اتصال موازی m خازن، هریک با ظرفیت C_k و ولتاژ یکسان $v(0)$ ، معادل یک خازن LTI با ظرفیت $C = \sum_{k=1}^{m} C_k$، بـا همان ولتاژ اولیه $v(0)$ می باشد.

نکته: چنانچه m خازن با ولتاژ های اولیه متفاوت را با هم موازی کنیم، با توجه به اینکه بار هریک از خازن ها پیش از موازی شدن $q_k = C_k v_k(0)$ می باشد، و با توجه به اینکه پس از بسته شدن کلید بار الکتریکی خالص[1] موجود در مجموعه خازن ها تغییری نمی کند[2]، می توانیم بنویسیم:

$$q' = \sum_{k=1}^{m} q_k \qquad \Rightarrow \qquad Cv(0) = C_1 v_1(0) + C_2 v_2(0) + \ldots + C_m v_m(0)$$

بنابراین، ولتاژ اولیه ترکیب mخازن موازی با ولتاژهای اولیه متفاوت برابر خواهد بود با :

$$v(0) = \frac{C_1 v_1(0) + C_2 v_2(0) + \ldots + C_m v_m(0)}{C_1 + C_2 + \ldots + C_m}$$

ج- سلف: اتصال موازی m سلفLTI ، هریک با ظرفیت L_k و جریان اولیه $i_k(0)$، معادل یک سلف LTI با ظرفیت $\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{L_k}$، و جریان اولیه $i(0) = \sum_{k=1}^{m} i_k(0)$ می باشد.

۱-۵-۲- روش های تحلیل مدارهای مقاومتی

نقطه شروع تحلیل مدار, عبارتست از:

۱- نوشتن کلیه معادلات KCL

۲- نوشتن کلیه معادلاتKVL

۳- نوشتن کلیه معادلات شاخه ها

اختلاف اصلی بین روش های مختلف تحلیل، در تعداد متغیرها و نوع متغیرهایی است که نهایتا به عنوان متغیرهای مدار در نظر گرفته می شوند.(و سایر متغیرها را می توان برحسب آنها بیان کرد.)

دو روش کلاسیک در تحلیل مدارات، روش های تحلیل مش[1]و گره[2] هستند. با اعمال این رو شها به دارات خطی، بـه دسـتگاهی از معادلات جبری خطی می رسیم که با روش هایی مانند روش کرامر قابل حل هستند.

---

[1]- جمع جبری
[2]- اصل بقای بار

۱-۵-۲-۱- روش تحلیل گره

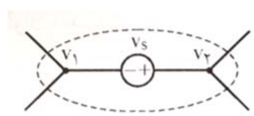
همانطور که از نام این روش بر می آید، در این روش ولتاژ گره ها را به عنوان متغیرهای مدار در نظـر مـی گیـریم و مـی خـواهیم مقدرا ولتاژ این گره ها را بیابیم.مبنای این روش KCL است و برای تحلیل هر نوع مداری (صفحه ای یا غیر صـفحه ای) مـی توانـد بکار برود.[3] الگوریتم تحلیل مدارات توسط این روش، به صورت زیر می باشد.

مرحله اول- انتخاب گره زمین[4](مبنا): هیچ محدودیتی در محل این گره وجود ندارد و هریک از گره های مدار می توانند به عنـوان زمین انتخاب شوند. اما بهتر است در صورتی که در مدار منبع ولتاژ مستقل وجود دارد، گره زمین را یک سـر منبـع ولتـاژ در نظـر بگیرید[5] و در غیر اینصورت، گره زمین را گره ای در نظر بگیرید که تعداد شاخه بیشتری به آن وصل شده است.

همچنین، گرچه ولتاژ گره زمین می تواند مقداری بجز صفر باشد، اما برای کاهش محاسبات بهتر است ولتـاژ ایـن گـره را همیشـه صفر در نظر بگیرید.

مرحله دوم- تعیین ولتاژ گره های معلوم: مثلا در شکل زیر، ولتاژ گره A معلوم است:

مرحله سوم- قراردادن منابع ولتاژ در ابر گره[6] و نوشتن روابط ابر گره ها: چنانچه بین دو گره با ولتـاژ مجهـول، منبـع ولتـاژ وجـود داشت، آن منبع را درون یک ابر گره قرار می دهیم:



$$\Rightarrow \qquad v_2 - v_1 = e_s$$

نکته: رابطه فوق، رابطه ابر گره نام دارد و ابزاری مناسب برای رد گزینه در سوالات تستی می باشد.

مرحله چهارم-اعمال KCL به کلیه گره ها و (ابر گره ها)، به جز گـره زمـین: هنگـام نوشـتن ایـن معـادلات، سـعی کنیـد فقـط از متغیرهای ولتاژ گره استفاده کنید.

قرارداد: جریان خارج شونده از یک گره را مثبت، و جریان وارد شونده به یک گره را منفی در نظر می گیریم.

---

[1]-mesh analysis

[2]- Nodal analysis

[3]- برخلاف روش تحلیل مش که فقط برای مدارات صفحه ای کاربرد دارد.

[4]- این گره را با نماد نشان می دهیم.

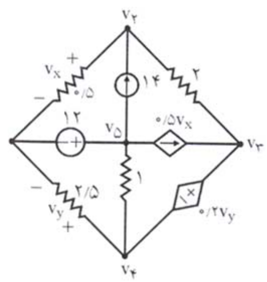
[5]- در حقیقت با این کار، ولتاژ سر دوم منبع ولتاژ دیگر مجهول نیست!

[6]- چنانچه تعدادی از گروه های مدار را توسط یک سطح بسته به ۲ دسته تفکیک کنیم، به قسمی که دسته ای از گره ها، درون سـطح فـوق، و دسـته دیگـر بیرون از آن باشند، این سطح بسته را (که مانند یک گره بزرگ است)، ابر گره (سوپر گره) می نامیم.

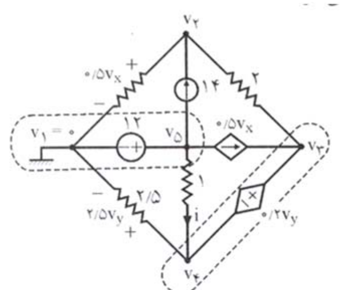
مرحله پنجم- حذف متغیرهای کنترلی: چنانچه در مدار از منابع وابسته استفاده شده باشد، باید این متغیرهای کنترلی را برحسب متغیرهای ولتاژ گره بیان کنیم.(سعی کنید این مرحله ار همزمان با مرحله چهارم انجام دهید.)

با انجام این مراحل در یک مدار مقاومتی، به یک دستگاه معادلات جبری خطی "n معادله-nمجهول" می رسیم[۱] که با روشی مانند روش کرامر قابل حل است.

مثال : مقادیر ولتاژ را در مدار زیر بیابید.



مرحله اول- انتخاب گره زمین: بهترین محل برای زمین در این مدار، گره v_1 است. (زیرا با این کار، ولتاژ دو گره از پنج گره مدار معلوم می شود.)



مرحله دوم- تعیین ولتاژ گره هایمعلوم: با انتخاب v_1 به عنوان زمین مدار، ولتاژ گره v_5 نیز معلوم است: $v_5 = 12(V)$

مرحله سوم: قرار دادن منابع ولتاژ در ابر گره و نوشتن روابط ابر گره ها: دو منبع در مدار داریم که منجر به روابط ابر گره زیر می شوند:[۲]

$$\begin{cases} v_5 - v_1 = 12 \\ v_3 - v_4 = 0.2v_y \end{cases}$$

---

[۱]- n تعداد کل گره ها، به جز گره زمین می باشد.$n=n_t-1$

[۲]- واضح است که رابطه $v_5-v_1=12$ ، رابطه جدیدی نیست و در حقیقت بیانی دیگر از مرحله دوم است.

مرحله چهارم- اعمالKCL به کلیه گره ها (و ابرگره ها) بجز گره زمین:

KCL در گره v_2

KCL درابر گره v_3v_4

$$\begin{cases} \dfrac{v_2 - 0}{0.5} - 14 + \dfrac{v_2 - v_3}{2} = 0 & (2) \\ \dfrac{v_3 - v_2}{2} - 0.5v_x + \dfrac{v_4 - 12}{1} + \dfrac{v_4 - 0}{2.5} & (3) \end{cases}$$

مرحله پنجم- حذف متغیرهای کنترلی:

$$\begin{cases} v_x = v_2 \\ v_y = v_4 \end{cases}$$

نهایتا با جاگذاری روابط فوق در روابط ۱، ۲ ، ۳، به دستگاه ۳ معادله- ۳ مجهول زیر می رسیم:

$$\begin{cases} v_3 - 1.2v_4 = 0 \\ 2.5v_2 - 0.5v_3 = 14 \\ -v_3 + 0.5v_3 + 1.4v_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 8(v) \\ v_3 = 12(v) \\ v_4 = 10(v) \end{cases}$$

بنابراین ولتاژ کلیه گره ها معلومند و تحلیل مدار کامل است. مثلا اگر جریان گذرنـده از مقاومـت ۱ اهـم را بخـواهیم، مـی تـوانیم بنویسیم:

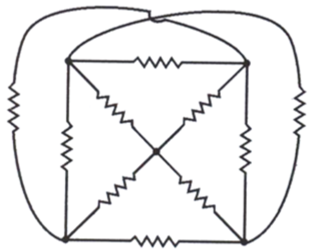
$$i = \frac{v_5 - v_4}{1} = \frac{12 - 10}{1} \Rightarrow i = 2(A)$$

۱-۵-۲-۲- روش تحلیل مش

مبنای این روش KVL است. در این روش جریان مش ها[1] را به عنوان متغیرهای مدار در نظر می گیریم. توجه کنید که مش فقـط در مدارهای مسطح[2] می تواند تعریف شود و لذا روش تحلیل مش جامعیت روش تحلیل گره را ندارد. به عنوان مثـال، مـدار شـکل زیر یک مدار غیر صفحه ای می باشد و نمی توانیم مجموعه ای از مش های یکتا را برای آن تعریف کنیم.

[1]- ساده ترین حلقه ای که شاخه ای (حلقه ای)درون آن وجود نداشته باشد، مش نامیده می شود.

[2]- مدار مسطح مداری است که بتوان شکل آن را روی یک صفحه کاغذ چنان رسم کرد که هیچ دو شاخه ای همدیگر را بجز در گره ها قطع نکنند.



الگوریتم تحلیل مدارات توسط این روش، به صورت زیر می باشد.

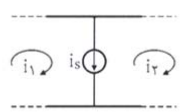
مرحله اول- نسبت دادن متغیرهای جریان به هریک از مش های مدار: گرچه انتخاب جهت جریان مش ها کاملا اختیاری است ولی ما همیشه این جریان ها را در جهت عقربه های ساعت در نظر می گیریم. در نتیجه:

- جریان شاخه ای که فقط در یک مش قرار دارد(شاخه های بیرونی) برابر با جریان همان مش است.

- جریان شاخه ای که بین دو مش مشترک است(شاخه های بیرونی)، برابر با تفاضل جریان های آن دو مش است.

مرحله دوم-تعیین جریان مش های معلوم: چنانچه منبع جریانی در یک مش بیرونی وجود داشته باشد، جریان آن مش معلوم است.

مرحله سوم- قرار دادن منابع جریانی که بین دو مش قرار دارند در ابر مش و نوشتن روابط ابر مش ها: چنانچه بین دو مش، منبع جریان وجود داشت، آن منبع را درون یک ابر مش قرار می دهیم:



$$\Rightarrow \qquad i_{۱} - i_{۲} = i_s$$

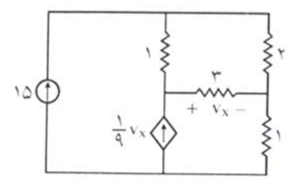
نکته: روابط فوق، رابطه ابر مش نام دارد و ابزاری مناسب برای رد گزینه در سوالات تستی می باشد.

مرحله چهارم- اعمال KVL به کلیه مش‌ها (و ابر مش‌ها): هنگام نوشتن این معادلات، سعی کنید فقط از متغیرهای جریان مش استفاده کنید.

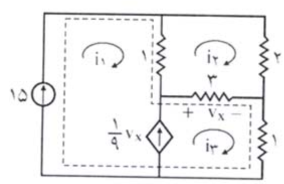
مرحله پنجم- حذف متغیرهای کنترلی: چنانچه در مدار از منابع وابسته استفاده شده باشد، باید این متغیرهای کنترلی را برحسب متغیرهای جریان مش بیان کنیم. (سعی کنید این مرحله را همزمان با مرحله پنجم انجام دهید.)

با انجام این مراحل در یک مدار مقاومتی خطی، به یک دستگاه معادلات جبری خطی l معادله- l مجهول می رسیم[۱] که بـا روشـی مانند روش کرامر قابل حل است.

مثال: مقادیر جریان مش را در مدار زیر بیابید.



مرحله اول- نسبت دادن متغیر های جریان به هر یک از شاخه های مدار.



مرحله دوم- تعیین جریان مش های معلوم: با توجه به اینکه منبع جریان ۱۵ آمپری در مش بیرونی قرار گرفته است، داریم:

$i_۱=۱۵(A)$

مرحله سوم- قراردادن منابع جریانی که بین دو مش قرار دارند در ابر مش و نوشتن روابط ابر مش ها:

$$\begin{cases} i_۱ = ۱۵ \\ i_۳ - i = \frac{۱}{۹} v_x \end{cases} \Rightarrow i_۳ - ۱۵ = \frac{۱}{۹} v_x$$

مرحله چهارم- اعمال KVL به مش ها(و ابر مش ها):

$$۱\times(i_۲-۱۵)+۲i_۲+۳(i_۲-i_۳)=۰ \quad \Rightarrow \quad ۲i_۲-i_۳=۵ \qquad (۲)$$

تذکر: KVL در ابر مش $i_۲i_۳$ ، کمکی به حل مسئله نمی کند.(زیرا این کار مستلزم به کار بردن متغیر مجهول $V_۱$ ،نشان دهنده ولتاژ دو سر منبع جریان ۱۵ آمپری است.)

---

[۱]- l تعداد کل مش های مدار است که برابر با تعداد شاخه ها منهای تعداد گره ها به علاوه یک می باشد: $l=b-n_۱+۱$

مرحله پنجم- حذف متغیرهای کنترلی:

$$v_x = 3(i_3 - i_2)$$

نهایتا با جاگذاری رابطه فوق در روابط ۱ و ۲، به دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول زیر می رسیم:

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 = 45 \\ 2i_2 - i_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_2 = 11(A) \\ i_3 = 17(A) \end{cases}$$

بنابراین ولتاژ کلیه مش ها معلومند و تحلیل مدار کامل است. مثلا اگر توان تلف شده در مقاومت ۳ اهم را بخواهیم، می توانیم بنویسیم:

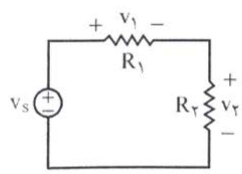
$$p = 3 \times (i_3 - i_2)^2 = 3(17 - 11)^2 \quad \Rightarrow \quad p = 108(w)$$

جدول زیر به مقایسه روش های تحلیل گره و مش به منظور انتخاب بهترین روش تحلیل یک مدار می پردازد:

	روش گره	**روش مش**
کاربرد	برای کلیه توپولوژی های مداری کاربرد دارد.	فقط برای مدارات صفحه ای می تواند به کار رود.
تعداد معادله	۱- تعداد ابر گره ها- تعداد گره ها	تعداد ابر مش ها- تعداد مش های مدار
مبنای تحلیلی	معادلات KCL	معادلات KVL
متغیرهای مدار	ولتاژ گره ها	جریان مش ها

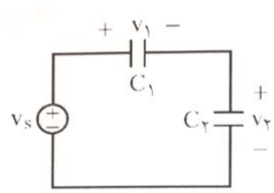
۱-۵-۳- روابط مستقیم در حالت سری

۱- مقاومت: در حالت سری، جریان مقاومت ها یکسان است و ولتاژ با نسبت مستقیم تقسیم می شود:



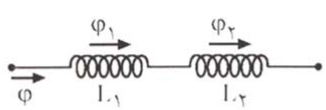
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_s \times \dfrac{R_1}{R_1+R_2} \\ v_2 = v_s \times \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \end{cases}$$

۲- خازن: در حالت سری، بار (جریان) خازن ها یکسان است و ولتاژ با نسبت عکس تقسیم می شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_s \times \dfrac{C_2}{C_1+C_2} \\ v_2 = v_s \times \dfrac{C_1}{C_1+C_2} \end{cases}$$

سلف: در حالت سری، جریان سلف ها یکسان است و شار با نسبت مستقیم تقسیم می شود:

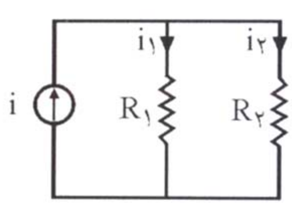


$$\xrightarrow{\varphi=\varphi_1+\varphi_2} \begin{cases} \varphi_1 = \varphi \times \dfrac{L_1}{L_1+L_2} \\ \varphi_2 = \varphi \times \dfrac{L_2}{L_1+L_2} \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

۱-۵-۴- روابط تقسیم در حالت موازی

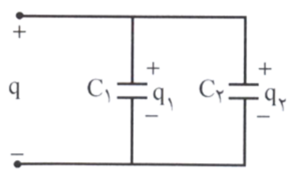
۱- مقاومت: در حالت موازی، ولتاژ مقاومت ها یکسان است و جریان با نسبت عکس تقسیم می شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = i \times \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \\ i_2 = i \times \dfrac{R_1}{R_1+R_2} \end{cases}$$

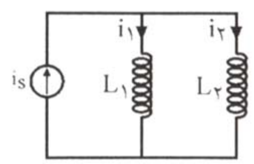
۲- خازن: در حالت موازی، ولتاژ خازن ها یکسان و بار با نسبت مستقیم می شود:

$$q = q_{۱} + q_{۲}$$



$$\xrightarrow{q=q_1+q_2} \begin{cases} q_1 = q \times \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} \\ q_2 = q \times \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

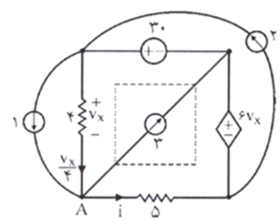
۳- سلف: در حلت موازی، شار (ولتاژ) سلف ها یکسان است و جریان به نسبت عکس تقسیم می شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_s \times \dfrac{L_2}{L_1 + L_2} \\ i_2 = i_s \times \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} \end{cases}$$

علاوه بر روش های تحلیل گره و مش، تحلیل دیگری نیز وجود دارد که معمولا بهینه تر و کوتاهتر از سایر روش های تحلیـل مـی باشد. در این روش ابتدا با KCL زدن در کلیه گره های مدار، جریان کلیه شاخه ها را برحسب جریان های مشخص شده روی شکل محاسبه می کنیم.[1] سپس در حلقه ای که کمترین تعداد متغیرهای مجهول را دارد، KVL می زنیم.

مثال: مقدار v_x را در مدار شکل زیر بیابید.



ولتاژ دو سر مقاومت ۴ اهم، v_xاست. بنابراین با توجه به قانون اهم، جریان گذرنده از آن $\frac{v_x}{۴}$است. با KCL زدن در گره A، داریم:

$$i = ۱ + \frac{v_x}{۴} - ۳ \Rightarrow \quad i = \frac{v_x}{۴} - ۲$$

[1]- البته ممکن است مجبور شویم جریانهای معمولی را به برخی از شاخه ها نسبت دهیم.

تنها حلقه ای که ولتاژ دو سر کلیه شاخه های آن معلوم است، حلقه نشان داده شده روی شکل است. با KVL زدن در ایـن حلقـه، می توانیم بنویسیم:

$$۳۰ + ٦۰v_x - ٥i - v_x = ۰ \xrightarrow{i=\frac{v_x}{٤}-۲} v_x = \frac{-۳۲}{۳}(v)$$

۱-۵-۵- مشخص سازی مدارات خطی در دو سر آن

در بسیاری موارد، فقط رفتار کلی یک مدار خطی در ۲ سر آن برایمان اهمیت دارد. به عبارت دیگر می خواهیم بدون آگاهی از نوع و توپولوژی عناصر بکار رفته در شبکه، آن شبکه را به طور کامل، و تنها با استفاده از مشخصه و ولتاژ- جریان شبکه، توصیف کنیم. بدین منظور مدارهای معادل تونن و نورتن را معرفی کنیم.

برخی از کاربرد های مدارهای معادل تونن و نورتن عبارتند از:

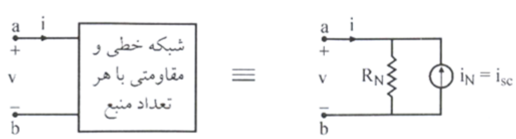
- محاسبه نقطه کار مدارات غیر خطی

- محاسبه ماکزیمم توانی که می توان از یک تقویت کننده قدرت گرفت.

- محاسبه باری که به ازای آن، A_vیاA_iماکزیمممی شود.

۱- مدار معادل نورتن

چنانچه از دو سر دلخواه a و b هر مدار مقاومتی خطی، به آن مدار نگاه کنیم، رابطه بـین v و i در سـرهای a و b را مـی تـوان از رابطه خطی $i = \frac{v}{R_{th}} + i_{sc}$ بیان کرد. نورتن ثابت کرده است که R_{th} مقاومت دیده شده از سرهای a و b و i_{sc} و جریان گذرنده از سرهای a و b در حالت اتصال- کوتاه است:



رابطه بین پارامترهای تونن و نورتن: برای تبدیل مدارهای معادل تونن و نورتن به یکدیگر، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$e_{oc} = R_{th} i_{sc}$$

با توجه به رابطه فوق، برای تعین مدارهای تونن و نورتن، تنها کافی است دو تا از سه مقدار i_{sc}،e_{oc} و R_{th} را بدانیم.

۲- محاسبه همزمان معادل تونن و نورتن یک مدار

بدین منظور کافیست منبع جریانی با مقدار i را به دو سر مدار وصل کنیم و سعی کنیم ولتاژ v دو سر آن را محاسبه کنیم[1]:

- چنانچه بتوان ولتاژ را به صورت $v = \alpha i + \beta$ بیان کرد، α همان مقاومت تونن و β همان ولتاژ مدار-باز است.

- چنانچه بتوان جریان را به صورت $i = \alpha' v + \beta'$ بیان کرد، $\frac{1}{\alpha'}$ همان مقاومت نورتن(تونن) و β' همان جریان اتصال- کوتاه است.

۳- محاسبه مقاومت تونن(نورتن)

چنانچه فقط یافتن مقاومت تونن دو سر یک مدار مطلوب باشد، می توانیم به جای محاسبه همزمان معادل تونن یا نورتن مدار، از روش های زیر استفاده کنیم.

روش اول- این روش به صورت زیر می باشد:

۱- صفر کردن منابع مستقل[2]

۲- اعمال منبع ولتاژ آزمایشی v(یا منبع جریان آزمایشیi) به دو سر مدار و محاسبه جریان i خارج شونده از منبع ولتاژ (یا محاسبه ولتاژ v دو سر منبع جریان) و استفاده از رابطه $R_{th} = \frac{v}{i}$ برای محاسبه مقاومت ورودی.[3]

روش دوم- این روش شامل تحلیل ۲ شبکه متفاوت است و به صورت زیر می باشد:

۱- مدار- باز نمودن دو سر مدار و محاسبه e_{oc}

۲- اتصال – کوتاه نمودن دو سر مدار و محاسبه i_{sc}

۳- استفاده از رابطه $R_{th} = \frac{e_{as}}{i_{sc}}$

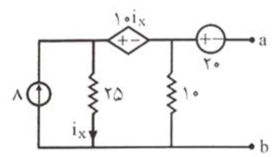
---

[1]- البته می توانیم منبع ولتاژی با مقدار v را به دو سر مدار وصل کنیم و جریان گذرنده از آن را محاسبه کنیم.

[2]- یعنی منابع ولتاژ مستقل را اتصال کوتاه و منابع جریان مستقل را اتصال باز کنیم.

[3]- گاها راحت تر است که به جای اعمال یک منبع آزمایشی با مقدار نامعلوم، از منبعی با مقدار معلوم(مثلا منبع جریان ۱ آمپری) استفاده کنیم.

مثال: در مدار شکل روبرو هریک از کمیت های i_{sc}،e_{oc} و R_{th} را جداگانه محاسبه کرده و درستی رابطه $e_{as} = R_{th}.i_{th}$ را بررسی کنید.



محاسبه e_{oc}: با نوشتن KVL در مش وسط به دست می آوریم:

$$۱۰i_x + ۱۰(۸ - i_x) - ۲۵i_x = ۰ \Rightarrow i_x = ۳.۲$$
$$e_{as} = -۲۰ + ۱۰(۸ - ۳.۲) = ۲۸ \text{ ولت}$$

محاسبه i_{sc}:ابتدا شاخه ab را اتصال- کوتاه می کنیم . به سادگی دیده می شود کـه جریـان گذرنـده از مقاومـت ۱۰ اهمـی برابـر $۸ - i_x - i_{sc}$ است. با نوشتن KVL در مش وسط داریم:

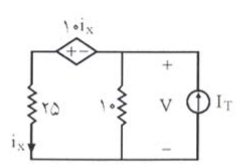
$$۱۰i_x + ۱۰(۸ - i_x - i_{sc}) - ۲۵i_x = ۰ \Rightarrow ۲i_{sc} + ۵i_x = ۱۶ \qquad (۱)$$

با توجه به مش سمت راست بدیهی است که :

$$۲۰ = ۱۰(۸ - i_x - i_{sc}) \Rightarrow i_x - i_{sc} = ۶$$

از حل معادلات (۱)و (۲) نتیجه می شود که $i_{sc} = \frac{۱۴}{۳},\ i_x = \frac{۴}{۳}$

محاسبه R_{th}: برای محاسبه R_{th} کلیه منابع نابسته را صفر کرده و منبع جریان I_T را به مدار وصل می کنـیم ولتـاژ V دو سـر آن را حساب می کنیم.



با اعمال KVL در مش سمت چپ داریم:

$$۱۰i_x + ۱۰(I_T - i_x) - ۲۵i_x = ۰ \Rightarrow i_x = \frac{۲}{۵}I_T$$

جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $I_T - i_x$ است پس:

$$V = ۱۰(I_T - i_x) = ۱۰(I_T - \frac{۲}{۵} I_T) = ٦ I_T$$

و بنابراین:

$$R_{th} = \frac{V}{I_T} = ٦\Omega$$

بدیهی است که رابطه $e_{as} = R_{th}.i_{th}$ برقرار است.

۵- تبدیل منابع

با استفاده از تبدیلات تونن-نورتن، مدارات معادل زیر بدست می آیند که در ساده سازی و تحلیل مدارات، کاربرد زیادی دارند:

اما هنگام استفاده از این ساده سازی، به ۲ نکته توجه کنید:

۱- هنگام تبدیل منابع دقت کنید که سر پیکان جریان با پایانه مثبت منبع ولتاژ متناظر است.

۲- چنانچه جریان یا ولتاژ یک مقاومت خاص متغیر کنترل کننده یک منبع وابسته است، نباید مقاومت را هنگام ساده سازی بکـار برد.[۱]

۳- چنانچه جریان یا ولتاژ یک مقاومت خاص پاسخ مورد نظر مدار است، نباید این مقاومت را هنگام ساده سازی بکار برد.

۶- قضیه جمع آثار[۲]

پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع مستقل به یک مدار خطی[۳] ،برابر با مجموع پاسخ های حاصل از اعمال هریک از این منابع به تنهایی است، به شرط آنکه سایر منابع مستقل صفر شده باشند.

---

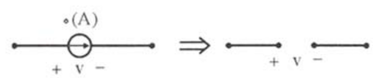
[۱]- نکته ساده ای است، اما هنگامی فرد چنان غرق در حل مساله میشود که هنگام ساده سازی مدار، متغیر کنترلی هم حذف می کند!

[۲]- اصل برهم نهی و قضیه سوپر پوزیشن نیز می گویند.

[۳]- در حقیقت علت اصلی دشواری تحلیل مدارات غیر خطی، عدم امکان اعمال این قضیه به آنهاست.

نکته: هنگامی که منبع ولتاژی صفر شود، افت ولتاژ دو سر آن صفر است، ولی جریان گذرنده از آن می تواند صفر نباشد:

نکته: هنگامی که منبع ولتاژی صفر شود، جریان گذرنده از آن صفر است، ولی افت ولتاژ دو سرش میتواند صفر نباشد:

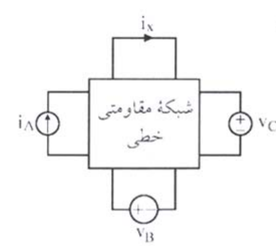


توجه کنید جمع آثار در حالت کلی حجم عملیات لازم برای تحلیل مدار را کامل نمی کند، زیرا به تحلیل چند مدار دیگر منجر می شود، ولی برای تشخیص نقش منابع مختلف مدار در ایجاد پاسخ ها بسیار مفید است.

معمولا اگر مدار منبع وابسته داشته باشد، به کارگیری قضیه جمع آثار تحلیل مدار را آسانتر نمی کند. (زیرا همیشه حداقل دو منبع فعالند: منبع مستقل و بقیه منابع وابسته)

نکته بسیار مهم: قضیه جمع آثار را تنها به پاسخ های خطی می توانیم اعمال کنیم. بنابراین این قضیه را در مورد پاسخ های غیرخطی مانند توان، بکار نبرید

مثال: در مدار شکل زیر:



:

- وقتی منابع i_A و v_Bفعالند و v_C=۰ است، ۲۰(A):
- وقتی منابع i_A وv_Cفعالند و v_B=۰ است، ۵-(A)=:
- وقتی هر سه منبع فعالند، i_x=۱۲(A) می باشد.

اگر i_A وv_C دو برابر و v_Bمنفی شود، i_x چقدر خواهد بود؟

نمایش دهیم، با توجه به خطی بودن شبکه، میتوانیم از قضیه جمع آثار برای تحلیل شبکه فوق استفاده کنیم:

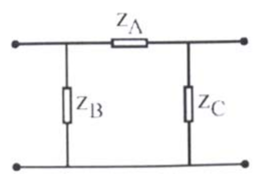
$$\begin{cases} i_{xA} + i_{xB} = ۲۰ \\ i_{xA} + i_{xC} = -۵ \\ i_{xA} + i_{xB} + i_{xC} = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{xA} = ۳(A) \\ i_{xB} = ۱۷(A) \\ i_{xC} = -۸(A) \end{cases}$$

با توجه به خطی بودن شبکه، با دو برابر شدن i_A و v_C ، پاسخ i_x ناشی از آنها نیز ۲ برابر می شود و با منفی شدن v_B، پاسخ i_x ناشی از آن نیز منفی می شود و داریم:

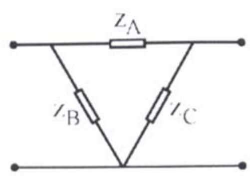
$$\left.\begin{aligned} i'_{xA} &= 2i_{xA} = 6(A) \\ i'_{xC} &= 2i_{xC} = -16(A) \\ i'_{xB} &= -i_{xB} = -17(A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad i'_x = i'_{xA} + i'_{xB} + i'_{xC} = -27(A)$$

۷- شبکه های ستاره و مثلث[1]

در بسیاری از موارد(بخصوص برای ساده سازی شبکه ها پیش از اقدام به تحلیل گره یا مش) استفاده از تبدیل ستاره- مثلث، کمک زیادی به تحلیل شبکه می نماید.



یا



شبکه مثلث(π):

شبکه ستاره(T):

روابط تبدیل مثلث به ستاره	روابط تبدیل ستاره به مثلث
$Z_1 = \dfrac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$	$Z_A = \dfrac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$
$Z_2 = \dfrac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$	$Z_B = \dfrac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$
$Z_1 = \dfrac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$	$Z_C = \dfrac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$

[1]- شبکه های ستاره و مثلث را به ترتیب با نام شبکه های T و π نیز می شناسند.

دقت کنید که دیمانسیون هر دو تبدیل ستاره به مثلث و مثلث به ستاره، $\frac{\Omega^{۲}}{\Omega}$ می باشد. (رهیافتی برای حفظ نمودن این روابط)

حالات خاص زیر نیز، بسیار به کارتان می آید!

۸- استفاده از تقارن در تحلیل مدارات

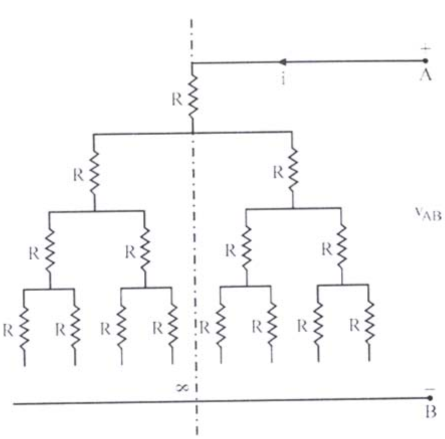
برخی از مدارات ممکن است دارای توپولوژی متقارنی باشند که همین تقارن، تعیین متغیرهای ولتاژ و جریان را در آن مدار ساده میکند. دو رهیافت در تحلیل این گونه مدارات بکار می آید:

۱- وقتی جریان i: در محور تقارن مدار به n شاخه یکسان می رسد، جریان هریک از این شاخه ها $\frac{i}{n}$ خواهد بود.

۲- گره های متقارن نسبت به محور تقارن، دارای ولتاژ یکسان هستند.[۱]

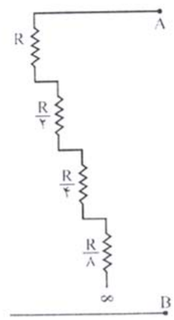
با توجه به ۲ نکته فوق، در چنین مداراتی می توانیم مدار را روی محور تقارنش تا کنیم. در نتیجه این کار، مقاومت های متقارن نسبت به محور تقارن، روی هم م یافتند و برابر $R \parallel R = \frac{R}{۲}$ می شوند.

مثال: مقاومت معادل بین پایانه های A و B را بیابید.



[۱]- در حقیقت رهیافت های ۱و ۲، یک بیان با دو صورت متفاوت هستند.

روش اول- با استفاده از روش تقارن، مدار را حول محورهای تقارنش تا می کنیم:



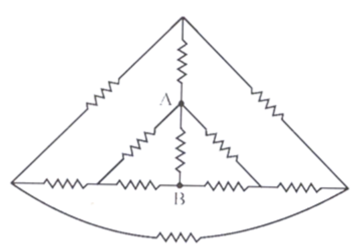
$$R_{AB} = R + \frac{R}{۲} + \frac{R}{٤} + \frac{R}{۸} + ... = R\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = ۲R$$

روش دوم- با توجه به تقارن موجود در مدار، جریان نیز به صورت متقارن در شاخه ها تقسیم می شود و می توانیم بنویسیم:

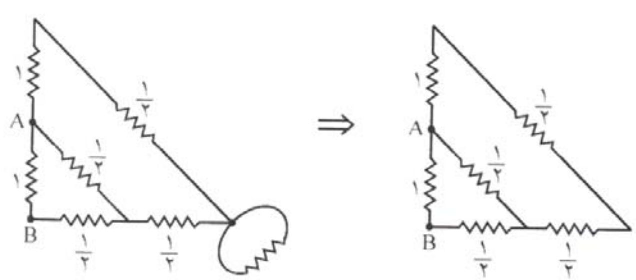
$$v_{AB} = R\left(i + \frac{i}{۲} + \frac{i}{٤} + \frac{i}{۸} + ...\right) = Ri\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n \Rightarrow \quad Ri \times ۲$$

با توجه به رابطه $R_{AB} = \frac{v_{AB}}{i}$، خواهیم داشت: $R_{AB} = ۲R$

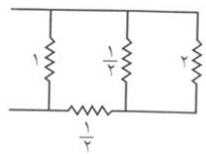
مثال: در مدار متقارن شکل مقابل، تمام مقاومت ها یک اهم هستند. مقاومت دیده شده بین نقاط A و B برابر بـا چنـد اهم است؟



مدار را حول محور تقارنAB تا می کنیم:



مقاومت R=۱ تنها از یک نقطه به مدار متصل شده و بنابراین تاثیری در تحلیل مدار ندارد و می توانیم آن را حذف کنیم:



$$\Rightarrow \qquad R_{AB} = \frac{۹}{۱۹}(\Omega)$$

امپدانس ورودی و خروجی ترانسفورماتور

با در نظر گرفتن روابط جریان و ولتاژ برای مدار مقابل داریم.

$$v_۲ = \frac{n_۲}{n_۱} v_۱ \quad , \quad i_۲ = \frac{n_۱}{n_۲} i_۱ \quad , \quad v_۲ = z_L i_۲ \tag{۸۵}$$

$$\frac{n_۲}{n_۱} v_۱ = z_L \frac{n_۱}{n_۲} i_۱ \qquad \Rightarrow \qquad Z_{in} = \frac{v_۱}{i_۱} = \left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)^۲ z_L$$

به طور مشابه می توان به سادگی به نتایج زیر مطابق مدارهای زیر دست یافت.

$$Z_{out} = \left(\frac{n_۲}{n_۱}\right)^۲ Z_s \tag{۸۶}$$

$$Z_{out} = \left(\frac{N_۲}{N_۱+N_۲}\right)^۲ Z_s \tag{۸۷}$$

$$Z_{in} = \left(\frac{N_۱+N_۲}{N_۲}\right)^۲ Z_L$$

$$Z_{out} = \left(\frac{N_۱+N_۲}{N_۱}\right)^۲ Z_s$$

$$Z_{out} = \left(\frac{N_۱+N_۲}{N_۱}\right)^۲ Z_s \tag{۸۸}$$

$$Z_{in} = \left(\frac{N_۱}{N_۱+N_۲}\right)^۲ Z_L$$

توجه ۳۹: در تعیین امپدانس ورودی و خروجی مکان نقاط ترانس بی تاثیر است.

$$Z_{in}(s) = \frac{۱}{\frac{a^۲}{Z_L} + G_x(a-۱)^۲} \quad , \quad a = \frac{n_۲}{n_۱}$$

$$R_x = \infty \qquad \Rightarrow \quad Z_{in} = \left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)^۲ Z_L$$

مثال ۲۸: برای مدار مقابل، امپدانس ورودی را به دست آورید.

حل:

$$ni_۲ = ni_۱ \quad \Rightarrow \quad i_۲ = i_۱ = \frac{I_{in}}{۲}$$

$$KVL: -\frac{v_{in}}{n} - \frac{v_{in}}{n} + ni_1 z_L = 0$$

$$z_{in} = \frac{v_{in}}{I} = \frac{n^2}{4} z_L$$

ژیراتور

ژیراتور یک عنصر مداری است که نماد آن مطابق شکا مقابل بوده و معادلات توصیف کننده چنین است.

$$\begin{aligned} V_1 &= aI_2 \\ V_2 &= -aI_1 \end{aligned} \quad (۸۹)$$

عدد a یک ثابت بوده و نسبت گردشی خوانده می شود.

ژیراتور یک عنصر خطی تغییر ناپذیر با زمان است که نه از محیط خارج انرزی جذب کرده و نه به آن انرژی میدهد.

ژیراتور از قضیه هم پاسخی پیروی نمی کند. بنابراین یک شبکه نامتقابل است.

ژیراتور به فرم مقابل، با معادلات زیر توصیف می گردد.

$$\begin{aligned} V_1 &= -aI_2 \\ V_2 &= aI_1 \end{aligned} \quad (۹۰)$$

امپدانس ورودی و خروجی ژیراتور

به کمک معادلات ژیراتور امپدانس ورودی و خروجی، به فرم روابط زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} V_1 = aI_2 \\ V_1 = -aI_2 \end{cases} \quad , \quad V_2 = -R_L I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{a}{R_L} I_1$$

(۹۱)

$$V_1 = aI_2 = a\frac{a}{R_L}I_1 \qquad \Rightarrow \qquad Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{a^2}{R_L}$$

$$Z_{out} = \frac{a^2}{Z_s}$$ (۹۲)

(۹۳)

$$Z_{in} = \frac{a^2(Z + Z_L)}{a^2 + ZZ_L}$$

$$Z = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{a^2}{Z_L}$$

$$Z = 0 \Rightarrow Z_{in} = Z_L$$

توجه ۴۰: تغییر جهت نسبت به چرخش a تاثیری در نتیج به دست آمده برای Z_{in} و Z_{out} ندارد.

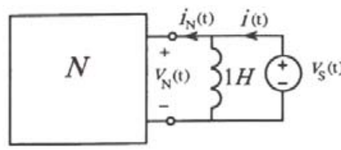
توجه ۴۱: مطابق شکل، ژیراتور ختم شده به خازن را می توان با سلف تعویض نمود.

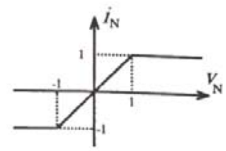
توجه ۴۲: در هنگام تحلیل مدارهای الکتریکی دارای ژیراتور، برای این که علامت های ولتاژ و جریان ژیراتور اشتباه نشود و رعایت معادلات(۹۰) جهت فلش نسبت گردش aرا پاه منفی ولتاژ در نظر بگیرید.

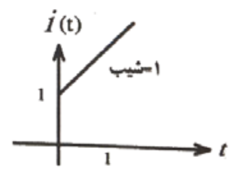
توجه ۴۳: به علامت ولتاژ و جهت جریان ژیراتور مدارات شکل زیر دقت نمایید.

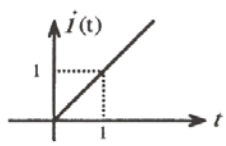
سئوالات طبقه بندی شده

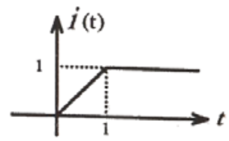
سئوال ۱-۱: منحنی مشخصه شبکه تک قطبی N به صورت زیر است. چنانچــه ولتــاژ ورودی $v_s(t)$ پلــه واحــد باشــد، مقدار $i(t)$ به کدام صورت زیر خواهد بود؟ $(i_L(0^-)=0)$

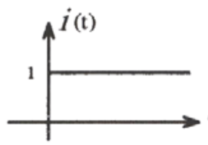




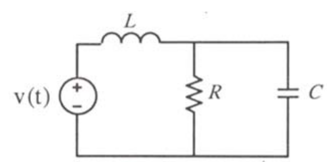
۱)


۲)


۳)


۴)


سئوال ۱-۲: معادلات حلقوی مدار زیر برابر با کدام گزینه است؟



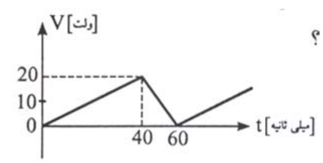
۱)
$$\begin{cases} -v(t)+L\dfrac{di_1}{dt}=R(-i_1-i_2)=0 \\ R(-i_1-i_2)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t -i_2 d\tau+v_C(0)=0 \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} v(t)+L\dfrac{di_1}{dt}=R(i_1-i_2)=0 \\ R(-i_1-i_2)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t -i_2 d\tau+v_C(0)=0 \end{cases}$$

۳)
$$\begin{cases} v(t)-L\dfrac{di_1}{dt}+R(i_1-i_2)=0 \\ R(i_1+i_2)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2 d\tau+v_C(0)=0 \end{cases}$$

۴)
$$\begin{cases} v(t)+L\dfrac{di_1}{dt}+R(i_1+i_2)=0 \\ R(i_1+i_2)-\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2 d\tau+v_C(0)=0 \end{cases}$$

سئوال ۱-۳: تغییرات ولتاژ دو سر خازن ۱۰۰μF مطابق شکل داده شده است اختلاف بار خازن در لحظـات t=۶۰ و t=۴۰ میلی ثانیه چند میلی کولن است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

سئوال ۱-۴: اگر N خازن $C_1, C_2, \ldots, C_N$ را با شرایط اولیه $v_{C1}(0^-), v_{C2}(0^-), \ldots$ به صورت موازی با یکدیگر متصـل نماییم، ولتاژ آنها پس از اتصال برابر است با:

۱) $v_C(0^+) = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} v_{Ck}(0^-)}{N}$

۲) $v_C(0^+) = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} v_{Ck}(0^-) C_k}{N}$

۳) $v_C(0^+) = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{N} v^2_{Ck}(0^-) C_k}{\sum_{k=1}^{N} C_k}}$

۴) $v_C(0^+) = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} v_{Ck}(0^-) C_k^2}{\sum_{k=1}^{N} C_k^2}$

سئوال ۱-۵: یک ولتاژ برابر $v_C(t)=V_m Cos(\omega t+\beta)$ را به دو سر یک خازن خطی اعمال شده مقدار صفر تا ماکزیمم دامنه جریان خازن و همچنین زاویه فاز ولتاژ خازن نسبت به جریان برابر با کدام گزینه زیر است؟

۱) $i_C(t)=-V_m C\omega Cos(\omega t+\beta)$

۲) $i_C(t)=V_m C\omega Cos(\omega t+\beta-\dfrac{\pi}{2})$

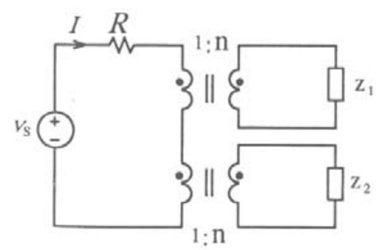
۳) $i_C(t)=V_m C\omega Cos(\omega t+\beta+\dfrac{\pi}{2})$

۴) $i_C(t)=V_m C\omega Cos(\omega t+\beta)$

سئوال ۱-۶: تابع جریان و ولتاژ یک مدار الکتریکی در t>۰ به صورت $i=25te^{-2000t}$ و $V=2\times10^4 te^{-3000t}$ بیان می شود. در چه زمانی بر حسب میلی ثانیه توان انتقالی به ماکزیمم می رسد؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۰/۵

سئوال ۱-۷: در مدار مقابل، امپدانس ورودی کدام است؟



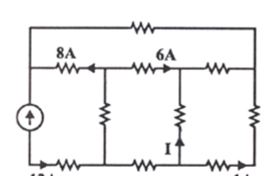
۱) $R+n^2(z_1+z_2)$

۲) $R+\dfrac{1}{n^2}(z_1+z_2)$

۳) $R+\dfrac{1}{n}(z_1+z_2)$

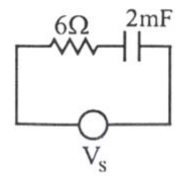
۴) $R+\dfrac{1}{n^2}(z_1+z_2)^2$

سئوال ۱-۸: جریان I در مدار مقابل چند آمپر است؟



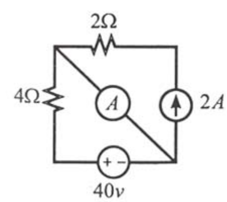
۱) ۳- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نامشخص

سئوال ۱-۹:در مدار الکتریکی شکل نشان داده شده تغییرات بار خازن به صورت $q = t^2 - 2t + 1$ می باشد. انرژی مصرفی در بازه زمانی ۰ تا ۲ ثانیه چند ژول است؟



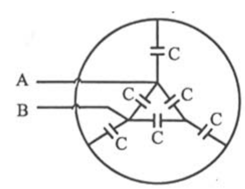
۱۲(۱ ۱۶(۲ ۱۹۲(۳ ۹۶(۴

سئوال ۱-۱۰: در مدار مقابل آمپرمتر چند آمپر را نشان می دهد؟



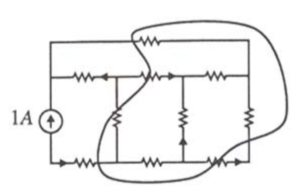
۲(۱ ۸(۲ ۱۰(۳ ۱۲(۴

سئوال ۱-۱۱: ظرفیت معادل خازن ها در مدار شکل داده شده از دو نقطه AB چند C است؟



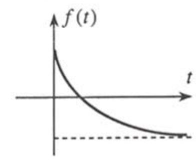
۰/۵ (۱ ۲(۲ ۱(۳ ۱/۲(۴

سئوال ۱-۱۲: در مدار مقابل جمع جریان های وارد شونده به مسیر بسته چند آمپر است؟(کلیه مقاومت ها یک اهمی هستند)



۳ (۱ -۱(۲ ۰(۳ ۱(۴

سئوال ۱-۱۴: کدامیک از گزینه های زیر نشان دهنده تابع تحریک مقابل میتواند باشد؟(t>۰)



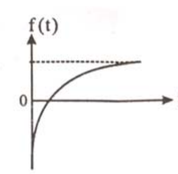
۱) $3(1-e^{-t})-2$

۲) $-3(1-e^{-t})+2$

۳) $3(1-e^{t})-2$

۴) $3(1-e^{-t})+2$

سئوال ۱-۱۵:کدامیک از گزینه های زیر نشان دهنده تابع تحریک مقابل می تواند باشد؟ $(t \geq 0)$



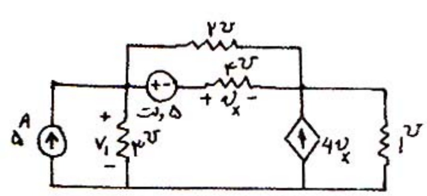
۱) $3(1-e^{-t})-2$

۲) $2(1-e^{-t})-2$

۳) $3(1-e^{t})-2$

۴) $۳(۱-e^{-t})+۲$

سئوال ۱-۱۶: در مدار شکل زیر ولتاژ V_1 را بدست آورید؟



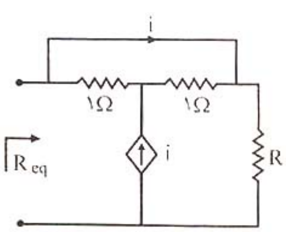
۱) $\frac{۳۵}{۳۹}$چ

۲) $\frac{۱۴}{۲۷}$

۳) $-\frac{۱۴}{۲۷}$

۴) $-\frac{۳۵}{۳۹}$

سئوال ۱-۱۷: در شبکه مقابل R_{eq} برابر است با:



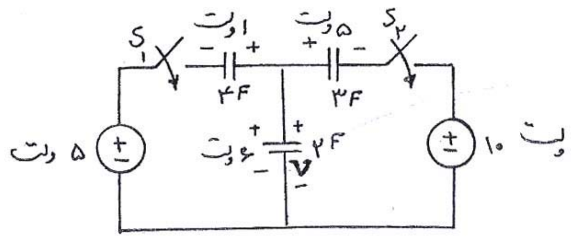
۱) ۲R

۲) ۳R

۳) $\frac{۱}{۲}R$

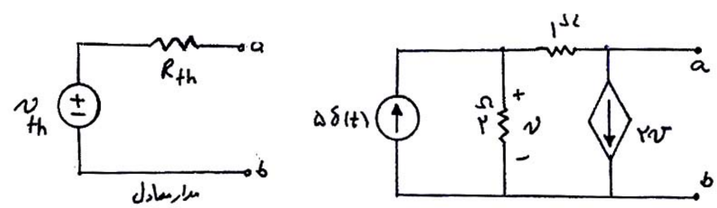
۴) $\frac{۱}{۳}R$

سئوال ۱-۱۸: کلیدهای S_1و S_2در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می شوند. ولتاژ V دو سر خازن ۲ فارادی بعــد از بسته شدن کلیدها کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

سئوال ۱-۱۹: مدار معادل تونن مدار زیر برابر است با:



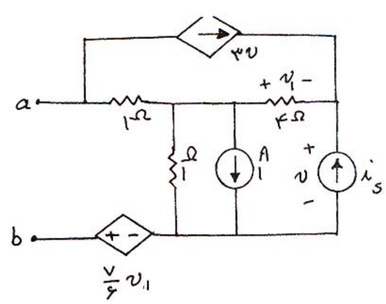
۱) $v_{th} = \delta(t),\ R_{th} = ۲\Omega$

۲) $v_{th} = ۲\delta(t),\ R_{th} = ۳\Omega$

۳) $v_{th} = -۲\delta(t),\ R_{th} = -\frac{۳}{۵}\Omega$

۴) $v_{th} = -\delta(t),\ R_{th} = \frac{۳}{۵}\Omega$

سئوال ۱-۲۰: مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است؟



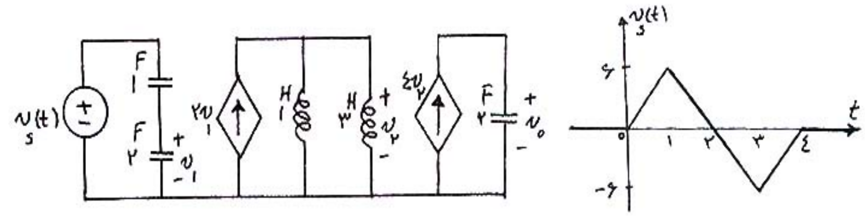
۱) $\frac{۵}{۱۱}\Omega$

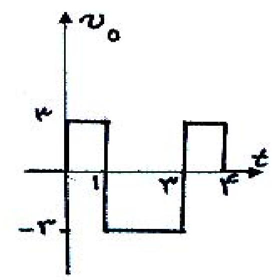
۲) ۱Ω

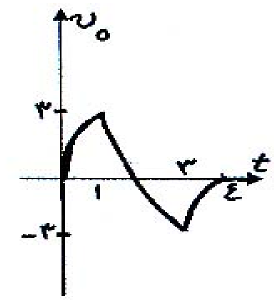
۳) ۳Ω

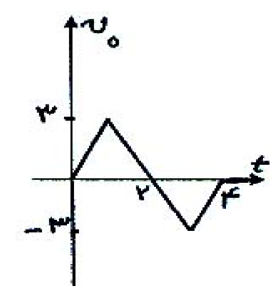
۴) $\frac{۳۹}{۱۱}\Omega$

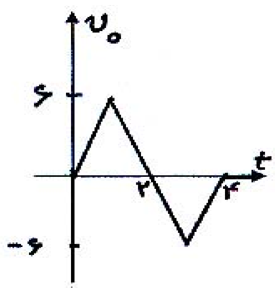
سئوال ۱-۲۱: شکل موج $v_s(t)$ مدار شکل مقابل به صورت زیر داده شده است. شکل موج ولتاژ خروجی V_o کدام است؟(شرایط اولیه صفر)




۱)


۲)

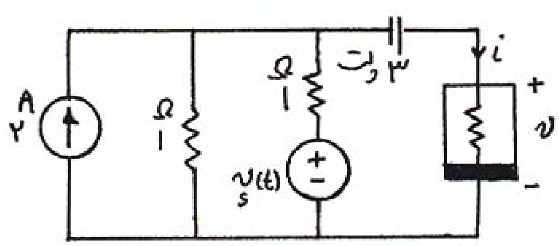

۳)


۴)

سئوال ۱-۲۲: در مدار شکل زیر، ولتاژ v(t) دو سر مقاومت غیر خطی به کدام جواب نزدیک تر است؟

$$(v_s(t)) = ۰.۱۸\cos ۲t$$

مشخصه مقاومت غیر خطی: $i = \begin{cases} v^۲, & v \geq ۰ \\ ۰, & v < ۰ \end{cases}$



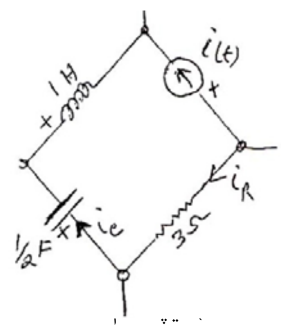
۱) $v(t) = ۲ + (۰.۰۳\cos ۲t)$ ولت

۲) $v(t) = ۲ + (۰.۰۶\cos ۲)$ ولت

۳) $v(t) = ۴ + (۰.۰۱۸\cos ۲t)$ ولت

۴) $v(t) = ۴ + (۰.۰۳۶\cos ۲t)$ ولت

سئوال ۱-۲۳: در شکل مقابل مقادیر زیر داده شده است:

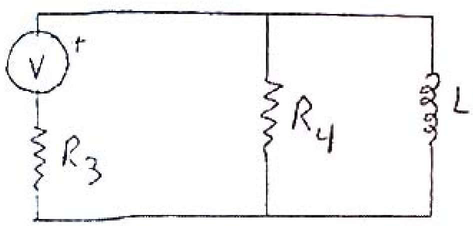


$$i_R = ۶e^{-e} \qquad V_L = ۱۰t$$
$$i_C = ۵\sin ۱۰t \qquad i_t = ۱۷A$$

مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان در زمان t=۰ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱۷V　　۲) ۱۵V　　۳) ۲۱V

سئوال ۱-۲۴: در مدار مقابل تعیین نمایید که کدام گزینه زیر صحیح است؟



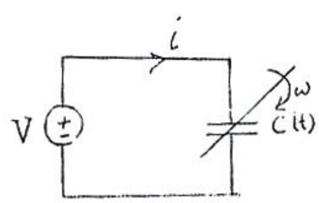
۱) R_3 و R_4 موازی یکدیگرند.

۲) R_3 و R_4 موازی و سری نمی باشند.

۳) R_3 و R_4 با یکدیگر سری می باشند.

۴) ولتاژ دو سری R_3 و R_4 با یکدیگر برابر است.

سئوال ۱-۲۵: خازن مدار زیر توسط یک موتور به صورت سینوسی با زمان برابر با رابطه $C(t) = C_۰(۱+\sin \omega t)$ تغییر می کند در صورتیکه ولتاژ دو سر خازن V(t)=V یک مقدار ثابت باشد، معادله جریان i(t) برابر با کدام گزینه است؟



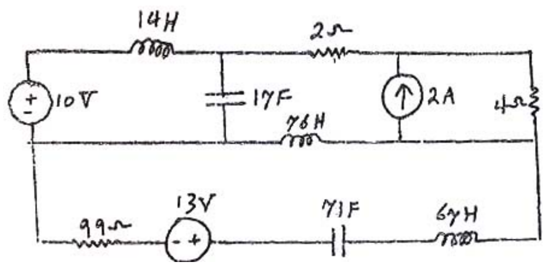
۱) $i(t) = V\omega C_۰ \cos \omega t$

۲) $i(t) = VC_۰ \sin \omega t$

۳) $i(t) = V\omega C_۰ \sin \omega t$

۴) $i(t) = \omega C_۰ \cos \omega t$

سئوال ۱-۲۶: محاسبه ولتاژ دو سر منبع جریان در مدار زیر در حالیکه $t \to ۰$ میل نماید برابر بـا کـدام گزینـه زیـر است؟



۱) $v_a = \frac{۱۰}{۳}V$

۲) $v_a = \frac{۳}{۱۰}V$

۳) $v_a = \frac{۲۸}{۳}V$

۴) $v_a = \frac{۳}{۲۸}V$

سئوال ۱-۲۷: ولتاژ v_{ab} دو سر مقاومت خطی مدار زیر توسط ولتمتری با مقاومت r اندازه‌گیری شده است. مقدار خطای $\frac{\Delta v_{ab}}{v_a}$ به علت اثر گذاری ولتمتر برابر با کدام گزینه است؟

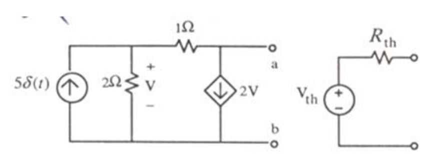
۱) $\frac{\Delta v_{ab}}{v_a} = \frac{-R_T R}{r(R_T + R)}$

۲) $\frac{\Delta v_{ab}}{v_a} = \frac{-R_T}{R_T + R}$

۳) $\frac{\Delta v_{ab}}{v_a} = \frac{-R}{r(R_T + R)}$

۴) $\frac{\Delta v_{ab}}{v_a} = \frac{+R_T R}{r(R_T + R)}$

سئوال ۱-۲۸: مدار معادل تونن مدار زیر برابر است با:



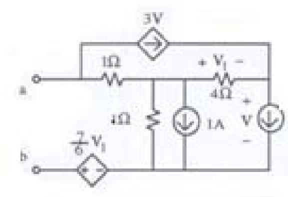
۱) $v_{th} = \delta(t),\ R_{th} = ۲\Omega$

۲) $v_{th} = \delta(t),\ R_{th} = ۳\Omega$

۳) $v_{th} = -۲\delta(t),\ R_{th} = \frac{۳}{۵}\Omega$

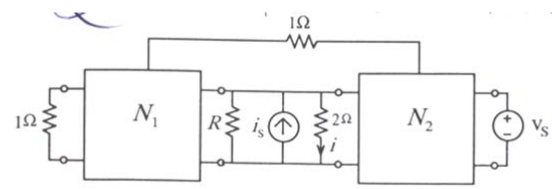
۴) $v_{th} = -۶\delta(t),\ R_{th} = \frac{۳}{۵}\Omega$

سئوال ۱-۲۹: مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است؟



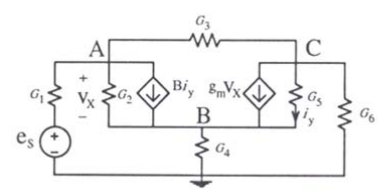
۱) $\frac{۵}{۱۱}\Omega$　　۲) ۱Ω　　۳) ۳Ω　　۴) $\frac{۳۹}{۱۱}\Omega$

سئوال ۱-۳۰: در شکل روبرو مدارهای N_1 و N_2از مقاومت های خطی مثبت تشکیل شده و به ازای $R = ۲\Omega$, $i = \frac{۱}{۳}i_s + \frac{۱}{۴}v_s$ است. به ازای چه مقدار R، توان آن ماکزیمم است؟



۱) -۱Ω　　۲) ۱Ω　　۳) ۲Ω　　۴) $\frac{۲}{۵}\Omega$

سئوال ۱-۳۱: در مدار شکل مقابل فرض کنید تمام مقاومت ها سه برابر شوند و مقدار β ثابت نگه داشته شود. مقدار g_mچگونه تغییر کند تا مقادیر ولتاژ شاخه ها تغییر نکند؟



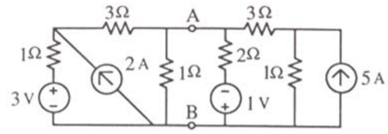
۱) g_mتغییر نکند.

۲)g_mدر ۳ ضرب شود.

۳)g_m در ⅓ ضرب شود.

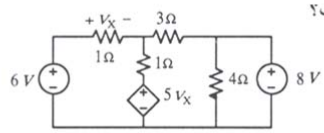
۴) نمی‌توان بدون داشتن مقادیر مقاومت‌های مدار اظهار نظر قاطع کرد.

سئوال ۱-۳۲: در مدار شکل مقابل v_{AB} چند ولت است؟



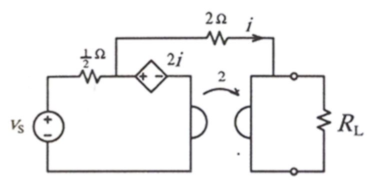
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

سئوال ۱-۳۳: ولتاژ v_x در مدار مقابل، چند ولت است؟



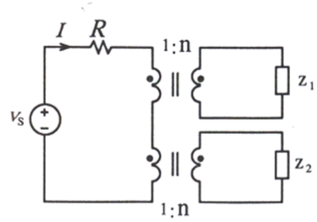
۱) ۵/۲۷ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۵/۲۷- ۴) ۰/۷۲-

سئوال ۱-۳۴: در مدار شکل مقابل، مقدار R_L چند اهم باشد تا ماکزیمم توان به بار برسد؟



۱) ۲Ω ۲) ۸Ω ۳) ۴Ω ۴) ۶Ω

سئوال ۱-۳۵: در مدار مقابل، امپدانس ورودی کدام است؟



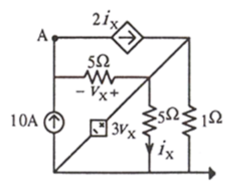
۱) $R + n^{2}(z_1 + z_2)$

۲) $R + \frac{1}{n^{2}}(z_1 + z_2)$

۲) $R + \frac{1}{n}(z_1 + z_2)$

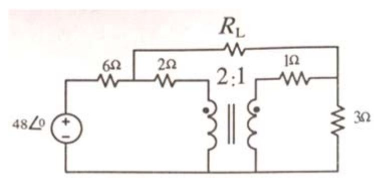
۴) $R + \frac{1}{n^{2}}(z_1 + z_2)$

سئوال ۱-۳۶: مقدار i_x در مدار مقابل، چقدر است؟



۱) 6A　　۲) ۴/۵A　　۳) ۳/۳A　　۴) ۵A

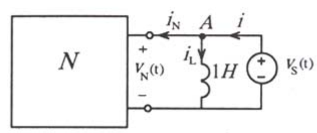
سئوال ۱-۳۷: در مدار مقابل، R_Lچقدر باشد تا ماکزیمم توان را دریافت کند؟

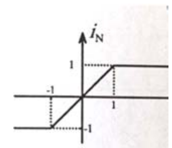


۱) $\frac{8}{5}\Omega$　　۲) 6Ω　　۳) $\frac{11}{3}\Omega$　　۴) 3Ω

حل سئوالات طبقه بندی شده

حل۱-۱: $i_L(۰^+) = i_L(۰^-) = ۰$





در لحظه $t=۰^+$ داریم:

$$v_N(۰^+) = v_s(۰^+) = ۱V$$

به کمک مشخصه $i_N - v_N$، به ازای $i_N(۰^+) = ۱A, v_N(۰^+) = ۱V$ به دست می آید.

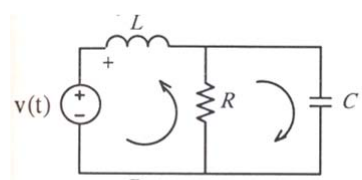
$$KLC\ A: i(۰^+) = i_N(۰^+) + i_L(۰^+) = ۱A$$

$$t > ۰\ : i_L(t) = \frac{۱}{L}\int_{۰}^{t} v_L(t)dt + i_L(۰) = tu(t) \Rightarrow i_L(۱) = ۱A$$

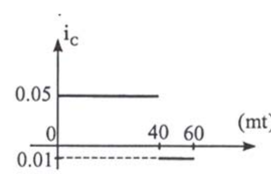
$$v_n(۱) = v_s(۱) = ۱v \ \Rightarrow \ i_N(۱) = ۱A$$

$$i(۱) = i_N(۱) + i_L(۱) = ۱ + ۱ = ۲A$$

حل۱-۲: با در نظر گرفتن مسیرهای KVL مطابق شکل و با رعایت علامت + برای سلف روابط گزینه (۳) به دست می آید.



حل۱- ۳ $q = \int_{t_۰}^{t} i_c dt \Rightarrow q = (۶۰ - ۴۰) \times ۱۰^{-۳} \times ۰.۰۱ = ۰.۲mC$



حل۱-۴: با توجه به توضیحات متن، گزینه (۲) درست است.

حل۱-۵:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = C[-V_m\omega Sin(\omega t+\beta)] = V_m C\ \omega Cos\left(\omega t+\beta+\frac{\pi}{۲}\right)$$

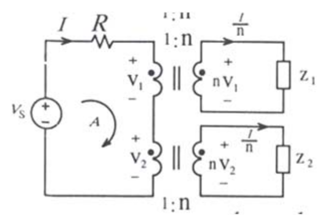
حل۱-۶:

$$p = vi = (۲\times ۱۰^{۴} te^{-۲۰۰۰t})(۲۵te^{-۲۰۰۰t}) = ۵\times ۱۰^{۵} t^{۲} e^{-۴۰۰۰t}$$

$$\frac{dp}{dt} = ۵\times ۱۰^{۵}(۲te^{-۴۰۰۰t} - ۴۰۰۰t^{۲}e^{-۴۰۰۰t}) = ۵\times ۱۰^{۵}(۲t-۴۰۰۰t^{۲})e^{-۴۰۰۰t} = ۰$$

$$۲t - ۴۰۰۰t^{۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad t = ۰\ , t = ۰.۵ms\ ec$$

حل۱-۷:



$$nv_۱ = \frac{۱}{n}z_۱ \quad \Rightarrow \quad v_۱ = \frac{۱}{n^{۲}}z_۱$$

$$nv_۲ = \frac{۱}{n}z_۲ \quad \Rightarrow \quad v_۲ = \frac{۱}{n^{۲}}z_۲$$

$$KVLA : RI + v_۱ + v_۲ = v_s$$

$$\left(R+\frac{۱}{n^{۲}}z_۱+\frac{۱}{n^{۲}}z_۲\right)I = v_s \quad \Rightarrow \frac{v_s}{I} = R + \frac{۱}{n^{۲}}(z_۱+z_۲)$$

حل۱-۸: در جهت نشان داده شده مسیر بسته KCL می زنیم(کات ست).

$$Q : ۱ + I + ۶ + ۸ - ۱۲ + ۰ \quad \Rightarrow \quad I = -۳A$$

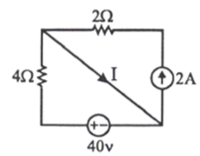
حل۱-۹:

$$i_R = i_C = \frac{dq}{dt} = ۲t - ۲ \ \Rightarrow \quad p_R = Ri^{۲} = ۲۴(t-۱)^{۲}$$

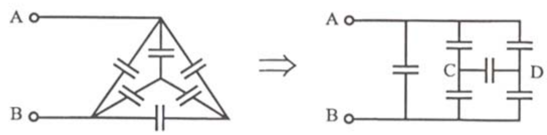
$$w_R = \int_۰^۲ ۲۴(t-۱)^{۲}dt = ۲۴\int_۰^۲ (t^{۲}-۲t+۱)dt = ۲۴\left[\frac{t^{۳}}{۳} - t^{۲} + t\right]_۰^۲$$

$$w_R = ۲۴\left(\frac{۸}{۳} - ۴ + ۲\right) = ۲۴\times\frac{۲}{۳} = ۱۶J$$

حل۱-۱۰: آمپر متر شبیه اتصال کوتاه عمل م یکند و لذا منبع جریان ۲ آمپری به طور کامل از اتصال کوتاه عبور می کنـد ومنبـع ولتاژ به همراه مقاومت ۴ اهمی جریان ۱۰ آمپری را ایجاد می کند.I=۲+۱۰=۱۲A



حل۱-۱۱: مدار درحالت پل و تستون است. لذا خازن بین C و D از مدار حذف می گردد.$C_{AB} = \frac{C}{۲} + \frac{C}{۲} + C = ۲C$



حل۱-۱۲: مسیر بسته هر المان را تنها یک بار قطع می کند و همانند یک گره مرکب است پس مجموع جریان های وارد شونده به داخل آن صفر است.

حل۱-۱۴: از جمله ویژگی های منحنی f(t) عبارت است از $f(\infty) < ۰, f(۰^+) > ۰$ با چک کردن گزینه هـا تنهـا گزینـه (۲) هر دو ویژگی را دارا است.

حل۱-۱۵: گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به اینکه تابع تحریک $f(\infty)$ برابر یک مقدار ثابت و مثبت و $f(۰)$ یک مقدار ثابت منفی است. بین گزینه ها تنها گزینـه ۱ دارای این ویژگی است.

حل۱-۱۶: گزینه (۱) صحیح است.

ولتاژ دو سر مقاومت ۴ موهو ، v_x می باشد. بنابراین جریان گذرنده از لین مقاومت $۴v_x$ می باشد.

با توجه به اینکه، جریان سایر شاخه ها با KCL زدن در سایر گره های مدار، بصورت زیر بدست می آید(فقط جریان شاخه هـا روی شکل نمایش داده شده اند):

با KVL زدن در حلقه های وسطی و بالایی مدار خواهیم داشت:

$$۵ + V_x + ۵ - ۳V_۱ + ۴V_x - V_۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۰ + ۵V_۲ - ۴V_۱ = ۰ \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{۵ - V_۱ - ۴V_x}{۲} - V_x - ۵ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۵ + ۳V_۱ + ۶V_x = ۰ \quad (\mathrm{II})$$

با محاسبه v_x از رابطه (II) و جایگذاری آن در رابطه (I) خواهیم داشت:

$$V_x=-\frac{۵+۳V_۱}{۶}\ \ \Rightarrow ۱۰-۵\frac{۵+۳V_۱}{۶}-۴V_۱=۰\ \ \Rightarrow V_۱=\frac{۳۵}{۳۹}$$

اشتباه رایج: هنگام استفاده از قانون اهم، دقت کنید مقاومت ها بر حسب موهو داده شده اند(و نه بر حسب اهم)

روش دوم- برای محاسبه $v_۱$، می توانیم از روش منظم گره استفاده کنیم. ابتدا با توجه به اینکه می خواهیم از روش گره استفاده کنیم سعی می کنیم منابع ولتاژ را تا حد امکان به منبع جریان تبدیل کنیم:

$$\begin{pmatrix}۳+۴+۲ & -(۴+۲)\\ -(۴+۲) & ۲+۴+۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_۱\\ V_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۵\\ ۴V_x-۲۰\end{pmatrix}(I)$$

از طرفی، با توجه به شکل اولیه مدار، واضح است که $V_x=-۵+V_۱-V_۲$.با جایگذاری v_x در رابطه بالا، و پس از ساده سازی، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix}۹ & -۶\\ -۱۰ & ۱۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_۱\\ V_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۵\\ -۴۰\end{pmatrix}$$

از حل این معادله برای $v_۱$بدست می آوریم: $V_۱=\frac{۳۵}{۳۹}$

حل۱-۱۷: با اعمال ولتاژ صحیح تست $V_t=۱(V)$ به ورودی مدار و اندازه گیری جریان گذرنده از این منبع(I_t) ، مقاومت تونن مدار بدست می آید. با توجه به اینکه ولتاژ دو سر مقاومت R همان $v_t=۱$ ولت می باشد، جریان این مقاومت$\frac{۱}{R}$ آمپر خواهد بود. با KCL زدن در سایر گره ها، جریان شاخه ها به صورت زیر بدست می آیند : (مقدار مقاومت ها در شکل نمایش داده نشده است.)

KVL در حلقه بالایی مدار:

$$a\times\left(i-\frac{۱}{R}\right)+۱\times\left(۲i-\frac{۱}{R}\right)=۰\qquad\Rightarrow\quad i=\frac{۲}{۳R}$$

بنابراین مقاومت تونن مدار برابر خواهد بود با:

$$R_{eq}=\frac{V_t}{I_t}=\frac{۱}{i-\left(۲i-\frac{۱}{R}\right)}\quad\Rightarrow\quad R_{eq}=۳R$$

حل۱-۱۸: گزینه (۴) صحیح است.

روش اول- تنها نکته کلیدی در حل این سوال، درک این مطلب است که بار کل سیستم، پیش از بسته شدن کلید و پس از بسته شدن آن،تغییری نمی کند. در حقیقت منابع ولتاژ، قادر به تغییر بار سیستم نیستند و فقط می توانند آرایش بار خازن ها را تغییر بدهند. برای درک بهتر این موضوع، پمپ هایی زا در نظر بگیرید که در یک سیستم بسته لوله کشی آب قرار گرفته اند(با فرض

اینکه سیستم ایزوله است، یعنی لوله ها نشتی ندارند و آب هم به سیستم تزریق نمی شود)، واضح است که این پمپ ها نمی توانند مقدارآب موجود در سیستم را تغییر بدهند و فقط با ایجاد فشار، سبب حرکت آب در سیستم می شوند.

اگر کمیت های پریم دار معرف لحظات بعد از بسته شدن کلید باشند، آنگاه :

$$Q_{۲F}+Q_{۳F}+Q_{۴F}=Q'_{۲F}+Q'_{۳F}+Q'_{۴F}=۳۱(C)(a)$$

با توجه به رابطه Q=CV پس از بسته شدن کلید می توانیم بنویسیم:

KVL در حلقه چپ: $\frac{-Q'_{۴F}}{۴}+\frac{Q'_{۲F}}{۲}=۵$

KVL در حلقه راست: $\frac{-Q'_{۳F}}{۳}+\frac{Q'_{۲F}}{۲}=۱۰$

با توجه رابطه a خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{-Q'_{۴F}}{۴}+\frac{Q'_{۲F}}{۲}=۵\\ \frac{-۱}{۳}\left(۳۱-Q'_{۲F}-Q'_{۴F}\right)+۳Q'_{۲F}=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲Q'_{۲F}-Q'_{۴F}=۲۰\\ ۵Q'_{۲F}+۲Q'_{۲F}=۱۲۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow Q'_{۲F}=۱۸(C)\qquad\Rightarrow\quad V'_{۲F}=\frac{۱۸}{۲}=۹(V)$$

دلیل تغییر ناگهانی ولتاژ (بار) خازن ها، عدم وجود مقاومت سری با خازن ها می باشد.

روش دوم- با تبدیل شرایط اولیه به منابع جریان و رسم مدار در حوزه فرکانس مدار شکل مقابل بدست می آید.

اگر ولتاژ گره A، V ولت باشد، با نوشتن KCLدر گره A در حوزه فرکانس داریم:

$$۴s\left(V-\frac{۵}{s}\right)+۲sV+۳s\left(V-\frac{۱۰}{s}\right)-۴-۱۲-۱۵=۰$$

$$۹sV(s)=۸۱\qquad\Rightarrow\quad V(s)=\frac{۹}{s}\qquad\Rightarrow\quad v(t)=۹u(t)$$

حل۱-۱۹: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به شکل زیر، باید رابطه میان v_tو i_tرا بیابیم. با KCL زدن در گره های مدار، جریان هریک از شاخه ها به صورت زیر بدست می آیند(ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهم،v می باشد، بنابراین طبق قانون اهم جریان آن $\frac{v}{2}$ خواهد بود.):

KVL در تنها حلقه اساسی مدار:

$$V_t=۱\times(i_t-۲V)+V\qquad\Rightarrow\quad V_t=i_t-V\qquad(a)$$

با توجه به رابطه بالا باید به نحوی v را بر حسب v_tو i_tبیان کنیم. با KCL زدن در گره A خواهیم داشت:

$$۵\delta(t)+i_t-۲v=\frac{v}{۲} \qquad \Rightarrow \quad v=\frac{۲}{۵}[\delta(t)+i_t]$$

با جاگذاری رابطه فوق در رابطه (a) خواهیم داشت:

$$V_t=\frac{۳}{۵}i_t-۲\delta(t) \quad \Rightarrow \begin{cases} R_{th}=\frac{۳}{۵}(\Omega) \\ V_{th}=-۲\delta(t) \end{cases}$$

۱-۲۰ گزینه (۲) صحیح است

با توجه به اینکه فقط می خواهیم مقاومت تونن را بیابیم، بهتر است با اعمال یک منبع جریان ۱ آمپری به ورودی مدار و اندازه گیری ولتاژ دو سر آن ، Rthرا بیابیم . هنگام استفاده از این روش، خنثی کردن منابع مستقل را فراموش نکنید !

با kcl زدن در گره های مدار ، جریان هر یک از شاخه ها به صورت زیر به دست می آیند :

Kvlدر مش سمت چپ: $v_{t=۱\times۱(۱-۳v)+۱-\frac{۷}{۶}v_۱}$

$\cdot\ v_{t=۲+۱۱v}$ با جا گذاری در رابطه ی فوق ، خواهیم داشت: $v_{۱=-۴\times۳۷=-۱۲۷}$با توجه به شکل ، داریم:

حال برای محاسبه ی v، در مش راست kvl میزنیم:

$$۱-v+۱۲v=\cdot\rightarrow v=\frac{-۱}{۱۱}(v)$$

بنابراین ، خواهیم داشت $R_{th=v_{t=۱}}$ $:v_{t=}۲+۱۱\times\left(\frac{-۱}{۱۱}\right)=۱(v)\rightarrow$

۱-۲۱- گزینه(۴)صحیح است.

با توجه به رابطه تقسیم ولتاژ در خازن ها داریم:

$$v_{۱=}v_s(t)\times\frac{۱}{۱+۲}=\frac{v_s(t)}{۳}\ \text{(a)}$$

از طرفی با توجه به رابطه ی تقسیم جریان در سلف ها، میتوانیم بنویسیم:

$$v_{۲=}۳\frac{d}{dt}(۲۷_{۱\times\frac{۱}{۱+۳}})=\frac{۳}{۲}\frac{dv_۱}{dt} \qquad \text{(b)}$$

با جایگذاری aدرb،خواهیم داشت: $v_{۲=}\frac{۱}{۲}\frac{dv_{s(t)}}{dt}$

بنابراین ولتاژ خروجی v۰ برابر خواهد بود با:

$$v_{\cdot=\frac{۱}{۲}}\int ۴۷_{۲(t)dt=\frac{۱}{۲}}\int ۲\frac{dv_{s(t)}}{dt}dt\rightarrow v_{\cdot=v_{s(t)}}$$

۱-۲۲- گزینه ۱ صحیح است

مدار معادل تونن دیده می شود از دو سر مقاومت غیر خطی ، به صورت زیر به دست می آید:

حال با استفاده از تحلیل سیگنال کوچک ، مدار را تحلیل می کنیم. (با توجه به اینکه ورودی $\frac{v_s}{۲}=۰/۰۹\cos ۲t$ نسبت به۴ولت بسیار کوچکتر است ،مجاز به استفاده از تحلیل سیگنال کوچک هستیم)

با توجه به مشخصه ivداده شده برای مقاومت ، وبا توجه به معادل تونن فوق ، واضح است که ولتاژvمقداری مثبت دارد (حتی اگر فرض کنیم v<۰باشد ،با توجه به مشخصه داده شده i=۰می شود و در نتیجه $v_{th}>.$ به دو سر مقاومت غیر خطی می رسد و منجر به مثبت شدن vمی گردد)

محاسبه نقطه کار مدار:باkvlزدن تنها در حلقه مدار داریم:

$$-۴+\frac{۱}{۲}i+v=۰\rightarrow v^{۲}+۲v-۸=۰$$

از حل معادله فوق ، $\begin{cases} v=۲ \\ v=-۴ \end{cases}$ به دست می آید که فقط$v=۲(v)$قابل قبول است .(چون میدانیم v>۰است)

تاثیر ورودی ac:حال که نقطه کار مدار مشخص شد ، میتوانیم با استفاده از تقریب خطی، به جای مقاومت غیر خطی ، تقریب خطی آن را قرار دهیم و سپس تاثیر ورودی $\left(\frac{v_s}{۲}\right)$ را بررسی کنیم. با توجه به تعریف مقاومت، مقاومت شیب مشخصه viاست بنابراین :

$$R=\frac{dv}{di}=\frac{dv}{d\left(v^{۲}\right)}=\frac{۱}{۲v}\xrightarrow{v=۲(V)}R=\frac{۱}{٤}\Omega$$

بنابراین مدار به صورت زیر ساده می شود:

نهایتا پاسخ کل برابر خواهد بود با :

$$v=۲+۰/۰۳\cos ۲t\quad (V)$$

۱-۲۳- گزینه (۱)صحیح است

با kvlزدن در حلقه ی نشان داده شده ، خواهیم داشت :

$$v=v_R+v_C+v_L\xrightarrow{t=۰}v(۰)=۳i_R(۰)+v_C(۰)+v_L(۰)$$

با توجه به مفروضات مسئله:

$$v(۰)=۳\times ۶+(-۱)+۰۱۷(V)$$

۱-۲۴گزینه (۲)صحیح است

بدلیل وجود عنصر سلفی،جریان و یکسان نیست و در نتیجه و نمی تواند سری باشد . همچنین با توجه به سری شدن ولت متر با ،ولتاژ دو سر و یکسان نیست و در نتیجه موازی هم نمی‌توانند باشند.

۱-۲۵- گزینه (۳) صحیح است.

اگر کره ی پایین مدار را زمین در نظر بگیریم ،معادلات گره ی مدار برابر خواهند بود با :

با جاگذاری رابطه ی (b)در (a) خواهیم داشت:

۱-۲۶- گزینه(۳)صحیح است

در $t \to \infty$ ،سلف ها و خازن ها به شارژ کامل رسیده اند . بنابراین میتوانیم خازن ها را مدار – باز و سلف ها را اتصال – کوتاه در نظر بگیریم:

با توجه به شکل فوق ،ولتاژ دو سر منبع جریان در،همان ولتاژ گره ی a استو بنابراین میتوانیم بنویسیم:

$$V_a = (۵+۲)\times(۲ \| ۴) = \frac{۲۸}{۳}(V)$$

۱-۲۷- گزینه (۱)صحیح است

در حالتی که ولتمتر به مدار متصل نشده ، با استفاده از قاعده ی تقسیم ولتاژ میتوانیم بنویسیم :

$$V_{ab} = V_{oc} \times \frac{R}{R_t + R}$$

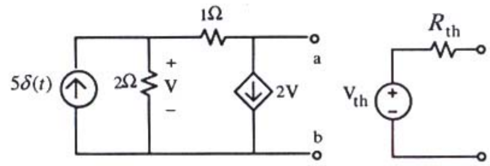
پس از متصل شدن ولتمتر بین نقاطaوb ،مدار به صورت زیر در می آید و داریم :

$$V'_{ab} = V_{ac} \times \frac{r \| R}{R_T + (r \| R)}$$

۱-۲۸گزینه ۳

$$KCLA: V_{th} - V + ۲V = i_{th} \Rightarrow V = i_{th} - ۷_{th} \qquad (\times)$$

$$KCLB: \frac{V}{۲} + V - V_{th} = ۵\delta(t)$$

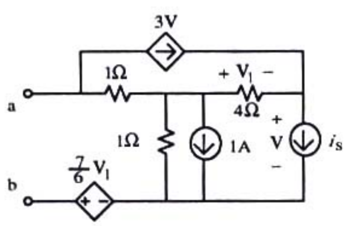


۱-۲۹گزینه ۲

منابع مستقل را از مدار حذف می‌کنیم.

$$KVL: i - ۳v + v_۱ + v - \frac{۷}{۶}v_۱ = v_{th} \Rightarrow i - ۲v - \frac{۱}{۶}v_۱ = v_{th} \quad (\times)$$

از طرفی



$$v_۱ = \frac{۱۲}{۱۱}i \;,\; v = \frac{-۱}{۱۱}i \qquad (\times\times)$$

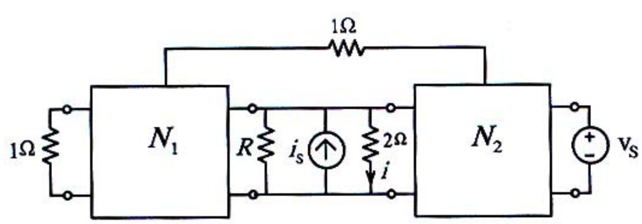
$$KVL: v_۱ - i - v \qquad (\times\times\times)$$

با قرار دادن $v_۱,v$ در رابطه (×××) داریم

$$R_{ab} = \frac{v_{th}}{i} ۱\Omega$$

۱-۳۰ گزینه۲

ولتاژ سر منبع جریان i_s همان ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهمی است که جریان i از آن می‌گذرد. به ازای $v_s=۰$ داریم



$$v = 2i = \frac{2}{3}i_s + \frac{2}{4}v_s, v_s = 0 \Rightarrow R_{th} = \frac{2}{3}\Omega$$

$$R_{th} = R \,||\, R_{eq} = \frac{2}{3}\Omega \Rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

برای انتقال توان ماکزیمم به مقاومت R باید مقاومت R مساوی مقاومت دیده شده بقیه مدار باشد.

$$R = R_{eq} = 1\Omega$$

۱-۳۱ -۳

$$KCL A: G_1(v_A-e_s)+G_2(v_A-v_B),\beta i_y+G_3(v_A-v_C)=0$$

$$KCL B: G_2(v_B-v_A)-\beta i_y+G_4v_B-g_mv_x+G_5(v_B-v_C)=0$$

$$KCL C: G_3(v_cv_A)+g_mv_x+G_5(v_C-v_B)+G_6v_C=0$$

از طرفی

$$i_y=G_5(v_C-v_B), v_x=v_A=v_B$$

با قراردادن i_y, v_B در معادلات گره و فرم ماتریسی معادلات گره برابر است با

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2-\beta G_s & -G_3+\beta G_5 \\ -G_2-g_m & G_2+G_4+g_m(1+\beta)G_5 & -(1+\beta)G_5 \\ -G_3+g_m & -g_m=G_5 & G_3+G_5+G_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_1e_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با سه برابر کردن مقاومت‌ها، Gها در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌شوند. با توجه به ماتریس رفتار g_m همانند Gها است. پس g_m باید در $\frac{1}{3}$ ضرب شود.

۱-۳۲- گزینه ۱..

معادن تون را از سر A و B به فرم شکل روبرو به دست می‌آوریم:

تعیین e_{th1}: مطابق شکل زیر به کمک تقسیم ولتاژ v_{AB} را بدست می‌آوریم.

$$v_{AB}=\frac{1}{1+4}\times 5 1V \Rightarrow e_{th1}=v_{AB}=1V$$

تعیین e_{th2}: به جای منبع جریان ۵ آمپری موازی با مقاومت ۱ اهمی، معادل منبع ولتاژ ۵ ولت سری با مقاوت ۱ اهم قرار می-دهیم. لذا مدار شکل روبرو حاصل می‌شود.

$$KVL\, I: I+3I+2I=6 \Rightarrow I=1A \Rightarrow v_{AB}=1V$$

$$e_{th}=v_{AB}=1V$$

تعیین R_{th1} : با توجه به مدرا شکل سئوال، منبع جریان ۲ آمپری مدار باز و منبع ولتاژ ۳ ولتی اصتال کوتاه می شود.

$$R_{th} = (1+3) \,||\, 1 = \frac{4}{5}\Omega$$

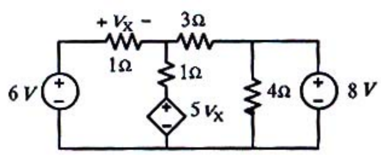
تعیین R_{th2} : با توجه به مدار شکل سئوال، منبع جریان ۵ آمپر مدار و منبع ولتاژ ۳ ولتاژ ۱ ولتی اتصال کوتاه می‌شود.

$$R_{th2} = (1+3)2 = \frac{4}{3}\Omega$$

با قرار دادن مقادیر به دست آمده، مدار شکل روبرو به دست می‌اید.

$$KVL\ II : \frac{4}{5}I + \frac{4}{3}I = 1-1 \Rightarrow I = 0 \Rightarrow v_{AB} = 1V$$

۲-۳۳



$$KCL\ A : v_A - 6 - 5v_x + v_A + \frac{v_A - 8}{3} = 0$$

$$v_A = 5.27V \Rightarrow v_x 6 - 5.27 = 0.72V$$

۲-۳۴

جریان i همواره صفر است. لذا مدار به فرم زیر بدیل می‌گردد.

$$R_{out} = \frac{a^2}{R_s} = \frac{2^2}{\frac{1}{2}} = 8\Omega \Rightarrow R_L = R_{out} = 8\Omega$$

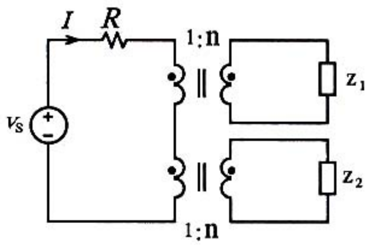
۱-۳۵ -۲

$$nv_1 = \frac{I}{n} z_1 \Rightarrow v_1 = \frac{I}{n^2} z_1$$

$$v_2 = \frac{I}{n^2} z_2 \Rightarrow nv_2 = \frac{I}{n} z_2$$

$$KVL\, A: RI + v_1 + v_2 = v_s$$

$$\left(R + \frac{1}{n^2} z_1 + \frac{1}{n^2 z_2}\right) I = v_s$$



$$\frac{v_s}{I} = R + \frac{1}{n^2}\left(z_1 + z_2\right)$$

۱-۳۶ گزینه ۱

در مسیر منبع ولتاژ وابسته و مقاومت ۵ اهمی KVL می‌زنیم.

$$KVL: -3V_x + 5i_X = 0$$

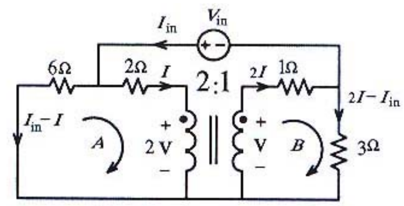
$$KCL\, A: 2i_X - \frac{1}{5} V_x = 10$$

از حل دو معادله فوق i_x=۶ A به دست می‌آید.

۱-۳۷ گزینه ۴

$$KVL\,A: 2I + 2V - 6\left(I_{in} - I\right) = 0$$

$$KVL\,B: 3\left(2I - I_{in}\right) - V + 2I = 0$$



$$\begin{cases} 8I + 2V = 6I_m \\ 8I - V = 3I_m \end{cases} \Rightarrow I = \frac{I_{in}}{2}, V = I_m$$

در صورتی که در حلقه بیرونی KVL بزنیم، داریم

$$6\left(I_{in} - I\right) - 3\left(2I - I_{in}\right) = V_{in}\ ,\ I = 0.5 I_{in} \Rightarrow R_L = \frac{v_{in}}{I_{in}} = 3\Omega$$

فصل دوم: مدارهای مرتبهٔ اول

مدارهایی که در فصل های گذشته بررسی کردیم، فقط از یک عنصر (مقاومت، خازن یا سلف) تشکیل شده بودند و بـدون نیـاز بـه معـادلات دیفرانسیل، و تنها با یک سری عملیات جبری، مدار را تحلیل می کردیم.

تعریف مدار مرتبه اول

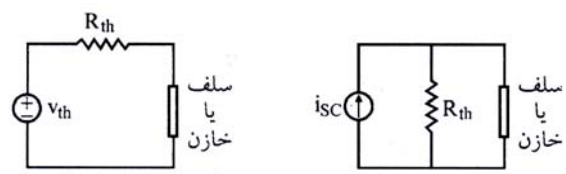
مدارهای مرتبهٔ اول تنها از یک عنصر ذخیره کننده انرژی و هر تعداد مقاومت و منابع ولتاژ و جریان تشکیل می شوند این مدارات بـا معادلـه دیفرانسیل کلیِ زیر توصیف می شوند:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{۱}{\tau}y(t)=\text{عبارتی برحسب ورودی و مشتقاتش}$$

الگوریتم یافتن پاسخ کامل مدارات مرتبه اول

الگوریتم یافتن پاسخ کامل مدارهای **خطی** مرتبه اول با **ورودی** DC، عبارتست از:

۱- یافتن مدار معادلِ تونن یا نورتنِ دو سر سلف یا خازن:



۲- رسم مدار معادل در لحظهٔ اعمال ورودی و یافتن شرط اولیهٔ $y(t_\circ)$[۲]

۳- رسم مدار معادل در حالت دایمی و یافتن مقدار نهایی $y(\infty)$

۴- یافتن ثابت زمانی مدار: ثابت زمانی را با پارامتر τ نمایش می دهیم و واحد آن ثانیه می باشد.

$$\begin{cases} \tau C = R_C & : RC \\ \tau_L = \dfrac{L}{R} & : RL \end{cases}$$

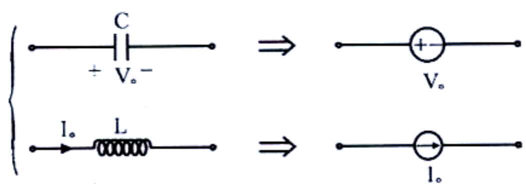
۵- استفاده از رابطهٔ کلی حاکم بر مدارات مرتبه اول خطی **با ورودیِ DC:**

$$y(t)=y(\infty)+\left[y(t_\circ)-y(\infty)\right]e^{\frac{-t(t-t)}{\tau}}, \qquad t>t_\circ$$

یادآوری: با توجه به روابط $i_C(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}, v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$، لازمهٔ تغییر ناگهانی v_c, i_L، وجود تابع ضربه در i_c, v_L (و یا به بیان دیگر، بینهایت شدن v_L و i_c در یک لحظه) می باشد.

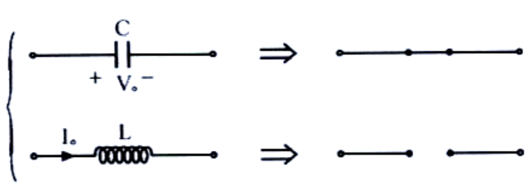
قضیه پیوستگی

ولتاژ خازن و جریان سلف نمی توانند به طور ناگهانی تغییر کنند. لذا برای لحظهٔ $t=t_\circ$ می توانیم به جای سلف و خازن از معـادلِ لحظه ایِ زیر استفاده کنیم: ($V_\circ$ و $I_\circ$ مقادیر ولتاژ خازن و جریان سلف در لحظه $t_\circ$ هستند.)



بیان ریاضیِ قضیهٔ پیوستگی، بصورت $i_L\left(t_\circ^-\right)=i_L\left(t_\circ^+\right)=I_\circ, v_C\left(t_\circ^-\right)v_C\left(t_\circ^+\right)=V_\circ$ می باشد.

واضح است که چنانچه سلف و خازن در **حالت صفر** قرار داشته باشند، معادل های فوق بصورت زیر ساده می شوند:



نکته: قضیهٔ پیوستگی، تنها زمانی صحیح است که:

۱- منابع ضربه در مدار موجود **نباشد.**

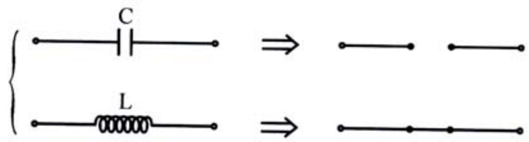
۲- «سلف هایِ سری با جریان های متفاوت»، و یا «خازن های موازی با ولتاژهای متفاوت»، در مدار موجود نباشد.

۳- حلقهٔ شامل **فقط** خازن و منبع ولتاژ، و یا کات ست شامل **فقط** سلف و منبع جریان در مدار وجود نداشته باشد.

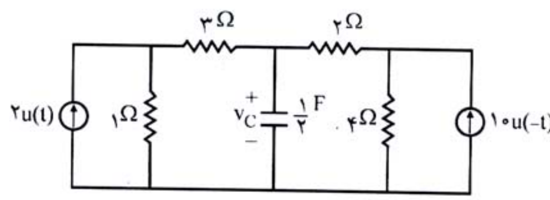
یادآوری: پس از اینکه سلف و خازن بـه شـارژ کامـل برسـند، v_L و i_C بـه مقـداری ثابـت مـی رسـند و در نتیجـه بـا توجـه بـه روابـط $i_C(t)=C\frac{dv_c}{dt}, v_L=L\frac{di_L}{dt}$، مقادیر v_L و i_C صفر خواهد بود.

معادل های حالت ماندگار

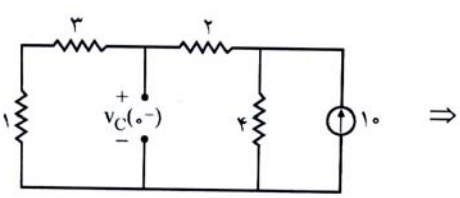
در مدارات **خطی** با **ورودی DC، در** $t \to \infty$، سلف و خازن به شارژ کامل می رسند. لذا برای تعیین $y(\infty)$ می توانیم به جای سلف و خازن از معادل های زیر استفاده می کنیم:



مثال: معادلهٔ ولتاژ خازن را در $t > 0$ بیابید:

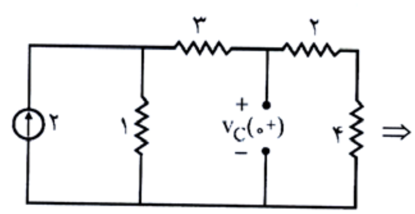


در $t < 0$، منبع جریان $10u(-t)$ مدت زیادی در مدار بوده و در نتیجه باعث شارژ شدن خازن بطور کامل شده است. بنابراین در $t = 0^-$ می توانیم مدار را به صورت زیر مدل کنیم:



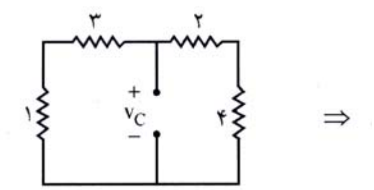
$$v_C(0^-) = 10 \times \frac{4}{4+6} \times 4 = 16(V)$$

با توجه به عدم تغییر ناگهانی ولتاژ خازن، $v_c(0^-) = v_v(0^+) = 16(V)$ می باشد. از طرفی در $t \to \infty$، وجود منبع جریان $2u(t)$ در مدار برای مدت طولانی، باعث شارژ کامل خازنی می شود. بنابراین در $t \to \infty$، وجود منبع جریان $2u(t)$ در مدار برای مدت طولانی، باعث شارژ کامل خازن می شود. بنابراین در $t \to \infty$ می توانیم مدار را به صورت زیر مدل کنیم:



$$v_c(\infty) = 2 \times \frac{1}{1+3+2+4} \times (2 \times 4) = 1/2(V)$$

برای محاسبهٔ ثابت زمانی مدار نیز، کافیست مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن را بیابیم. به این منظور از مدار زیر که منابع مستقل آن صفر شده اند کمک می گیریم:



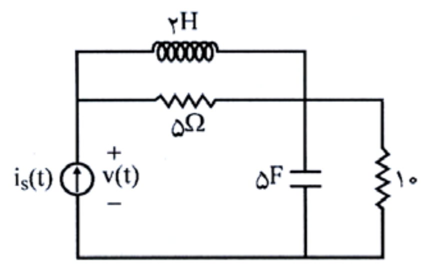
$$R_{th} = ۴\|۶ = ۲/۴(\Omega) \xrightarrow{\tau_c = RC} \tau_c = ۱/۲(s)$$

نهایتاً با توجه به رابطهٔ کلی حاکم بر مدارات مرتبهٔ اول خطی با ورودی DC، خواهیم داشت:

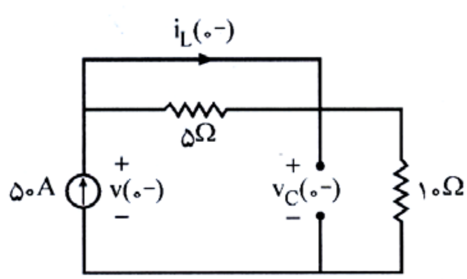
$$v_c(t) = \left(۱/۲ + ۱۴/۸ e^{\frac{-t}{۱/۲}} \right) u(t)$$

نکته بسیار مهم: در حالت کلی، تنها سیگنال‌هایی که تغییرات آنها پیوسته می باشد، جریان سلف و ولتاژ خازن هستند.

مثال: در مدار شکل زیر، $i_S(t) = ۵۰u(-t)$ است. ولتاژ دو سر منبع جریان را در $t = ۰^+$ بیابید.



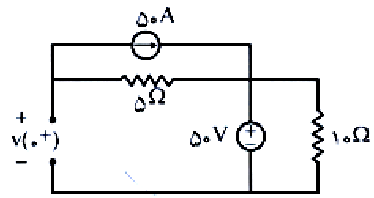
در $t = ۰^-$ بدلیل وجود منبع جریان $۵۰u(-t)$ در مدار برای مدت طولانی، سلف و خازن به شارژ کامل رسیده اند و در نتیجه می توانیم مدار را به صورت زیر مدل کنیم:



$$i_L(۰^-) = ۵۰(A) \Rightarrow \qquad (۰^-)\, v_C(۰^+) = ۵۰ \times ۱۰ = ۵۰۰(V)$$

از آنجایی که **فقط** سیگنال های i_L, v_C می توانند پیوسته باشند (و به طور ناگهانی تغییر نکنند)، فقط می توانیم بگوییم:

$v_c\left(\cdot^-\right)=v_c\left(\cdot^+\right)=۵۰۰(V)$. با توجه به این نکته، مدار در $t\to\cdot^+$ بصورت زیر مدل می شود:



$$v\left(\cdot^+\right)=۵\times(-۵۰)+۵۰\Rightarrow \qquad v\left(\cdot^+\right)=-۲۰۰(V)$$

نکته: گرچه معمولاً از روشی که ذکر شد برای محاسبهٔ پاسخ مدارات مرتبه اول استفاده میشود، اما به منظور درک بهتر مباحث این فصل، تحلیل این مدارات از طریف حل معادلات دیفرانسیل را نیز بررسی می کنیم.

مدار RL سری و انواع پاسخ هایش

پاسخ پله: پاسخ هر مدار به ورودی پله را پاسخ پلهٔ آن مدار می نامند و با $s(t)$ نمایش می دهند.

پاسخ ضربه: پاسخ هر مدار به ورودی ضربه را پاسخ ضربه آن مدار می نامند و $h(t)$ با نمایش می دهند.

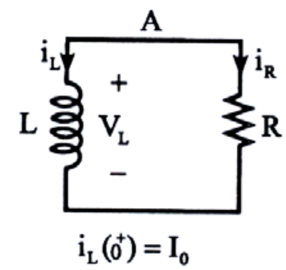
نکته بسیار مهم: پاسخ ضربه و پاسخ پله، نوعی **پاسخ حالتِ صفر** هستند، بدین معنا که هنگام پاسم مدار به ورودی های پله و ضربه، فرض می کنیم $x(\cdot^-)=\cdot$ باشد. ($x(t)$، هر یک از سیگنال‌های ولتاژ یا جریان می باشد).

تحلیل مدار های مرتبه اول

مدارهایی که شامل یک خازن مستقل (یا یک سلف مستقل) و مجموعه ای از مقاومت های خطی، منابع مستقل (و یا وابسته) باشند را مدارهای مرتبه اول نامند. در این فصل پاسخ مدارهای مرتبه اول RL، RC به ازای ورودی dc و ac و بدون ورودی به همراه نحوی تعیین ثابت زمانی، شارژ (د شارژ)، انرژی تلف شده (مصرف شده) و... مورد بررسی قرار گرفته است.

پاسخ ورودی صفر مدار RL

مدار مقابل را در نظر بگیرید. سلف دارای جریان اولیه I_0 است.



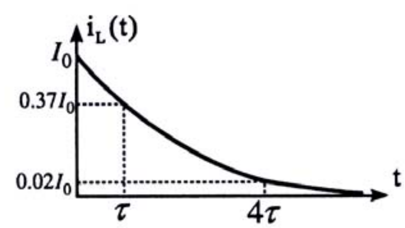
$$KCLA: i_L + i_R = 0 \Rightarrow i_R = -i_L \quad , \quad V_L = V_R$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0, \qquad i_L(0^+) = I_0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن است که جواب آن به صورت زیر خواهد بود.

$$i_L(t) = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \quad t \geq 0$$

منحنی پاسخ ورودی صفر i_L به صورت مقابل است. با معلوم بودن $i_L(t)$ می توان مجهولات دیگر مدار نظیـر $v_L(t)$، $v_R(t)$، $i_R(t)$ را به دست آورد.

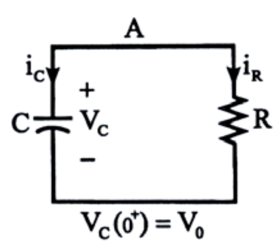


$$i_R = -i_L = -I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \quad t \geq 0$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{\frac{-RT}{L}} \quad t \geq 0$$

پاسخ ورودی صفر مدار RC

مدار مقابل را در نظر بگیرید خازن دارای ولتاژ اولیه V_0 است.

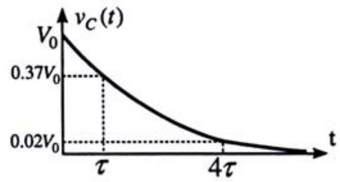


$$KCLA: i_C + i_R = 0$$

$$v_C = v_R$$

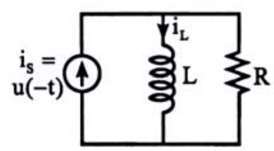
$$(\times),(\times\times) \Rightarrow C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{R}=۰,\ v_{C(۰)}=V_۰$$

معادله (۲)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن است که جواب آن برابر است با



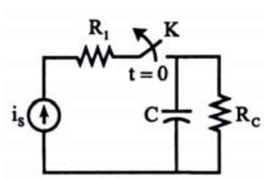
$$v_c(t)=V_۰ e^{\frac{-t}{RC}} \qquad t \geq ۰$$

منحنی پاسخ ورودی صفر v_C به صورت مقابل است.



نکته: مدار مقابل برای $t \geq ۰$ یک مدار RL بدون ورودی می باشد. زیرا برای $t \geq ۰$ منبع جریان is از مدار حذف می گردد.

نکته: در مدار مقابل کلید k در لظحه $t = ۰$ باز می شود و مدار برای $t \geq ۰$ به فرم RC بدون ورودی خواهد شد.



نکته: منظور از همگن بودن معادلات (۱) و (۲) یعنی شبکه فاقد ورودی است. به عبارت دیگر طرف راست معادله دیفرانسیل صفر است.

پاسخ کامل مدارهای مرتبه اول RL و RC با ورودی ثابت

برای حل مدارهای مرتبه اول با منابع مستقل ثابت روش ساده ای را می توان به کار برد. فرض کنید معادله دیفرانسیل مدار بـه صـورت زیـر باشد.

$$\frac{dy}{dt}+ay=bu(t)$$

که در آن $b,a>0$ ضرایب ثابت هستند. جواب این معادله به صورت زیر می باشد.

$$y(t)=\underbrace{y(\infty)}_{1}+\underbrace{\left[y\left(0^{+}\right)-y(\infty)\right]e^{-at}}_{2}\qquad t\geq 0$$

جمله۱: پاسخ حالت دائمی است که به ورودی مستقل و جمله ۲ پاسخ گذاری مدار است که هم به ورودی و هم به شرط اولیه بستگی دارد.

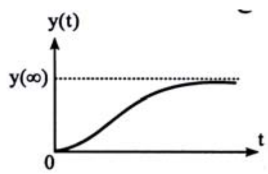
نکته: $y(t)$ همان پاسخ کامل مدار می باشد که برای تعیین آن به سه پارامتر $y\left(0^{+}\right), y(\infty)$, a نیاز است.

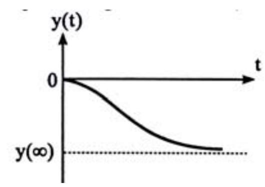
نکته: در رابطه (۳)، $y(\infty)$ ناشی از ورودی مستقل (و ثابت) مدار است.

نکته: پاسخ حالت صفر مدار (یعنی $y\left(0^{+}\right)=0$) برابر است با

$$y(t)=y(\infty)-y(\infty)e^{-at}=y(\infty)\left[1-e^{-at}\right]\qquad t\geq 0$$

که تنها به دو پارامتر $y(\infty)=0$ و a بستگی دارد. شکل منحنی پاسخ حالت صفر به صورت های زیر می تواند ظاهر شود.

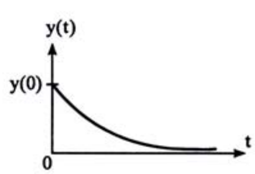


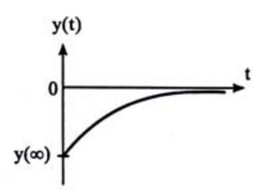


نکته: پاسخ ورودی صفر (یعنی $y(\infty)=0$) برابر است با

$$y(t)=y\left(0^{+}\right)e^{-at}\qquad t\geq 0$$

که تنها به دو پارامتر $y\left(0^{+}\right)$ و a بستگی دارد. شکل منحنی ورودی صفر به صورت های زیر ظاهر می شود.





نکته: پارامتر $S_{0}=-a$ فرکانس طبیعی مدار مرتبه اول است که همان پهنای باند آن می باشد.

$$B.w=-S_{0}\quad\Rightarrow\quad B.w=a$$

نکته: رابطه ثابت زمانی با فرکانس طبیعی مدار مرتبه اول برابر است با

$$S_{\circ} = \frac{-۱}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{۱}{a}$$

ثابت زمانی در مدار های RL به صورت

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

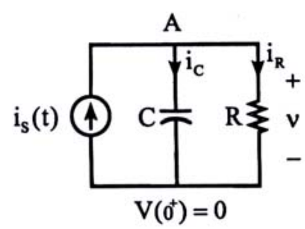
ثابت زمانی در مدارهای RC به صورت

$$\tau = R_{eq} C$$

R_{eq}: مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن (یا سر سلف) است.

پاسخ مدار مرتبه اول به ورودی سینوسی

فرض کنید مدار مقابل به منبع سینوسی $i_S(t) = A_۱ Cos(wt + \phi_۱)u(t)$ وصل گردد که در ورودی فوق ثابت $A_۱$ دامنه و ثابت w را فرکانس (زاویه ای) و ثابت فاز $\phi_۱$ را فاز ورودی سینوسی گویند.



$$KCLA : i_C + i_R = i_S$$

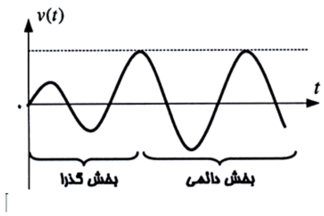
$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = A_۱ Cos(wt + \varphi_۱)u(t) \qquad v(۰) = ۱$$

پاسخ حالت صفر مدار برابر است با

$$v(t) = \underbrace{-A_۲ Cos\phi_۲ e^{\frac{-t}{RC}}}_{۱} + \underbrace{A_۲ Cos(wt + \phi_۲)}_{۲}$$

$$A_۲ = \frac{A_۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{R}\right)^۲ + w^۲ C^۲}} \qquad , \qquad \phi_۲ = \phi_۱ - \tan^{-۱} RCw$$

در رابطه (۱۰) جمله۱، پاسخ گذرا و جمله۲، پاسخ حالت دائمی سینوسی است. منحنی پاسخ ولتاژ مدار در حالت اولیه صفر ($v(۰^+) = ۰$) و اعمال ورودی $i_s(t)$ برابر است با



در رابطه (۱۰) در صورتی که $\phi_2 = \pm 90^\circ$ باشد، پاسخ حالت صفر $v(t)$، حالت گذرا نخواهد داشت.

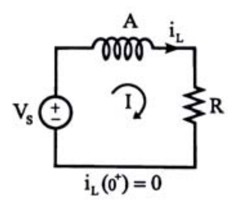
$$v(t) = A_2 Cos\left(wt \pm \frac{\pi}{2}\right), \qquad A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + w^2 C^2}}$$

باید در نظر داشت برای این که $\phi_2 = \pm 90^\circ$ شود باید

$$\phi_1 = \pm \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} RCw$$

به طور مشابه برای مدار مرتبه اول RL مقابل به ازای ورودی سینوسی

$$v_s(t) = A_1 Cos(wt + \phi_1) u(t)$$



پاسخ $i_L(t)$ برابر است با

$$KVLI : v_L + v_R = v_S$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = A_1 Cos(wt + \phi_1) u(t) \qquad i_L(0) = 0$$

$$i_L(t) = -A_2 Cos\phi_2 e^{\frac{-Rt}{L}} + A_2 Cos(wt + \phi_2) \qquad t \ge 0$$

$$A = \frac{A_1}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}, \qquad \phi_2 = \phi_1 - \tan^{-1}\frac{wL}{R}$$

در رابطه (۱۱) اگر $\phi_1 = \pm\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{wL}{R}$ در نظر گرفته شود $i_L(t)$ پاسخ گذرا نخواهد داشت.

نکته: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$a\frac{dy}{dt} + by = f(t) \qquad t \ge 0$$

a,b>۰ ضرایب ثابت هستند. معادله (۱۲) یک معادله مرتبه اول است که دارای ویژگی های زیر می باشد.

به کمک سمت چپ معادله می توان فرکانس طبیعی و ثابت زمانی را به‌دست آورد.

$$aS_{\circ}+b=۰\Rightarrow\ S_{\circ}=\frac{-b}{a},\qquad \tau=\frac{-۱}{S_{\circ}}=\frac{a}{b}$$

$f(t)$ ورودی شبکه است و در صورتی که سینوسی نباشد به عبارت دیگر $f(\infty)$ محدود باشد، پاسخ $y(t)$ در حالت دائمی برابر است با

$$by(\infty)=f(\infty)\ \Rightarrow\qquad y(\infty)=\frac{f(\infty)}{b}$$

پهنای باند برابر است با عکس ثابت زمانی

$$.w=\frac{۱}{\tau}(Rsd\ /\ Sec)\qquad\Rightarrow B.w=\frac{۱}{۲\pi\tau}(Hz)$$

$$(RC)B.w-\frac{۱}{R_{eq}C}\qquad,\qquad (RC)B.w=\frac{R_{eq}}{L}$$

R_{eq}: مقاومت دیده شده از دو سر خازن (یا دو سر سلف) است.

اگر $f(t)=k\delta(t)$ باشد، آن گاه پاسخ ضربه برابر است با

$$a\frac{dy}{dt}+by=k\delta(t)\qquad\Rightarrow\qquad y(t)=\frac{k}{a}e^{\frac{-b}{a}t}u(t)$$

نکته: منحنی مقابل زمان شارژ یک مدار مرتبه اول را نمایش می دهد.

$$f(t)=f(\infty)\left(۱-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\ t\geq۰$$

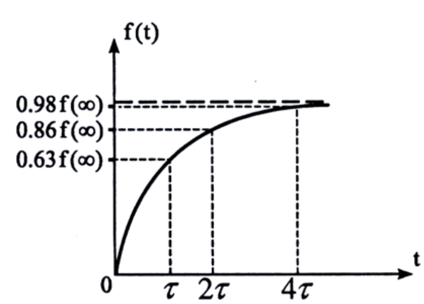
$$f(\tau)=۰.۶۳\,f(\infty)$$

$$f(۲\tau)=۰.۸۶\,f(\infty)$$

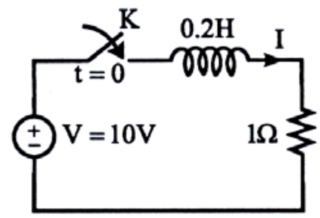
$$f(۳\tau)=۰.۹۵\,f(\infty)$$

$$f(۴\tau)=۰.۹۸\,f(\infty)$$

$$f(۵\tau)\approx f(\infty)$$



مثال: در مدار شکل زیر اندازه جریان مدار ۰/۴ ثانیه پس از اتصال کلید k چند آمپر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۳/۶

۳) ۶/۷ ۴) ۸/۶

حل) ثابت زمانی مدار برابر است با

$$\tau=\frac{L}{R}=0.2Sec\,,\qquad I(\infty)=\frac{10}{1}=10A$$

$$t=0.4,\ t=2\tau\ \Rightarrow\qquad I(2\tau)=0.861(\infty)=8.6A$$

منحنی مقابل زمان دشارژ یک مدار مرتبه اول را نشان می دهد.

$$f(t)=f\left(0^+\right)e^{\frac{-t}{\tau}}\qquad t\geq 0$$

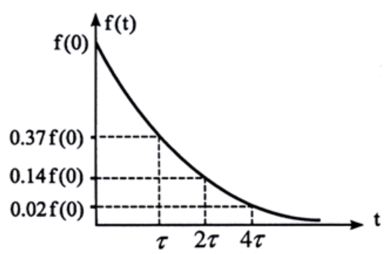
$$f(\tau)=0.37\,f\left(0^+\right)$$

$$f(2\tau)=0.14\,f\left(0^+\right)$$

$$f(3\tau)=0.05\,f\left(0^+\right)$$

$$f(4\tau)=0.02\,f\left(0^+\right)$$

$$f(5\tau)\approx 0$$



نکته: ضریب کیفیت در مدار RL را کتانس $X_L=Lw$ برابر است با

$$Q\,\frac{X_L}{R}=\frac{Lw}{R}\ (\text{سری})$$

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{Lw} \text{ (موازی)}$$

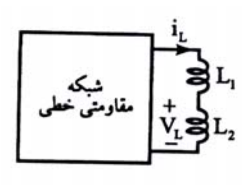
و در مدار RC با راکتانس $X_C = \frac{۱}{Cw}$ برابر است با

$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{۱}{RCw} \text{ (سری)}$$

$$Q = \frac{R}{X_C} = RCw \text{ (موازی)}$$

ضریب کیفیت پارامتری از مدار است که به کمک آن سرعت میرایی پاسخ دو مدار را نسبت به هم می سنجند.

نکته: مدار مقابل با وجود این که دارای دو سلف است اما با معادله دیفرانسیل مرتبه اول نمایش داده می شود. زیرا دو سلف به هم وابستگی دارند و می توان به جای آن دو، سلف معادل قرار داد.

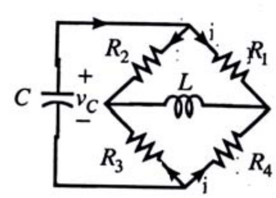


$$i_L(t) = I_۰ e^{\frac{-t}{\tau}}, \quad v_L(t) = L_۲ \frac{di_L}{dt} \qquad t \geq ۰$$

نکته: در مدار مقابل مقاومت ها در موقعیت پل و تستون قرار گرفته اند و لذا سلف را می توان حذف نمود و در نتیجه مدار، RC مرتبه اول خواهد بود. $(R_۱ R_۳ = R_۲ R_٤)$

$$\tau = R_{eq} C, \qquad R_{eq} = \left[\left(R_۱ + R_٤\right) \| \left(R_۲ + R_۳\right) \right]$$

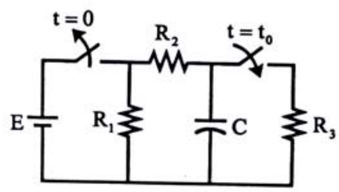
$$v_C(t) = v_C\left(۰^+\right) e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad t \geq ۰$$



نکته: در بیشتر مدارهای دارای کلید شرط اولیه داده نمی شود. بنابراین برای تعیین شرط اولیه، مدار را قبل از تغییر وضعیت مورد بررسی قرار می دهیم.

نکته: در مدارهایی که دارای کلید متعدد هستند ثابت زمانی های متعدد ایجاد می گردد. به عبارت دیگر بعد از هر کلید زنی ثابت زمانی مدار تغییر می کند.

در مدار مقابل به ازای $\cdot < t < t_{\cdot}$ ثابت زمانی $\tau_{۱}$ برابر است با

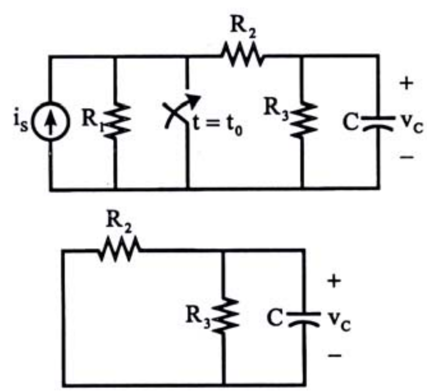


$$\tau_{۱} = (R_{۱} + R_{۲})C$$

به ازای $t > t_{\cdot}$ ثابت زمانی برابر است با

$$\tau_{۲} = \left[(R_{۱} + R_{۲}) \| R_{۳} \right] C$$

نکته: در مدار مقابل کلید در لحظه $t = t_{\cdot}$ بسته می شود. پاسخ $v_C(t)$ با بسته شدن کلید برای $t \geq t_{\cdot}$ به صورت زیر خواهد بود.

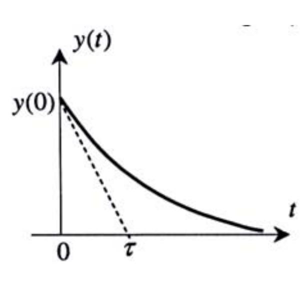


$$v_C(t) = v_C\left(t_{\cdot}^{+}\right) e^{\frac{-(t-t_{\cdot})}{\tau}} \quad t \geq \cdot$$

$$\tau = \left(R_{۲} \| R_{۳} \right) C$$

مقدار $v_C\left(t_{\cdot}^{+}\right)$ را می توان قبل از کلید زنی به دست آورد.

نکته: محل تقاطع خط مماس بر منحنی پاسخ ورودی صفر با محور زمان همان ثابت زمانی مدار خواهد بود. به عبارت دیگر بـا معلـوم بـودن منحنی ورودی صفر می توان فرم پاسخ را نوشت.



$$y(t) = y\left(0^+\right)e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

نکته: به کمک ثابت زمانی مدار مرتبه اول می توان زمان شارژ (یا شارژر) یک مدار RL (یا RC) را محاسبه نمود.

به طور کلی یک مدار مرتبه اول بعد از پنج ثابت زمانی (5τ) به حالت شارژ (یا شارژر) می رود.

نکته: برای یک مدار مرتبه اول با ورود dc برای این که زمان شارژ (یا شارژر) نداشته باشیم باید

$$y\left(0^+\right) = y(\infty)$$

در این صورت پاسخ هیچ گاه حالت گذرا نخواهد داشت.

نکته: اگر در یک مدار مرتبه اول با ورودی $i_S(t) = u(t)$، پاسخ حالت صفر به صورت زیر باشد

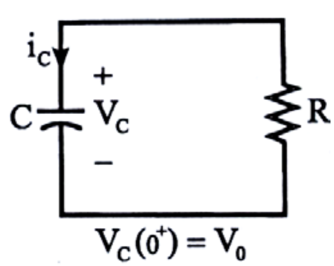
$$y(t) = k\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad t \geq 0$$

آن گاه پاسخ حالت صفر مدار به ورودی $i_S(t) = u(t - t_0)$ برابر است با

$$y(t) - k\left(1 - e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}}\right) \quad t \geq t_0$$

نکته: در مدارهای خطی مرتبه اول در صورتی که ورودی k برابر شود، پاسخ حالت صفر کلیه ولتاژها و جریان های مدار k برابر خواهد شد.

نکته: در مدار RC مقابل



۱- مدت زمانی که ولتاژ خازن از مقدار اولیه V_0 به مقدار V_1 می رسد برابر است با

$$v_C(t)=V_۰ e^{\frac{-t}{RC}} \Rightarrow V_۱ = V_۰ e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$\frac{t}{RC} = -Ln\frac{V_۱}{V_۰} \Rightarrow t = RCLn\frac{V_۰}{V_۱} \qquad V_۰ > V_۱$$

۲- توانی که خازن تحویل می دهد (توان مصرفی مقاومت) برای $t \geq ۰$ برابر است با

$$v_C(t)=V_۰ e^{\frac{-t}{RC}} \Rightarrow i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{-V_۰}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$P(t) = v_C(t).\left(-i_C(t)\right) = \frac{V_۰^۲}{R}e^{\frac{-۲t}{RC}}$$

توان تحویلی در زمان $t=t_۰$ برابر است با

$$P\left(t_۰\right) = \frac{V_۰^۲}{R}e^{\frac{-۲t_۰}{RC}}$$

۳- در صورتی که بدانیم $v_C(t_۰) = A$ باشد، آن گاه زمانی که توان تلف شده در مقاومت B وات شود برابر است با

$$P(t)\frac{A^۲}{R}e^{\frac{-۲(t-t_۰)}{RC}} \Rightarrow B = \frac{A^۲}{R}e^{\frac{-۲(t-t_۰)}{RC}}$$

$$\frac{۲\left(t-t_۰\right)}{RC} = -Ln\frac{BR}{A^۲} \Rightarrow t = t_۰ + \frac{RC}{۲}Ln\frac{A^۲}{BR}$$

به ازای $t_۰ = ۰$

$$t = \frac{RC}{۲}Ln\frac{A^۲}{BR}$$

انرژی ذخیره شده‌ی خازن برای $t \geq ۰$ برابر است با

$$w_C(t) = \frac{۱}{۲}Cv_C^۲(t) = \frac{۱}{۲}CV_۰^۲ e^{\frac{-۲t}{RC}}$$

انرژی ذخیره شده خازن در زمان $t=t_۰$ برابر است با

$$w_C(t_0) = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{\frac{-2t_0}{RC}}$$

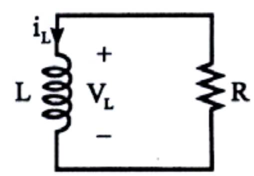
۵- در هنگام دشارژ، زمانی که انرژی ذخیره شده‌ی خازن B ژول شود، برابر است با

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{\frac{-2t}{RC}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{\frac{-2t}{RC}}$$

$$\frac{2t}{RC} = -Ln\frac{2B}{CV_0^2} \Rightarrow t = \frac{RC}{2} Ln\frac{CV_0^2}{2B}$$

نکته: در مدار RL مقابل

۱- مدت زمانی که جریان سلف از مقدار اولیه I_0 به مقدار می رسد برابر است با



$i_L(0^+) = I_0$

$$i_L(t) = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \Rightarrow I_1 = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

$$t = \frac{L}{R} Ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad I_0 > I_1$$

۲- توانی که سلف تحویل می دهد (توان مصرفی مقاومت) برای $t \geq 0$ برابر است با

$$i_L(t) = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \Rightarrow P(t) = R i_L^2(t) = R I_0^2 e^{\frac{-2Rt}{L}}$$

توان تحویلی در زمان $t=t_0$ برابر است با

$$P(t_0) = R I_0^2 e^{\frac{-2Rt_0}{L}}$$

در صورتی که بدانیم $(t_0) = A$ باشد، آن گاه زمانی که توان تلف شده در مقاومت B وات شود برابر است با

$$P(t) = RA^2 e^{\frac{-2R(t-t_0)}{L}} \Rightarrow B = RA^2 e^{\frac{-2R(t-t_0)}{L}}$$

$$\frac{2R(t-t_0)}{L} = Ln\frac{B}{RA^2} \Rightarrow t = t_0 + \frac{L}{2R} Ln\frac{RA^2}{B}$$

به ازای $t_0=0$

$$t = \frac{L}{2R} Ln \frac{RA^2}{B}$$

۴- انرژی ذخیره شده‌ی سلف برای $t \geq 0$ برابر است با

$$i_L(t) = i_L(0^+) e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow i_L(t) = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \qquad t \geq 0$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{\frac{-2Rt}{L}} \qquad t \geq 0$$

انرژی ذخیره شده‌ی سلف در زمان $t=t_0$ برابر است با

$$w_L(t_0) = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{\frac{-2Rt_0}{L}}$$

۵- در هنگام دشارژ، زمانی که انرژی ذخیره شده‌ی سلف B ژول شود، برابر است با

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{\frac{-2Rt}{L}} \quad \Rightarrow B = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{\frac{-2Rt}{L}}$$

$$\frac{2Rt}{L} = -Ln \frac{2B}{LI_0^2} \Rightarrow t = \frac{L}{2R} Ln \frac{LI_0^2}{2B}$$

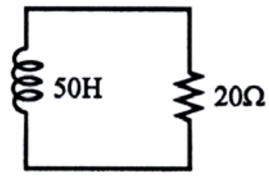
نکته: در مدارهای مرتبه اول بدون ورودی در هنگام دشارژ، زمانی که انرژی ذخیره شده در سلف (یا خازن) k برابر لحظه $t=t_0$ شود، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{w(t_0)}{w(t)} = k, \quad k < 1 \qquad \Rightarrow t = t_0 - \frac{\tau}{2} Lnk \qquad t > t_0$$

در رابطه (۳۴) τ ثابت زمانی مدار مرتبه اول است.

مثال: در مدار RL مثابل جریان سلف در t=۲ ثانیه ۱۸ آمپر است زمانی که توان تلف شده در مقاومت ۱kw شود برابر است با

حل: طبق رابطه (۳۰) داریم



$$\tau = \frac{L}{R} = ۲.۵Sec, i_L(۲) = ۱۸A.$$

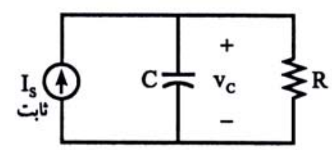
$$t = ۲ + \frac{۲.۵}{۲} Ln \frac{۲۰ \times ۱۸^{۲}}{۱۰^{۳}} = ٤.۳۳Sec$$

نکته: در مدار مقابل، انرژی داده شده توسط منبع جریان در مدتی که ولتاژ خازن از مقدار $v_C(۰^+)$ به مقدار $v_C(t_۰)$ می رسد برابر است با

$$v_C(t) = v_C(\infty) + \left[v_C(۰^+) - v_C(\infty)\right] e^{\frac{-t}{\tau}}$$

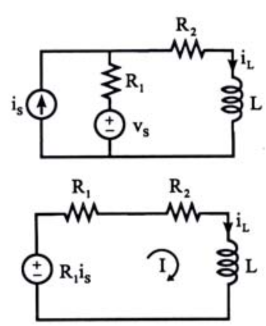
$$v_C(t = t_۰) = V_۰$$

$$w_{I_s} = \int_۰^{t_۰} v_C(t) . I_s dt = I_s \int_۰^{t_۰} v_C(t) dt$$



نکته: گاهی اوقات در مدارهای مرتبه اول به دنبال معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده خروجی (پاسخ) به یک ورودی مورد نظر هستیم. در این حالت با نوشتن KVL و KCL سعنی می کنیم متغیر مورد نظر را برحسب ورودی به دست آوریم. یاداوری این نکته حائز اهمیت است که در صورتی ورودی های مستقل مدار بیش از یکی باشد در هنگام نوشتن معادله دیفرانسیل ورودی های دیگر باید از مدار حذف گردند. ضمن این که شرایط اولیه در تعیین معادله دیفرانسیل هیچ نقشی ندارند.

مثال: در مدار مقابل معادله دیفرانسیلی که i_L را به i_S ارتباط می دهد، به دست آورید.



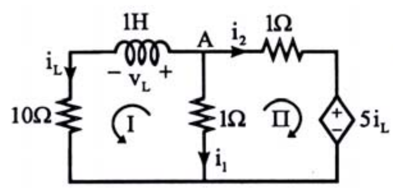
حل: با حذف (اتصال کوتاه کردن) منبع ولتاژ و تبدیل منبع برای مدار مقابل KVL می زنیم

$$KVLI: R_۱ i_L + R_۲ i_L + v_L = R_i i_s$$

$$L\frac{di_L}{dt} + \left(R_۱ + R_۲\right)i_L = R_۱ i_s$$

نکته: گاهی اوقات در مدارهای مرتبه اول به دنبال جریان یا ولتاژ در لحظه $t=۰^+$ هستیم. برای حل این گونه مسائل باید سعی کنیم متغیر مورد نظر را برحسب جریان سلف (یا ولتاژ خازن) و ورودی ها به دست آوریم. تجربه نشان می دهد در تعیین شرایط اولیه، نوشتن KCL برای گره‌هایی که دارای سلف و منابع جریان هستند و همچنین نوشتن KVL برای حلقه‌هایی که دارای خازن و منابع ولتاژ هستند، بسیار مفید می باشد. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال: در مدار مقابل در صورتی که $i_L(۰^-) = I_۰$ باشد مقدار $v_L(۰^+)$ را به دست آورید



$$i_L\left(۰^+\right) = i_L\left(۰^-\right) = I_۰$$

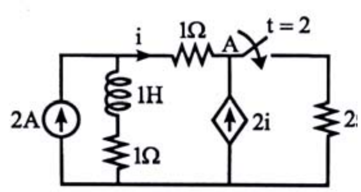
ابتدا سعی می کنیم متغیر $i_۱$ را برحسب i_L به دست آوریم

$$\begin{array}{l} KCLA: i_۱ + i_۲ = -i_L \\ LVLII: i_۲ + ۵i_L - i_۱ = ۰ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} i_۱ + i_۲ = -i_L \\ i_۲ - i_۱ = -۵i_L \end{cases} \Rightarrow i_۱ = ۲i_L$$

$$KVLI: v_L + ۱۰i_L - i_L = ۰ \Rightarrow v_L\left(۰^+\right) + ۱۰i_L\left(۰^+\right) - ۲i_L\left(۰^+\right) = ۰$$

$$v_L\left(۰^+\right) = -۸i_L\left(۰^+\right) = -۸I_۰$$

مثال: برای مدار مقابل مقدار $i\left(۲^-\right)$ چقدر است؟



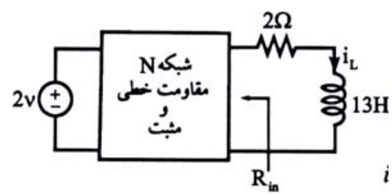
حل: به ازای t<۲ برای گره A، KCL می زنیم

$$KCLA: -i-۲i=۰ \Rightarrow i=۰$$

بنابراین به ازای t<۲ جریان i همواره صفر است.

نکته: گاهی اوقات شبکه ای به همراه پاسخ (یا منحنی پاسخ) داده می شود و یک پارامتر مدنظر است.

مثال: شبکه N مدار مقابل از مقاومت های خطی و مثبت تشکیل شده است. در صورتی که پاسخ شبکه معلوم و به صورت زیر باشد، مقاومت ورودی شبکه R_{in} را به دست آورید.



i

$$i_L(t)=\frac{۳}{۵}\left(۱-e^{\frac{-t}{۲}}\right) \qquad t\geq ۰$$

حل: ثابت زمانی به کمک رابطه $i_L(t)$ برابر است با $Sec \quad \tau=۲$ از طرفی ثابت زمانی به کمک شبکه N برابر است با

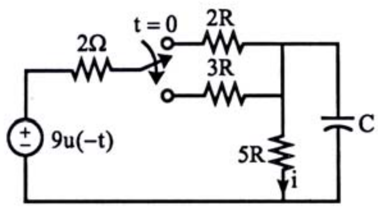
$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=۲$$

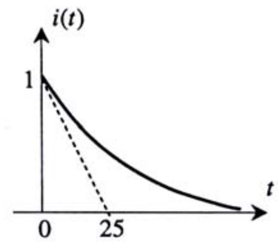
R_{eq}: مقاومت دیده شده از دو سر سلف

$$R_{eq}=R_{in}+۲ \Rightarrow \tau=\frac{۱۳}{R_{in}+۲}$$

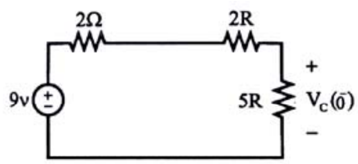
$$(\times),(\times\times) \Rightarrow ۲=\frac{۱۳}{R_{in}+۲} \Rightarrow R_{in}=\frac{۹}{۲}\Omega$$

مثال: مدار مقابل بهمراه منحنی پاسخ آن داده شده است. مقدار R را تعیین کنید.





حل: برای $t<۰$ خازن شارژ و مدار باز می گردد.



$$v_C\left(۰^-\right)=v_C\left(۰^+\right)=\frac{۵R}{۲+۷R}\times ۹$$

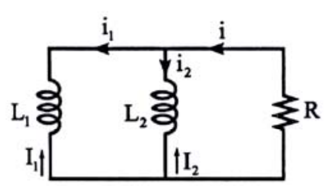
$$i\left(۰^+\right)=\frac{v_C\left(۰^+\right)}{۵R}=\frac{۹}{۲+۷R}$$

به کمک منحنی

$$i\left(۰^+\right)=۱A$$

$$(\times),(\times\times)\Rightarrow \frac{۹}{۲+۷R}=۱\Rightarrow R=۱\Omega$$

نکته: در مدار RL بدون ورودی مقابل سلف ها دارای شرایط اولیه می باشند و انتظار داریم فرم پاسخ کلیه ولتاژها به صورت



$$y(t)=y\left(۰^+\right)e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad\qquad t\geq ۰$$

باشد. اما پاسخ $i_۱(t)$ حالت دائمی یعنی $i_۱(\infty)$ را نیز داراست و فرم پاسخ آن به صورت

$$i_۱(t)=i_۱(\infty)+\left[i_۱\left(۰^+\right)-i_۱(\infty)\right]e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad t\geq ۰$$

علت این است که وجود حلقه سلفی باعث ایجاد ثابت بین حلقه سلفی در حالت دائمی می گردد. در شکل فوق دو سـلف $L_۱$ و $L_۲$ تشـکیل حلقه سلفی می‌دهند.

$$i_۱(\infty)=\frac{L_۲I_۲-L_۱I_۱}{L_۱+L_۲}, \qquad i_۲(\infty)=-i_۱(\infty), \qquad i(\infty)=۰$$

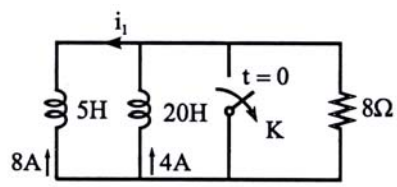
مثال: در مدار شکل مقابل جریان i(t) پس از باز شدن کلید k در $t\geq ۰$ کدام است؟

۱) $۸-۹.۶e^{-۲t}$

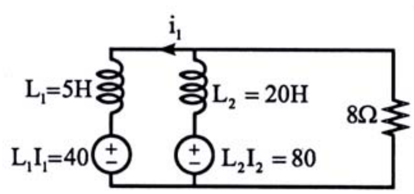
۲) $۱.۶-۹.۶e^{-۲t}$

۳) $۹.۶e^{-۲t}$

۴) $-۹.۶e^{-۲t}$



حل: روش اول



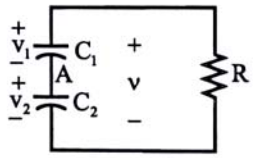
$$\tau=\frac{L_{eq}}{R}=\frac{۵\|۲۰}{۸}=\frac{۱}{۲}Sec, i_۱\left(۰^+\right)=i_۱\left(۰^-\right)=-۸A$$

$$i_۱(\infty)=\frac{L_۲I_۲-L_۱I_۱}{L_۱+L_۲}=\frac{۸۰-۴۰}{۵+۲۰}=\frac{۴۰}{۲۵}=۱.۶A$$

$$i_۱(t)=i_۱(\infty)+\left[i_۱\left(۰^+\right)-i_۱(\infty)\right]e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow i_۱(t)=۱.۶-۹.۶e^{-۲t} \qquad t\geq ۰$$

روش دوم: شرط $t \geq ۰$ $\quad y(t) = y(۰^+)e^{\frac{-t}{\tau}}$ تنها در گزینه (۲) صادق است.

نکته: در مدار RC بدون ورودی مقابل خازن ها دارای شرط اولیه می باشند و انتظار داریم فرم پاسخ ولتاژها و جریان های مدار به صورت



$$y(t) = y(۰^+)e^{e^{\frac{-t}{\tau}}}$$

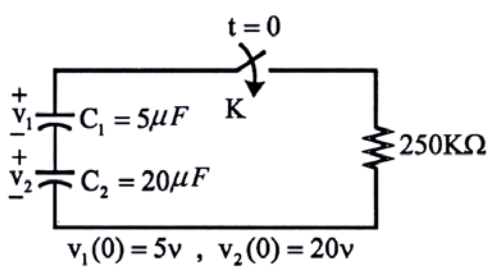
باشد اما پاسخ $v_۱(t)$ به صورت

$$v_۱(t) = v_۱(\infty) + \left[v_۱(۰^+) - v_۱(\infty)\right]e^{\frac{-t}{\tau}} \quad t \geq ۰$$

یعنی $v_۱(\infty)$ غیر صفر هم هست. علت این است که وجود خازنی (خازن هایی که تشکیل گره داده اند) باعث ایجاد ولتاژ ثابت می شود و لذا در حالت دائمی ولتاژ ثابتی بین خازن ها می افتد. در شکل فوق دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ تشکیل گره خازنی A داده‌اند.

$$v_۱(\infty) = \frac{C_۱ v_۱ - C_۲ v_۲}{C_۱ + C_۲},\ v_۲(\infty) = -v_۱(\infty) \qquad , \qquad v(\infty) = ۰$$

مثال: در مدار شکل مقابل در لحظه t=۰ کلید k را می بندیم، معادله ولتاژ دو سر خازن $C_۱$ چقدر است؟



حل:

$$v_۱\left(۰^-\right)=v_۱\left(۰^+\right)=۵(v), v_۱(\infty)=\frac{C_۱v_۱(۰)-C_۲v_۲(۰)}{C_۱+C_۲}=\frac{۲۵-۴۰۰}{۵+۲۰}=۱۵(v)$$

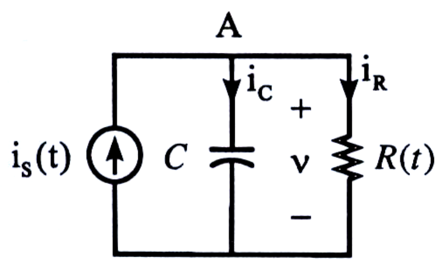
$$\tau=C_{eq}R=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}R=\frac{۵\times ۲۰}{۵+۲۰}\times ۱۰^{-۶}\times ۲۵۰\times ۱۰^{۳}=۱\quad Sec$$

$$v_۱(t)=v_۱(\infty)+\left[v_۱\left(۰^+\right)-v_۱(\infty)\right]e^{\frac{-t}{\tau}}\Rightarrow v_۱(t)=-۱۵+۲۰e^{-t}$$

تحلیل مدارهای مرتبه اول متغیر با زمان

برای تحلیل مدارهایی که دارای المان های متغیر با زمان هستند، ابتدا معادله دیفرانسیل پاسخ مورد نظر را برحسب ورودی به دست آورده و سپس معادله (ریاضی) را حل می کنیم.

مثال: برای مدار متغیر با زمان مقابل در حالت های زیر پاسخ v(t) را به دست آورید.



الف) $i_S(t)=tu(t), R(t)=\frac{۱}{t}, C=۱F$

ب) $i_S(t)=tu(t), R(t)=t, C=۲F$

حل الف)

$$KCLA: i_C+i_R=tu(t)\Rightarrow\frac{dv}{dt}+tv=tu(t)\qquad ,v(۰)=۰$$

معادله (x)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه خطی است.

$$f(t)=t, q(t)=t, g(t)=\int t dt=\frac{t^{2}}{2}$$

$$v(t)=e^{\frac{-t^{2}}{2}}\left[\int te^{\frac{t^{2}}{2}}+c\right]=1+ce^{\frac{-t^{2}}{2}} \quad , v(0)=0 \Rightarrow c=-1 \Rightarrow v(t)=1-e^{\frac{-t^{2}}{2}}$$

حل ب)

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{2t}=\frac{3}{2}tu(t) \qquad , \qquad v(1)=0$$

$$f(t)=\frac{1}{2t}, q(t)=\frac{3}{2}t, g(t)=\int \frac{1}{2t}dt=\frac{Lnt}{2}$$

$$v(t)=e^{\frac{-1}{2}Lnt}\left[\int \frac{3}{2}te^{\frac{1}{2}Lnt}+c\right]=\frac{3}{2}t^{2}+\frac{c}{\sqrt{t}}, v(1)=0 \Rightarrow -\frac{3}{5} \Rightarrow v(t)=\frac{3}{5}\left(t^{2}-t^{\frac{-1}{2}}\right) \quad t>0$$

مدارهای مرتبه دوم

تعریف مدار مرتبه دوم

مدارهای مرتبه دوم از دو عنصر ذخیره کنندهٔ انرژی (یک سلف و یک خازن، یا دو سلف، یا دو خازن) و هر تعداد مقاومت و منابع ولتاژ و جریان تشکیل می شوند. معادله دیفرانسیل کلی حاکم بر مدارهای مرتبه دوم عبارتست از:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \text{عبارتی برحسب ورودی و مشتقاتش}$$

ω_0: فرکانس تشدید $\left(\frac{rad}{s}\right)$

α: ضریب میرانی یا ضریب تضعیف $\left(\frac{veper}{s}\right)$

پاسخ کامل این معادلهٔ دیفرانسیل، مجموعی از پاسخ **همگن** (پاسخ ورودی صفر) و پاسخ **خصوص** (پاسخ حارت صفر) می باشد.

پاسخ همگن

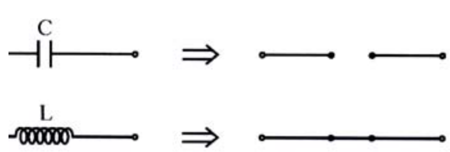
برای یافتن پاسخ همگن، از معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با این معادله دیفرانسیل استفاده می کنیم:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

بنابراین شکل کلی پاسخ همگن بصورت $y_h(t) = \left(k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}\right) u(t)$ خواهد بود (k_1 و k_2 با توجه به شرایط اولیهٔ $y(0)$ و $\frac{dy(0)}{dt}$ تعیین می شوند.)

پاسخ خصوصی

در **حالت خاصی** که ورودی مدار **فقط منابع DC** باشند، اثبات می شود که «پاسخ خصوصی همان پاسخ دایمی است.» و بنابراین می‌توانیم از معادل های زیر، برای یافتن پاسخ حالت ماندگار استفاده کنیم:



پاسخ خصوصی (به ازای گونه‌های دیگرِ ورودی، مانند سینوسی، نمایی و...) توسط روش هایی نظیر تحلیل ماندگار سینوسی، تحلیل لاپلاس و... بدست می آید.

ضریب کیفیت (Q)

هر قدر این انرژی ذخیره شده در یک مدار مرتبه دوم دیرتر میرا شود، آن مدار دارای ضریب کیفیت بیشتری خواهد بود. ضریب کیفیت بصورت زیر تعریف می شود:

$$\text{ضریب کیفیت} \overset{\Delta}{=} 2\pi \times \frac{\text{Re}\ active\ \ Power}{Average\ \ Power} = \frac{\omega_\circ}{2\alpha}$$

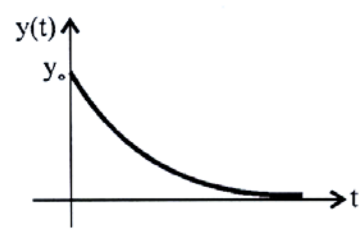
انواع مدارهای مرتبهٔ دوم

برحسب شکل پاسخ گذرا در یک مدارِ مرتبه دوم (و در حقیق براساس مکان ریشه های معادلهٔ مشخصه)، ۴ نوع مدار مرتبه دوم وجود دارد

میرایی شدید ($\alpha > \omega_\circ$ / $Q < \frac{1}{2}$)

در این حالت S_1 و S_2 هر دو حقیقی و منفی هستند و پاسخ به سرعت و بدون نوسان میرا می شود. فرم کلی پاسخ در این حالت، عبارتست از:

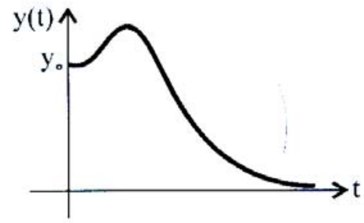
$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega_\circ^2 - \alpha} \Rightarrow \qquad y(t) = \left(k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}\right) u(t)$$



میرایی بحرانی ($\left(Q = \frac{1}{2} \quad / \quad \alpha = \omega_\circ\right)$)

در این حالت $S_1 = S_2$، ریشه‌های حقیقیِ منفی هستند و پاسخ گذرا تنها با یک جهش میرا می شود. فرم کلی پاسخ در این حالت، عبارتست از:

$$S_1 = S_2 = -\alpha \Rightarrow \qquad y(t) = \left(k_1 + k_2 t\right) e^{-\alpha t} u(t)$$



میرایی ضعیف $\left(Q > \frac{1}{2} \quad / \quad \alpha = \omega_{\circ}\right)$

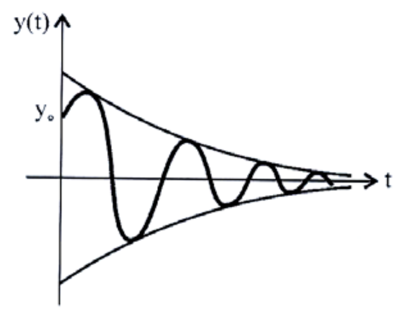
در این حالت $\alpha^{2} - \omega_{\circ}^{2} < 0$ است و نتیجه S_1 و S_2 ریشه های مختلط خواهند بود:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \qquad , \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_{\circ}^{2} - \alpha^{2}}$$

ω_d: فرکانس نوسانات میرا شونده $\left(\frac{rat}{s}\right)$

فرم کلی پاسخ در این حالت، عبارتست از:

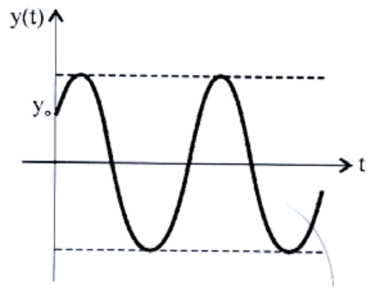
$$y(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)u(t) = e^{-\alpha t}(k_1 \cos\omega_d t + k_2 \sin\omega_d t)u(t)$$



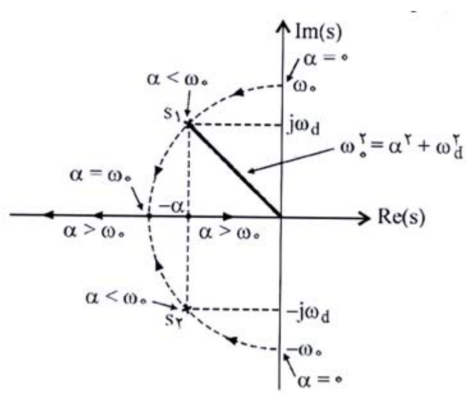
نامیرا یا نوسانی یا بدون تلف $(Q \to \infty \quad / \quad \alpha = 0)$

در این حالت S_1 و S_2 هر دو موهومی محض هستند و پاسخ هرگز میرا نمی‌شود:

$$S_{1,2} = \pm j\omega_{\circ} \quad \Rightarrow \quad y(t) = k\cos(\omega_{\circ} t + \theta)u(t) = (k_1 \cos\omega_{\circ} t + k_2 \sin\omega_{\circ} t)u(t)$$



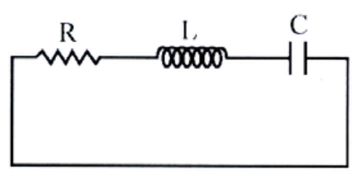
نمودار زیر، مکان هندسی ریشه های معادلهٔ مشخصهٔ یک مدار (سیستم) مرتبه دوم را به ازای αهای مختلف به تصویر می کشد:



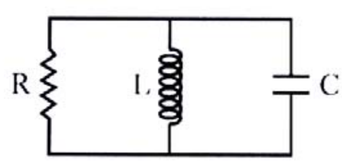
مسیر حرکت قطب‌ها **متقارن** است و مکان هندسی **به ازای** $R \geq ۰$ رسم شده است.

دو حالت خاص از مدارات مرتبه دوم، مدارهای BLC سری و موازی هستند:

مدار RLC سری



$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\alpha = \dfrac{R}{L} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

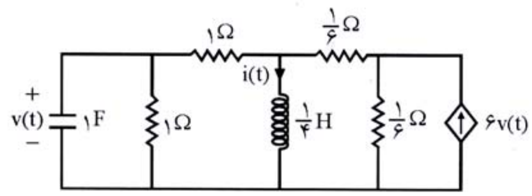


$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\alpha = \dfrac{1}{RC} \\ Q = R\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

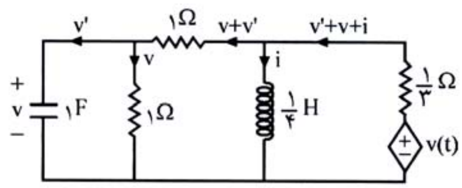
تحلیل مدارات مرتبه دوم در حوزهٔ زمان

کافیست معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بیابیم و سپس این معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنیم. دو مثال زیر نمونه ای از این نوع تحلیل می باشد.

مثال: پاسخ ورودی صفر v(t) را در مدار شکل زیر تعیین کنید. (برای شرایط اولیهٔ $v(\circ)=۱(V), i_L(\circ)=-۸(A)$.



ابتدا با استفاده از تبدیلات تونن و نورتن، مدار را تا حد امکان ساده می‌کنیم:



با توجه به موازی بودن خازن و مقاومت، جریانِ مقاومت از قانون اهم $\frac{v}{۱}$ بدست می‌آید. همچنین با توجه به رابطـهٔ $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$، جریـان خازن $v'(t)$ می باشد. حال باید معادله دیفرانسیل حاکم بر v را بیابیم:

KVL در مش سمت راست:

$$\frac{۱}{٤}i' - v + \frac{۱}{۳}\left(i + v' + v\right) = ۰$$

KVL در مش وسط:

$$\frac{۱}{٤}i' = v' + ۲v$$

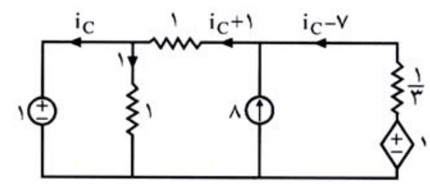
با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱)، می توانیم بنویسیم:

$$v' + ۲v - v + \frac{۱}{۳}\left(i + v' + v'\right) = ۰$$

برای حذف متغیر مزاحم i، از رابطهٔ فوق مشتق گرفته و از رابطهٔ (۲) استفاده می کنیم. پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$v''+2v'+2v=0 \quad\Rightarrow\quad S^2+2S+2=0 \quad\Rightarrow\quad S_{1,2}=-1\pm j$$

بنابراین مدار در حالت میرایی ضعیف قرار دارد و پاسخ به فرم کلی $v(t)=e^{-t}(k_1\cos t+k_2\sin t)u(t)$ می باشد. برای یافتن ثوابت k_1 و k_2، باید از شرایط اولیهٔ $v(0)$ و $v'(0)$ استفاده کنیم. برای یافتن شرط اولیهٔ $v'(0)$، کافیست با توجه به عدم تغییر ناگهانی ولتاژ خازن و جریان سلف، مدار را در لحظهٔ $t=0^+$ رسم کنیم: (توجه کنید با توجه به شکل مدار $v'(0)=i_C(0)$ می باشد.)



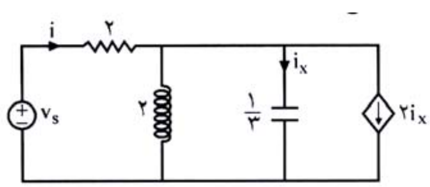
با KVL زدن در حلقهٔ بیرونی مدار در $t=0^+$ می توانیم بنویسیم:

$$1\times(i_C+1)+1-1+\frac{1}{3}(i_C-7)=0 \quad\Rightarrow\quad i_C(0^+)=v'(0^+)=1\left(V/s\right)$$

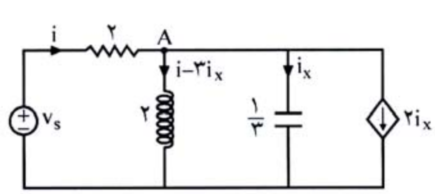
در پایان با جایگذاری شرایط اولیهٔ $\begin{cases}v(0)=1\\ v'(0)=1\end{cases}$ در پاسخ عمومیِ $v(t)$ و مشتق آن، ضرایب k_1 و k_2 برابر خواهند بود با:

$$\left.\begin{matrix}k_1=1\\ k_2=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \quad v(t)=e^{-t}(\cos t+2\sin t)u(t)$$

مثال: در مدار شکل زیر پاسخ ضربهٔ i(t) را بیابید.



با KCL زدن در گرهٔ A، جریان سلف بدست می‌آید:



KVL در مش سمت چپ:

$$v_s \, ۲i + ۲\left(i - ۳i_x\right)' = ۲i + ۲i' - ٦i_x{}'$$

KVL در مش وسط:

$$۲\left(i - ۳i_x\right)' = ۳\int i_x dt \quad \Rightarrow \qquad ۲i'' - ٦i_x{}'' = ۳i_x$$

با توجه به رابطهٔ (۱) می توانیم بنویسیم:

$$i_x' = \frac{۲i + ۲i' - v_s}{٦}$$

با مشتق گیری از رابطهٔ (۲) و سپس جایگذاری رابطهٔ (۳) در آن، داریم:

$$۲i''' - ۲i'' - ۲i''' + v_s{}'' = i + i' - \frac{v_s}{۲} \qquad \Rightarrow \qquad ۲i'' + i' + i = \delta'' + \frac{\delta}{۲}$$

از حل معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با این معادله دیفرانسیل، $۲s^۲ + s + ۱ = ۰$، ریشه های معادله مشخصه به صورت $s_{۱,۲} = \frac{-۱ \pm j\sqrt{۷}}{٤}$ بدست می آیند و لذا پاسخ **همگن** مدار عبارتست از:

$$i_h(t) = e^{-t/٤}\left(A\cos\frac{\sqrt{۷}}{٤}t + B\sin\frac{\sqrt{۷}}{٤}t\right)u(t)$$

از طرفی با توجه به اینکه سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل فوق شامل مشتق مرتبهٔ دومِ تابع δ می باشد و سمت چپ معادله دیفرانسیل، حداکثر دارای مشتق مرتبه دوم i می باشد، حدس می زنیم پاسخ خصوصیِ $i_p(t)$ شامل تابع ضربه می باشد

$$i_p(t) = C\delta(t)$$

بنابراین با توجه به اینکه پاسخ کامل از رابطهٔ $i = i_h + i_p$ بدست می آید، فرم کلی پاسخ ضربهٔ مدار عبارتست از

$$i(t) = e^{-t/٤}\left(A\cos\frac{\sqrt{۷}}{٤}t + B\sin\frac{\sqrt{۷}}{٤}t\right)u(t) + C\delta(t)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbf{۲}i''+i'+i=\delta''+\frac{\delta}{\mathbf{۲}}$، داریم:

$$e^{\frac{-t}{۴}}\left[\frac{-۶A-۲B\sqrt{۷}+۲B\sqrt{۷}-۲A+۸A}{۸}\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right.$$
$$\left.+\frac{-۶B-۲A\sqrt{۷}+۲A\sqrt{۷}-۲B+۸B}{۸}\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right]u(t)$$
$$+\frac{B\sqrt{۷}-A-۲A+C}{۲}\delta(t)+(۲A+C)\delta'(t)+۲C\delta''(t)=\delta''(t)+\frac{\delta(t)}{۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{B\sqrt{\mathbf{۷}}-\mathbf{۳}A+C}{\mathbf{۲}}\delta(t)+(\mathbf{۲}A+C)\delta'(t)+\mathbf{۲}C\delta''(t)=\delta''(t)+\frac{\delta(t)}{\mathbf{۲}}$$

نکته: همانطور که می بینیم، ضرایبِ توابع سینوس و کسینوس صفر شده اند. البته اگر کمی دقت می کردیم، این موضوع از همان ابتدا هم قابل پیش بینی بود. زیرا سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل **فقط** شامل توابع ضربه است و بنابراین **اگر** پاسخ خصوصی را درست حدس زده باشیم، ضرایب سینوس و کسینوس **باید** صفر شوند. (با استفاده از این نکته، حل این گونه مسائل بسیار ساده تر و کوتاهتر صورت می پذیرد.)

با مساوی قرار دادنِ ضرایبِ δ، δ' و δ'' در طرفین، ضرایب مجهول A، B و C به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases}۲C=۱\\ ۲A+C=۰\\ \frac{B\sqrt{۷}-۳A+C}{۲}=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=\frac{۱}{۲}\\ A=\frac{-۱}{۴}\\ B=\frac{-۱}{۴\sqrt{۷}}\end{cases}$$

بنابراین پاسخ ضربهٔ مدار عبارتست از:

$$i(t)=\frac{-\mathbf{۱}}{\mathbf{٤}}^{-t/\mathbf{٤}}\left(\cos\frac{\sqrt{\mathbf{۷}}}{\mathbf{٤}}+\frac{\mathbf{۱}}{\sqrt{\mathbf{۷}}}\,siv\,\frac{\sqrt{\mathbf{۷}}}{\mathbf{٤}}t\right)u(t)+\frac{\mathbf{۱}}{\mathbf{۲}}\delta(t)$$

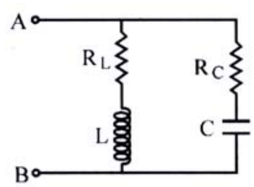
نوسان سازی

مدار LC موازی، در حالت ورودی صفر حالت خاصی از مدارهای نوسان ساز به شمار می‌آید. از آنجایی که در این مدار $\alpha=۰$ است، انرژی در مدار تلف نمی‌شود و **بصورت** متناوب، بین سلف و خازن، از صورتی **بصورت** دیگر تبدیل می شود. (انرژی الکتریکی و انرژی مغناطیسی). با

توجه به معادله دیفرانسیل کلی حاکم بر مدارهای مرتبه دوم (با ورودی صفر)، $y''+2\alpha y'+\omega_0^2=0$ ، شرط تبدیل شدن یک مدار مرتبه دوم به نوسان‌ساز، قرار گرفتن آن مدار در حالت نامیرا (بی‌اتلاف) است. بنابراین شرط لازم و کافی برای نوسان‌سازی چنین مداری عبارتست از:

$$\alpha=0 \qquad , \qquad \omega_0^2>0$$

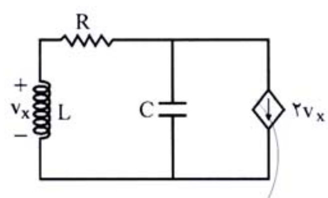
اما از آنجایی که سلف و خازن فیزیکی دارای یک مقاومت داخلیِ ذاتی هستند، در عمل با موازی کردن سلف و خازن به مدار زیر می‌رسیم: (که در آن $\alpha\neq0$ است.)



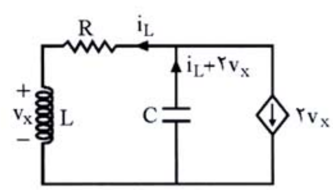
$$\Rightarrow \qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L-R_L^2C}{L-R_C^2C}}$$

برای تبدیل نمودن این مدار به نوسان‌ساز، از یک **مقاومت منفی** بین سرهای A و B استفاده می‌کنیم. (تا اثر مقاومت مثبتِ ذاتیِ سلف و خازن را خنثی کند.)

مثال: در مدار شکل زیر، R را به نحوی بیابید که مدار به نوسان‌ساز تبدیل شود. فرکانس نوسانات این نوسان‌ساز چقدر است؟



با نسبت دادن جریان به سلف، جریان خازن بصورت مشخص شده روی شکل بدست می‌آید:



با KVL زدن در تنها حلقهٔ اساسی مدار، می‌توانیم بنویسیم:

$$Ri_L+v_x+\frac{1}{C}\int\left(i_L+2v_x\right)dt=0$$

با دو مرتبه مشتق گیری از رابطهٔ فوق، داریم:

$$Ri_L'' + v_x'' + \frac{۱}{C}\left(i_L' + ۲v_x'\right) = ۰ \xrightarrow{i_L' = \frac{v_x}{L}} v_x'' + \left(\frac{R}{L} + \frac{۲}{C}\right)v_x' + \frac{۱}{LC}v_x = ۰$$

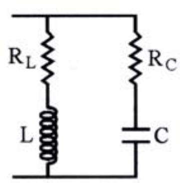
برای اینکه مدار به نوسان تبدیل شود، باید در حالت بی اتلاف (نوسانی) قرار گیرد. برای این منظور، کافیست شرط $\alpha = ۰$ برقرار باشد:

$$۲\alpha = ۰ \Rightarrow \quad \frac{R}{L} + \frac{۲}{C} = ۰ \quad \Rightarrow \quad R = \frac{-۲L}{C}$$

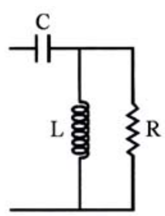
بنابراین معادلهٔ مشخصهٔ سیستم به شکل $S^۲ + \frac{۱}{LC} = ۰$ در می‌آید و فرکانس نوسانات برابر است با

$$\omega_۰ = \frac{۱}{\sqrt{LC}} > ۰$$

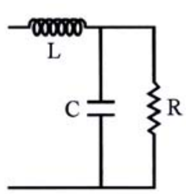
نکته: توصیه می‌کنم فرکانس تشدید سه مدار زیر را به خاطر بسپارید:



$$\Rightarrow \omega_۰ = \frac{۱}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L - R_L^۲ C}{L - R_C^۲ C}}$$



$$\Rightarrow \omega_۰ = \frac{۱}{\sqrt{LC - \frac{L^۲}{R^۲}}}$$



$$\Rightarrow \omega_۰ = \sqrt{\frac{۱}{LC} - \frac{۱}{R^۲C^۲}}$$

نکته بسیار مهم: در بسیاری از مسائل (به خصوص برای حل تست با استفاده از روش رد گزینه!) لازم است که $i'_L\left(\circ^+\right)$ و $v'_C\left(\circ^+\right)$ را بیابیم. الگوریتم زیر، می تواند رهیافت مناسب برای این منظور باشد:

۱- رسم مدار در $t=\circ^-$ (وقتی سلف و خازن به شارژ کامل رسیده‌اند) و یافتن شرایط اولیه $v_C\left(\circ^-\right)$ و $i_L\left(\circ^-\right)$.

۲- رسم مدار در $t=\circ^+$ (با توجه به عدم تغییر ناگهانی $v_C\left(\circ^-\right)$ و $i_L\left(\circ^-\right)$) و یافتن $v_L\left(\circ^+\right)$ و $i_c\left(\circ^+\right)$.

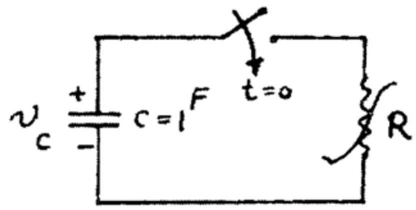
۳- استفاده از روابط اساسی سلف و خازن:

$$i_L{}'\left(\circ^+\right)=\frac{v_L\left(\circ^+\right)}{L}\quad,\qquad v'_c\left(\circ^+\right)=\frac{i_c\left(\circ^+\right)}{C}$$

مجموعه تست فصل دوم

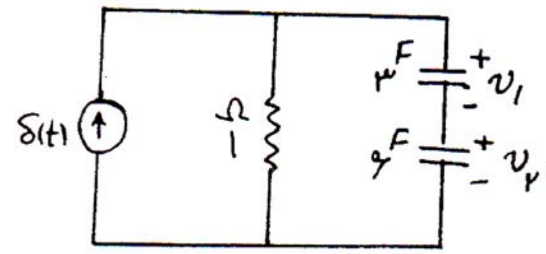
۲-۱ یک مقاومت غیر خطی با مشخصه $v^{۳} = ۳i$ با خازن خطی $C = ۱^{F}$ موازی شده است .

اگر ولتاژ اولیه خازن هنگام موازی شدن $v_C(۰) = ۳^{V}$ باشد ولتاژ خازن بعد از یک ثانیه چقدر خواهد شد ؟



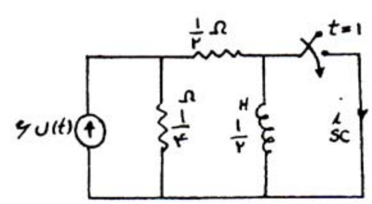
۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۷}}{۳}$

۲-۲ در مدار شکل زیر با فرض $v_۱(۰^-) = v_۲(۰^-) = ۰$, $v_۱(۰^+)$ را تعیین کنید .



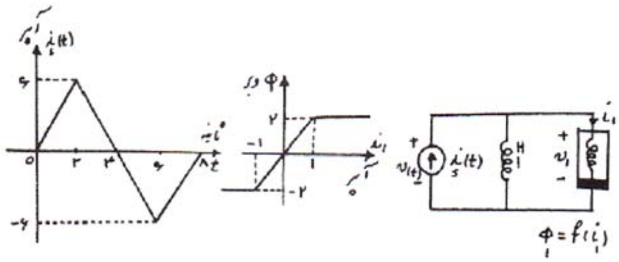
۱) $\frac{۱}{۶}$v ۲) $\frac{۱}{۳}$v ۳) $\frac{۱}{۲}$v ۴) ۱v

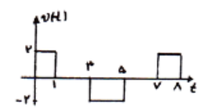
۲-۵ در مدار شکل مقابل که هیچ انرژی در سلف وجود ندارد کلید s در لحظه t=۱ بسته می شود. جریـان گذرنـده از شاخه اتصال – کوتاه i_{SC} در t=۴ چقدر است ؟

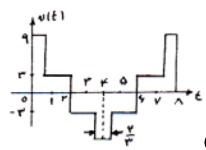


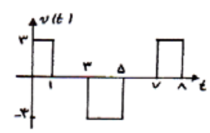
۱) ۰/۴۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۹۹۵ ۴) هیچکدام

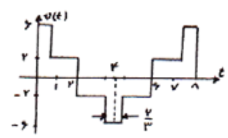
۲-۶ در مدار شکل مقابل شکل موج $v(t)$ برابر کدام گزینه است؟



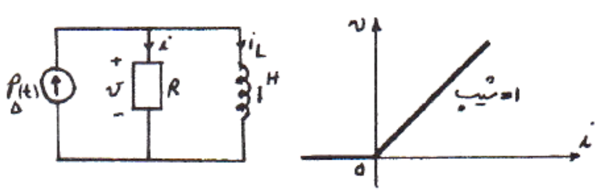
۱) 

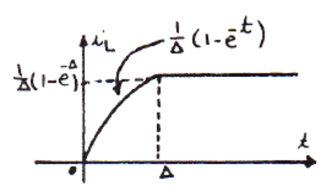
۲) 

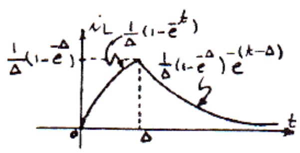
۳) 

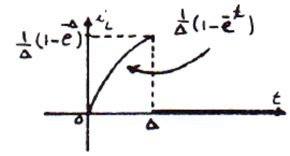
۴) 

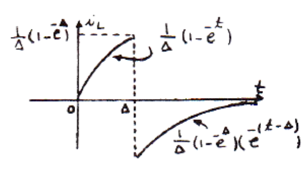
۲-۷ اگر R مقاومت غیر خطی با مشخصه $v-i$ نشان داده شده باشد .پاسخ پالس مدار برای i_L چیست ؟ (انـرژی اولیه سلف صفر است) . ($P_\Delta(t)$ تابع پالس واحد با پهنای Δ و بلندی $\frac{۱}{D}$ است).



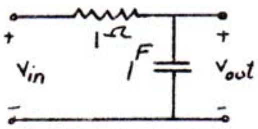
۱) 

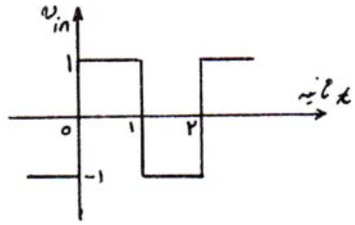
۲) 

۳) 

۴) 

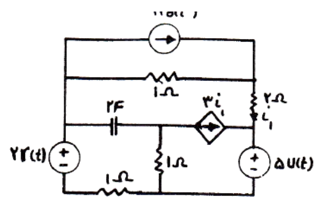
۲-۱۱ دامنه ماکزیمم ولتاژ خروجی مدار شکل زیر به ورودی داده شده ، در حالت ماندگار چند ولت است؟





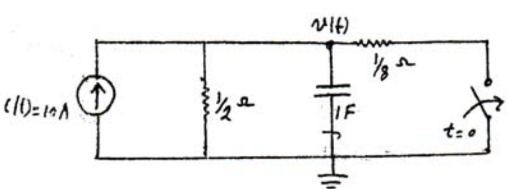
۱) $1+e^{-1}$ ۲) $e-1$ ۳) $\frac{e-1}{e+1}$ ۴) $\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}$

۲-۱۲ ثابت زمانی مدار شکل مقابل چند ثانیه است؟



۱) 1/5 ۲) 2 ۳) 3/5 ۴) 5

۲-۱۵ در مدار زیر کلید در زمان t=۰ بسته شده معادله ی $v(t)$ در زمان $t \geq 0$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟



۱) $v(t) = 4e^{-t} + 1$ ۲) $v(t) = 4e^{-t} - 1$

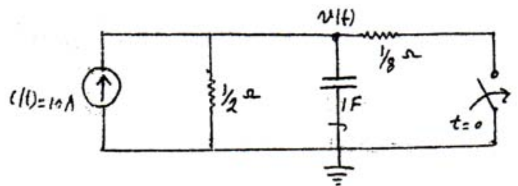
۳) $v(t) = e^{-t} + 1$ ۴) $v(t) = 2e^{-t} + 1$

۲-۱۶ معادله جریان در صورتی که $v_{C1}(0) = 1V$ و $v_{C2}(0) = 2V$ در مدار زیر باشد، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $i(t) = -\frac{1}{2}e^{-0/5t}$ ۲) $i(t) = -e^{-0/5t}$

۳) $i(t) = \frac{1}{3}e^{-0/5t}$ ۴) $i(t) = e^{-0/5t}$

۲-۱۷ در مدار زیر کلید در زمان $t=۰$ بسته شده، معادله $v(t)$ در زمان $t\geq ۰$ برابر کدام گزینه زیر است؟



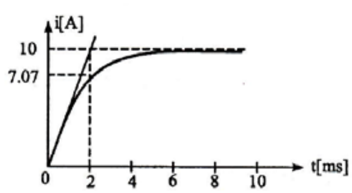
۱) $v(t)=۴e^{-t}+۱$ ۲) $v(t)=۴e^{-t}-۱$

۳) $v(t)=e^{-t}+۱$ ۴) $v(t)=۲e^{-t}+۱$

۲-۱۸ ولتاژ در دو سر یک خازن خطی (C فاراد) برابر با رابطه $v(t)=۱-e^{-t}$ است جریان برابر با کدام گزینه زیر است؟

۱) $i-e^{-t}$ ۲) $i=ce^{-t}$ ۳) $i=-ce^{-t}$ ۴) $i=ce^{-t}$

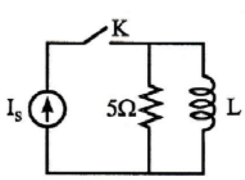
۲-۲۱- پاسخ یک مدار R-L سری به ورودی $u(t)=۱۰۰v$ مطابق شکل مقابل است. اندوکتانس سلف چند میلی هانری است؟



۱) ۶۰ ۲) ۲۰۰

۳) ۶۰۰ ۴) ۲۰

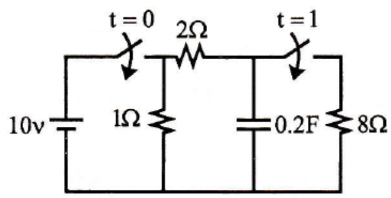
۲-۲۲- در مدار شکل رو به رو، برای اولین بار ۲ ثانیه پس از اتصال کلید K اندازه ی جریان R و L برابر می شود. اندازه ی L چند هانری است؟



۱) $۱۰-\mathrm{Ln}۲$ ۲) $۱۰/\mathrm{Ln}۲$

۳) ۰.۵ ۴) ۲.۵

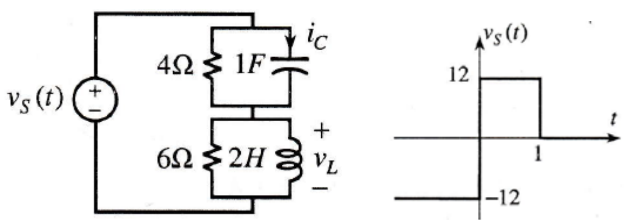
۲-۲۳- مدار مقابل بعد از چند ثانیه به حالت شارژ کامل می رود؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۲/۶ ۴) ۱/۶

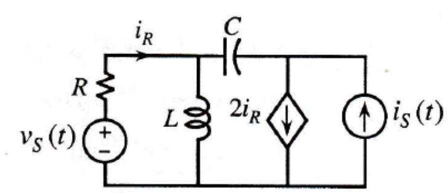
۲-۲۴- شکل موج $v_S(t)$ مدار شکل مقابل در زیر داده شده است. مقادیر $i_C(0^+)$ بر حسب آمپر و $v_L(0^+)$ بر حسب ولت کدام هستند؟



۱) ۱و۲۴ ۲) ۴و۲۴

۳) ۱و۱۲ ۴) ۴و۱۲

۲-۲۵- معادله دیفرانسیل مدار مقابل برای خروجی i_R کدام است؟



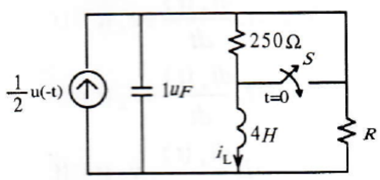
۱) $L\frac{di_R}{dt} - Ri_R = L\frac{di_s(t)}{dt} - v_s(t)$

۲) $L\frac{di_R}{dt} + Ri_R = L\frac{di_s(t)}{dt} + v_s(t)$

۳) $LC\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_R}{dt} = L\frac{di_s(t)}{dt} + v_s(t)$

۴) $LC\frac{d^2 i_R}{dt^2} - \frac{L}{R}\frac{di_R}{dt} = L\frac{di_s(t)}{dt} - v_s(t)$

۲-۲۶ - در مدار شکب مقابل کلید S در t=۰ بسته می شود و مدار در حالت میرائی بحرانی قرار می گیرد جریان $i_L(t)$ کدام است؟



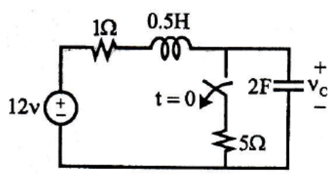
۱) $(۰.۴+۲.۲۵t)e^{-۵۰۰t}$

۲) $(۰.۴+۰.۲۲۵t)e^{-۲۰۰t}$

۳) $(۰.۴+۲۲۵t)e^{-۱۰۰۰t}$

۴) $(۰.۴+۲۲۵t)e^{-۵۰۰t}$

۲-۲۷- در شکل زیر، کلید مدت ها بسته بوده و در $t=۰$ باز می شود رابطه ی $v_C(t)$ برای $t\leq ۰$ کدام است؟



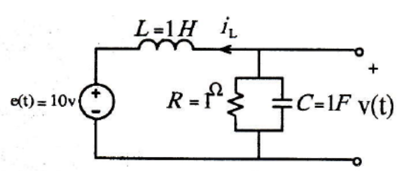
۱) $(-۲+t)e^{-t}+۱۲$

۲) $(۲-t)e^{-t}+۱۲$

۳) $(-۲-t)e^{-t}+۱۲$

۴) $(۲+t)e^{-t}+۱۲$

۲-۲۸- در مدار زیر v(t) برابر با کدام گزینه است. در صورتی که $i_L(۰)=۶A, v(۰)=۴V$ باشد.



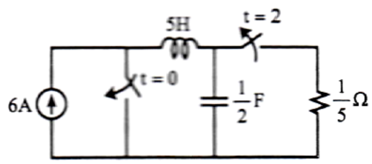
۱) $v(t)=e^{-۰.۵t}(۶Cos۰.۸۶۶t-۱۵Sin۰.۸۶۶t)-۱۰$

۲) $v(t)=e^{-۰.۵t}(۶Cos۰.۸۶۶t+۱۵Sin۰.۸۶۶t)+۱۰$

۳) $v(t)=e^{-۰.۵t}(۶Cos۰.۸۶۶t-۱۵Sin۰.۸۶۶t)+۱۰$

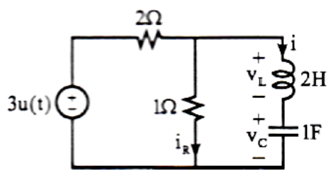
۴) $v(t)=e^{-۰.۵t}(-۶Cos۰.۸۶۶t-۱۵Sin۰.۸۶۶t)+۱۰$

۲-۲۹- در مدار مقابل ضریب میرایی به ازای $۰ < t \leq ۲$ کدام است؟



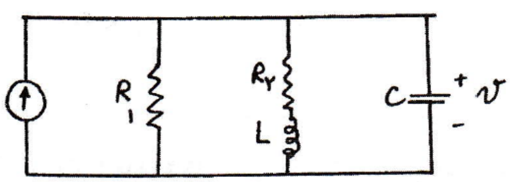
۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۲-۳۰- در مدار مقابل $i(۰^+), \frac{di(۰^+)}{dt}$ به ترتیب کدام اند؟



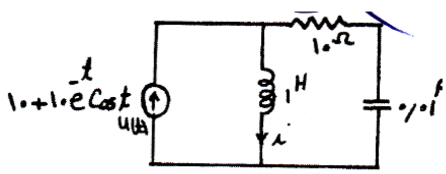
۱) $۰, \frac{۱}{۲}$
۲) ۱,۱
۳) $\frac{۱}{۲}, ۰$
۴) ۲,۰

۲-۳۲- فرکانس عمنوایی (تشدید) مدار زیر برابر است با:



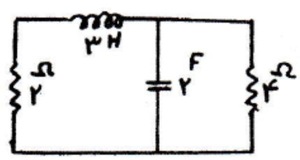
۱) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
۲) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{R_2}{L}\right)^2}$
۳) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2}$
۴) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - R^2}}$

۲-۳۳- در مدار شکل مقابل $\left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+}$ برابر است با:



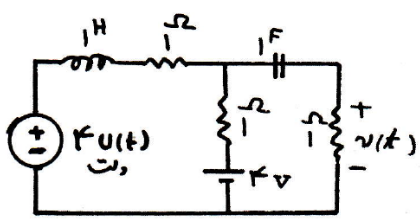
۱) ۱۰
۲) ۱۰-
۳) ۱۰۰
۴) ۱۰۰-

۲-۳۴- ضریب کیفیت مدار نشان داده شده را پیدا کنید.



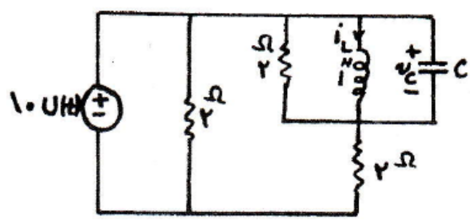
۱) $Q=\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۹}$
۲) $Q=\frac{\sqrt{۳}}{۱۹}$
۳) $Q=\frac{۲۴}{۱۹}$
۴) $Q=\frac{۱۲}{۱۹}$

۲-۳۵- در $t<۰$ مدار شکل مقابل در حالت دائمی است. معادله تغییرات ولتاژ $v(t)$ در $t>۰$ را تعیین کنید؟



۱) $t(t+۱)e^{-t}$
۲) $\frac{۱}{۲}te^{-t}$
۳) $\frac{۱}{۲}(t+۴)e^{-t}$
۴) $۲te^{-t}$

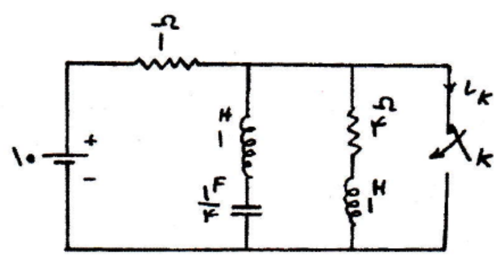
۲-۳۶- در مدار شکل مقابل داریم: $i_L(0^+=0)=0, v_c(0^+)=0, \frac{di_L}{dt}(0^+)=10, \frac{dv_C(0^+)}{dt}$ **مقدار C (ظرفیت خازن) برابر است با:**



۱) $\frac{1}{4}$ F   ۲) $\frac{1}{2}$ F

۳) ۱F   ۴) ۲F

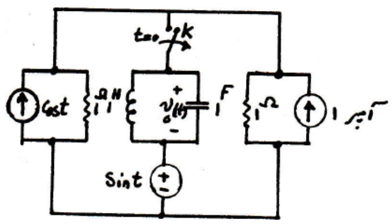
۲-۳۷- در مدار شکل صفحه بعد کلید K به مدت زمان زیادی باز بوده است. اگر در لحظه t=۰ کلید K را وصل کنیم جریان عبوری از کلید K (i_k) برای زمان های بعد از وصل کلید برابر است با:



۱) $i_k=10-2e^{\frac{-t}{4}}-4\sin 2t$ ۲) $i_k=8+2e^{-4t}+4\sin 2t$

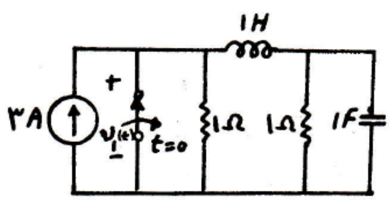
۳) $i_k=10-2e^{-4t}-4\sin 2t$ ۴) $i_k=10-2e^{-4t}+4\sin 2t$

۲-۳۸- در مدار شکل مقابل، کلید k به مدت طولانی بسته بوده تا مدار به حالت دائمی برسد. در لحظه t=۰ کلید k باز می شود. ولتاژ $v_۰(t)$ برای $t \geq ۰$ برابر کدام گزینه است؟



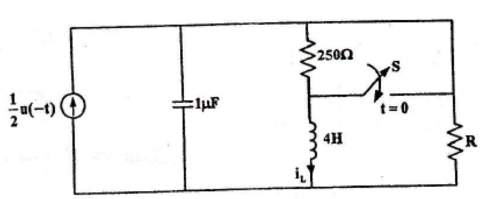
۱) $۱/۱۲\cos(t-۶۳/۴۳^\circ)$
۲) $۱/۱۲\cos(t+۶۳/۴۳^\circ)$
۳) $۲/۰۶\cos(t+۷۵/۹۶^\circ)$
۴) $۱/۱۲\cos(t-۷۵/۹۶^\circ)$

۲-۳۹- مدار شکل زیر قبل از اینکه کلید در t=۰ باز شود، در حالت دائمی است. $v_۱(۰^+)$ و $\frac{dv_۱(۰^+)}{dt}$ برابر کـدام گزینه اند؟



۱) $v_۱(۰^+)=۰ , v_۱'(۰^+=۳)$
۲) $v_۱(۰^+)=۰ , v_۱'(۰^+=-۳)$
۳) $v_۱(۰^+)=۳ , v_۱'(۰^+=۳)$
۴) $v_۱(۰^+)=۳ , v_۱'(۰^+=-۳)$

۲-۴۰- در مدار شکل زیر کلید S در t=۰ بسته می شود و مدار در حالت میرائی بحرانی قرار می گیرد، جریـان $i_L(t)$ کدام است؟

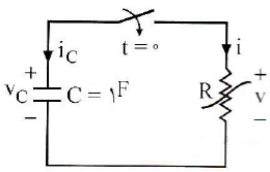


۱) $(۰/۴+۲/۲۵t)e^{-۵۰۰t}u(t)$
۲) $(۰/۴+۰.۲۲۵t)e^{-۲۰۰t}u(t)$
۳) $(۰/۴+۲۲۵t)e^{-۱۰۰۰t}u(t)$
۴) $(۰/۴+۲۲۵t)e^{-۵۰۰t}u(t)$

پاسخنامه تست‌های فصل دوم

۲-۱- گزینه ۲ صحیح است.

روش اول- مدار را به صورت زیر در نظر می گیریم:



با توجه به شکل فوق داریم:

$$v_C = v\ ,\ i_c = -i$$

با استفاده از ر وابط بالا، رابطه $v^3 = 3i$ به صورت زیر در می آید:

$$v^{۳} = ۳(-i_C) \xrightarrow{i_c = C\frac{dv_c}{dt}} v_C^{۳} = -۳\frac{dv_C}{dt}$$

معادله دیفرانسیل فوق از نوع جدایی پذیر است و به صورت زیر حل می شود:

$$-۳\frac{dv_C}{v_C^{۳}} = dt \Rightarrow \frac{3}{2v_c^2} + k = t$$

با توجه به صورت سوال $v_C(t=0) = 3$ می باشد. بنابراین:

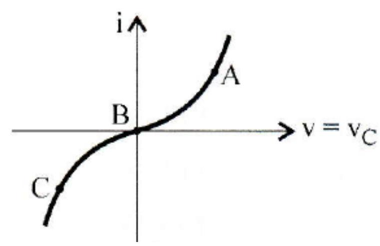
$$\frac{۳}{۲\times ۹} + k = ۰ \Rightarrow k = \frac{-1}{6} \Rightarrow \frac{3}{2v_C^2} - \frac{۱}{۶} = t$$

و لذا ذر بحظه t=۱، خواهیم داشت:

$$v_C(t=۱) = \pm\frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

اما تنها جواب قابل قبول، $v_C(۱)=\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ می باشد، زیرا از آنجایی که هیچ منبـع انرژیـی در مـدار وجـود نـداردو خـازن هـم عنصری پسیو می باشد، خازن حداکثر تا جایی دشارژ می شود که $v_C(t)$ به صـفر برشـد، ولـی تنمـی توانـد منفیـع بشـود. در حقیقت اگر v_C نتفی گردد، خازن باید به صورت یک منبع انرژی عمل کند (زیرا در چنین حـالتی حاصـل i_C, v_C منفـی مـی شود)

روش دوم: در شکل زیر مشخصه جریان- ولتاژ عنصر غیر خطی رسم شده است:



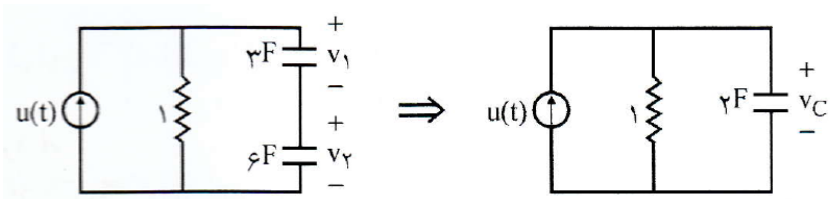
با توجه به این شکل، در $t=۰$, $v_C(۰)=۳$ است و مدار در نقطه A کار می کند . با گذشت ز مان، نقطه کار روی منحنــی و به سمت نقطه C شروع به حرکت می کند. بنابراین روی این مسیر $v_C(t)$ با گذشت زمان کـاهش مـی یابـد و بـه عبـارت دیگـر داریم:

$$\frac{dv_C}{dt}=i_c\leq ۰$$

با توجه به اینکه به ازای تمام زمان ها $i_C+i_R=۰$ می باشد و با توجه به منفی بودن i_C به ازای تمام زمان ها، نقطـه کـار مدار فقط در ناحیه AB (که در آن i_R مثبت است) می تواند قرار داشته باشد. با توجه به نمودار، در این ناحیه $v_C>۰$ اسـت، و بنابراین فقط جواب $v_C(t=۱)=\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ قابل قبول است.

۲-۲- گزینه (۲) صحیح است.

روش اول- از آنجایی که در سیستمهای LTI پایخ ضربه، مشتق پاسخ پله می باشد، در نتیجه می توانیم ورودی مدار را $i_s(t)=u(t)$ در نظر بگیریم و $\hat{v}_۱(t)$ را بیابیم و سپس با مشتق گیری از $\hat{v}_۱(t)$، پاسخ $v_۱(t)$ را به ورودی $i_s(t)=\delta(t)$ به دست آوریم.



$$\left.\begin{array}{l} v_C(۰^+)=v_C(۰^+)=۰(V) \\ v_C(\infty)=۱(V) \\ \tau=RC=۲(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(1-e^{\frac{-t}{2}}\right)u(t)$$

حال با استفاده از رابطه تقسیم ولتاژ در خازن ها، پاسخ $\hat{v1}(t)$ (به ازای ورودی پله)، به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{v}(t)=v_C(t)\times\frac{۶}{۶+۳}\left(۱-e^{-t/۲}\right)u(t)$$

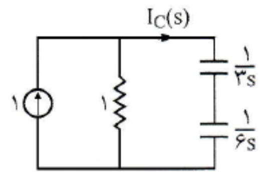
بنابراین پاسخ $v_1(t)$ به ازای ورودی ضربه، مشتق $\hat{v1}(t)$ خواهد بود:

$$v_۱(t)=\frac{d\,\hat{v}_۱(t)}{dt}=\frac{۱}{۳}e^{-t/۳}e(t)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$v_۱\left(۰^+\right)=\frac{۱}{۳}(V)$$

روش دوم- مدار را به حوزه لاپلاس می بریم:



با استفاده از دقاعده تقسیم جریان، داریم:

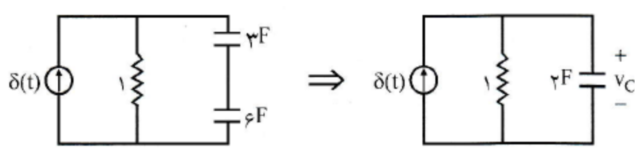
$$I_C(s) = ۱ \times \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۳s} + \frac{۱}{۶s}} = \frac{۲s}{۲s+۱}$$

$$V_۱(s) = \frac{۱}{۳s} \times I_C(s) = \frac{۲}{۳(۲s+۱)}$$

بنابراین، با توجه به قضیه مقدار اولیه، خواهیم داشت:

$$v_۱(۰^+) = \lim sV_۱(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{۲s}{۳(۲s+۱)} = \frac{۱}{۳}(V)$$

روش سوم-



با KCL زدن در گره مدار، داریم:

$$۲v'_C(t) + v_C(t) = \delta(t)$$

اگر از طرفین رابطه فوق از 0^- تا 0^+ انتگرال بگیریم، با توجه به پیوسته بودن $v_C(t)$، خواهیم داشت:

$$۲\int_{۰^-}^{۰^+} \frac{dv_C(t)}{dt}dt + \int_{۰^+}^{۰^-} v_C(t)dt = \int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)$$

$$۲\left[v_C(۰^+)-v_C(۰^-)\right]+۰=۱ \xrightarrow{v_C(۰^-)=۰} v_c\left(۰^+\right)=\frac{۱}{۲}(V)$$

در خازن های سری، بار خازن ها با هم برابر هستند، بنابراین:

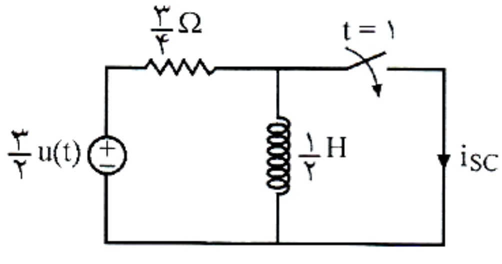
$$Q_{۳F}=Q_{۶F}=Q_{total} \Rightarrow 3v_1\left(۰^+\right)=۶v_۲\left(۰^+\right)=۲v_{CV}\left(۰^+\right) \Rightarrow \begin{cases} v_۱\left(۰^+\right)=\frac{۱}{۳}(V) \\ v_۲\left(۰^+\right)=\frac{۱}{۶}(V) \end{cases}$$

روش چهارم – در لحظه $t=0$ اگر فرض کنیم ولتاژ خازن ها (که صفر وهستند) تغییر نمی کند، آنگاه تمام جریان منبع خازن عبورو می کند. بنابراین فرض اولیه ما ناصحیح بوده، و ولتاژ خزان ها به طور ناگهانی تغییر می کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$v_۱\left(۰^+\right)=\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+} i_C(t)dt+v_۱\left(۰^-\right) \xrightarrow{\begin{cases} i_C(t)=\delta(t) \\ v_C(۰^-)=۰ \end{cases}} v_۱\left(۰^+\right)=\frac{۱}{۳}\int_{۰^-}^{۰^+}\delta(t)\,dt=\frac{۱}{۳}(V)$$

۲-۵- گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از تبدیل نورتن بنه تونن، مدار به صورت زیر ساده می شود:



با توجه به رابطه کلی حاکم بر مدارت مرتبه اول ، رابطه شارژ سلف، عبارت است از:

$$\begin{cases} i_L\left(۰^-\right)=i_L\left(۰^+\right)=۰ \\ i_L\left(\infty\right)=\dfrac{۳/۲}{۳/۴}=۲A \Rightarrow i_L(t)=۲\left(۱-e^{\frac{-۳}{۲}t}\right)u\left(t\right)\ ,\ ۰<t<۱ \\ \tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{۱/۲}{۳/۴}=\dfrac{۲}{۳}(s) \end{cases}$$

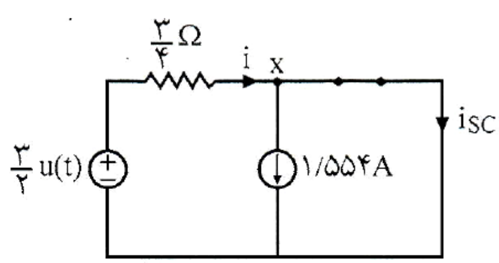
رابطه بالا با این فرض نوشته شده که کلید همواره باز ب ماند، اما در لحظه t=۱ کلید بسته می شود و بنابراین رابطه فوق فقط برای $0< t <1$ برقرار است.

با بسته شدن کلید در لحظه t=۱، ولتاژ دو سر سلف صفر می شود و داریم:

$$v_L=L\frac{di_L\left(t\right)}{dt}\xrightarrow{v_L=۰}\frac{di_L\left(t\right)}{dt}=۰$$

رابطه $\dfrac{di_L\left(t\right)}{dt}$ به ما می گوید که برای $i_L \geq 1$ تغییر نمی کند و دارای مقداری ثابت است. این مقدار ثابت برابر است با:

$$i_L\left(۱^-\right)=i_L\left(۱^+\right)=۲\left(۱-e^{-۳/۲}\right)=۱/۵۵۴\left(A\right)$$



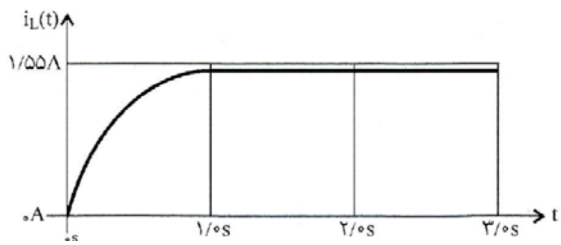
KVL در حتلقه بیرونی:

$$i=\frac{۳/۲}{۳/۴}=۲A$$

نهایتاً با KCL زدن در گره x، جریان i_{sc} به دست می آید:

$$۱/۵۵۴+i_{sc}=i \Rightarrow i_{sc}=۰/۴۴۶(A)$$

نمودار $i_L(t)$ در شکل زیر رسم شده است:



۶-۲- گزینه (۱) صحیح است.

تا وقتی جریان گذرنده از سلف غیر خطی کمتر از یک آمپر باشد این سلف مانند سلف خطی با L=۲ هانری رفتار می کند. بنابراین جریان به نسبت ۲ به ۱ میان سلف خطی و سلف غیر خطی تقسیم می شود، یعنی تا لحظه t=۱ جریان ۲t از سلف خطی و از t از سلف غیر خطی (که مانند سلف خطی رفتار می کند) عبور می کند.

بنابراین ولتاژ دو سر آن ها $L\dfrac{di}{dt}=۲$ است و از میان جواب های داده شده فقط جواب (۲) است که برای $۰<t<۱$ دارای $v(t)=۲$ است. لذا جواب (۱) درست است.

می توان بقیه شکل موج جریان را به شرح زیر حساب کرد:

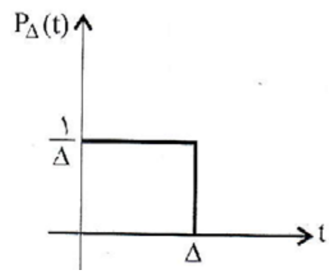
برای $t>1$ شار سلف غیر خطی اشاع می شود، بنابراین ولتاژ دو سر آن $(v(t))$ تغییر نمی کند، یعنی جریان گذرنده از سلف خطی در $i=۲$ ثابت باقی می ماند و بقیه جریان از سلف غیر خطی می گذرد و این مطلب تا t=۳ که جریان منبع ۳ آمپر می شود برقرار است.

برای $3<t<5$ جریان در سلف ها کم می شود به قسمی که در $t=۵$ جریان سلف خطی ۲- آمپر و جریان سلف غیر خطی ۱- آمپر می شود. برای $۵<t<۷$ جریان باز هم منفی تر می شود، لیکن جریان سلف خطی تغییر نمی کند و بقیه جریان از سلف غیر خطی می گذرد. برای $۷<t<۸$ دوباره هر دو جریان افزایش پیدا می کند و در $t=۸$ هر دو صفر می شوند و

در مقدار صفر باقی می مانند. با در نظر گرفتن تغییر جریان به راحتی ولتاژ v(t) به دست می آید که دقیقاً به صورت جواب شکل (۱) می باشد.

۷-۲- گزینه (۱) صحیح است.

ورودی پالس را به صورت زیر در نظر می گیریم:



با توجه به مشخصه v-I داد شده برای مقاومت غیر خطی، به ازای iهای مثبت، این مقاومت به یک مقاومت خطی با اندازه $R = ۱\Omega$ تبدیل می گردد. در حقیقت می توانیم بنویسیم:

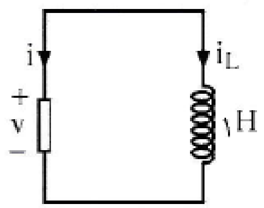
$$R = \begin{cases} ۱\Omega & i \geq ۰ \\ ۰\Omega & i < ۰ \end{cases}$$

بنابراین، برای $۰ < t < \Delta$ (که i>۰ است)، مدار مانند یک مدار RL خطی با ورودی پله عمل می کند و داریم: $i_L(۰^+) = ۰$ است زیرا انرژی اولیه سلف صفر است.

$$\left.\begin{array}{l} i_L(۰^+) = ۰ \\ i_L(\infty) = \frac{۱}{\Delta} \\ \tau = \frac{L}{R} = a(s) \end{array}\right\} \Rightarrow i_L(t) - \frac{۱}{\Delta}(۱ - e^{-t})u(t)$$

بنابراین یکی از گزینه های ۱و۲و۳ یا ۴ درست است! (و البته می توانیم بگوییم زمین هم گرد است!)

برای $t > \Delta$، منبع جریان از مدار خارج می شود:



از آنجایی که جریان سلف نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند، بنابراین i_L در همان جهت قبلی (جهت نشان داده شده روی شکل) در مدار می چرخد و برای $t=\Delta^+$ داریم: $i=-i_L$.

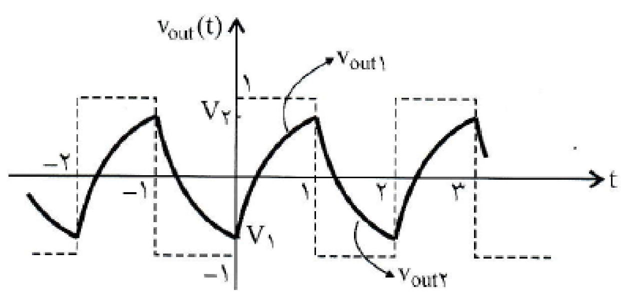
بنابراین، از آنجایی که در $t=\Delta^+$، $i_L(\Delta^-)=i_L(\Delta^+)=\frac{۱}{\Delta}(۱-e^{-\Delta})$ مقداری مثبت می باشد، برای $t=\Delta^+$ مقداری منفی خواهد بود که با توجه به مشخصه مقاومت، به ازای iهای منفی، v=۰ می شود و مقاومت غیر خطی مانند اتصال- کوتاه عمل می کند. بنابراین برای تمام لحظات $t\geq\Delta$ ،$t\geq\Delta$ ،$i_L(t)=i_L(\Delta^+)$ می باشد.

۲-۱۱- گزینه (۳) صحیح است.

روش اول- از درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها می دانیم:

«در یک سیستم LTI، اگر ورودی متناوب باشد، خروجی نیز لزوماً با همان دوره تناوب اصلی ورودی، متناوب خواهد بود.»

طبق این قطیه، با سپری شدن حالت گذاری مدار، با توجه به ورودی داده شده، خروجی v_{out} در حالت ماندگار به صورت زیر خواهد بود:



برای $۰<t<۱$ (با توجه به نمودار v_{out})، خازن در حال شارژ شدن می باشد و داریم:

$$\left.\begin{aligned} &v_{out1}(0^+) = V_1 \\ &v_{out1}(\infty) = 1(V) \\ &\tau = 1(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{out1}(t) = 1 + (V_1 - 1)e^{-t} \;\;,\; 0 < t < 1$$

برای $1 < t < 2$ (با توجه به نمودار $(v_{out}(t))$، خازن در حال شارژ شدن می باشد و داریم:

$$\left.\begin{aligned} &v_{out2}(0^+) = V_2 \\ &v_{out2}(\infty) = -1(V) \\ &\tau = 1(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{out2}(t) = -1 + (V_2 - 1)e^{-(t-1)} \;\;,\; 0 < t < 2$$

با توجه به صورت سوال، هدف مقدار V_2 می باشد. تساوی زیر کلید حل مسئله است!

$$\begin{cases} v_{out1}(t=1) = V_2 \Rightarrow V_2 = 1 + (V_1 - 1)e^{-1} & (a) \\ v_{out2}(t=2) = V1 \Rightarrow V_1 = -1 + (V_2 + 1)e^{-1} & (b) \end{cases}$$

با جاگذاری رابطه (b) در (a) خواهیم داشت:

$$V_2 = \frac{1 = 2e^{-1} + e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e^2 - 1} = \frac{e-1}{e+1} \Rightarrow V_2 = 1 + [-1 + (V_2 + 1)e^{-1} - 1]e^{-1}$$

روش دوم- با کمی دقت به نمودار v_{out} و توجه به این نکته که اندازه حداکثر v_{in} با حداقل v_{in} مساوی است، می توانیم بگوییم، $V_1 = -V_2$ با جاگذاری در رابطه (a)، خواهیم داشت:

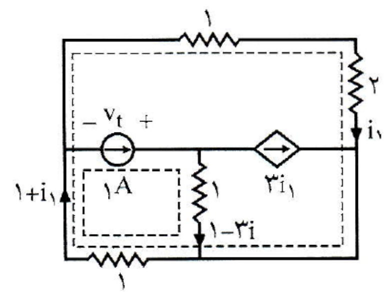
$$V_2 = 1 + (-V_2 - 1)e^{-1} \Rightarrow V_2 = \frac{1 - e^{-1}}{1 + e^{-1}} = \frac{e-1}{e+1}$$

اشتباه رایج: هنهگام استفاده v_{out1} و v_{out2} بسیار دقت کنید! v_{out1} فقط و فقط برای $0 < t < 1$ معتبر است و v_{out2} نیز فقط و فقط برای $1 < t < 2$ معتبر است.

۲-۱۲- گزینه (۴) صحیح است.

برای محاسبه ثابت زمانی مدار، مقاومت دیده شده از دوس ر خازن را بیابیم. برای محاسبه این مقاومت، پس از صفر کردن منابع مستقل، با اعمال منبع جریان ۱ آمپری و محاسبه ولتاژ دو سر این منبع، مقاومت تونن دیده شده از دو سر خازن را می یابیم.

با KCL زدن گره های مدار، جریان هر یک از شاخه ها به صورت مقابل به دست می آید:



KCL در حلقه بیرونی:

$$۱\times i_۱+۲i_۱+۱\times(۱+i_۱)=۰\ \Rightarrow i_1=\frac{-۱}{۴}A$$

KVL در مش چپ:

$$v_t=۱\times(۱-۳i_۱)+۱\times(۱+i_۱)\qquad \Rightarrow v_t=\frac{۵}{۲}(V)$$

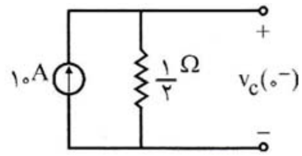
بنابراین مقاومت دیده شده از دو سر خازن برابر خواهد بود با:

$$R_t=\frac{v_t}{i_t}=\frac{۵/۲}{۱}=۲/۵(\Omega)$$

در نهایت، با استفاده از رابطه $\tau=R_{th}C$، ثابت زمانی مدار $\tau=5(s)$ به دست می آید.

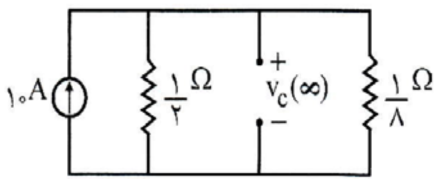
۲-۱۵- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست.

در $t=۰^-$ خازن به شارژ کامل رسیده و به صورت مدار - باز عمل می کند:



$$\Rightarrow v_C\left(۰^-\right)=۱۰\times\frac{۱}{۲}=۵\Rightarrow v_C\left(۰^-\right)=۵(V)$$

در $t\to\infty$ نیز، خازن به شارژ کامل رسیده و به صورت مدار – باز عمل می کند:



$$\Rightarrow v_C(\infty)=۱۰\times\frac{۱}{۲+۸}=۱(V)$$

بنابراین با توجه به رابطه کلی حاکم بر مدارات مرتبه اول، می توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} v_C(۰^-)=v_C(۰^+)=۵(V) \\ v_C(\infty)=۱(V) \\ \tau=RC=(\frac{۱}{۲}\,||\,\frac{۱}{۸})\times۱=\frac{۱}{۱۰}(s)\end{array}\right\}\Rightarrow v_C(t)=۱+۴e^{-۱۰t}\ \ ,\ \ t\geq۰$$

همانطور که می بینیم متاسفانه، ثابت زمانی هیچ یک از گزینه ها $\frac{1}{10}$ نمی باشد و در نتیجه هیچ یک از گزینه ها صحیح نمی باشند. (این سوال در سال ۸۳ هم به همین صورت، بدون جواب صحیح، مطرح شده بود!!!)

۲-۱۶- گزینه (۱) صحیح است.

جریان اولیه گذرنده از R، برابر است با:

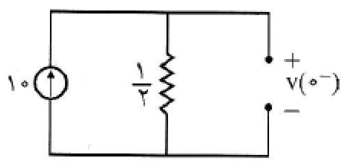
$$i(۰^+)=\frac{v_{C۱}(۰^+)-v_{c۲}(۰^+)}{۳}=\frac{-۱}{۳}(A)$$

از طرفی به دلیل عدم وجود منبع مستقل در مدار $i(\infty)=0$ می باشد. بنابراین با توجه به رابطه کلی حاکم بر مدارات مرتبه اول، می توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} i(۰^+) = \frac{-۱}{۳}(A) \\ i(\infty) = ۰ \\ \tau = RC = ۳(\frac{۲\times۱}{۲+۱}) = ۲(s) \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = \frac{-1}{3}e^{\frac{-t}{۲}} \quad , \quad t > ۰$$

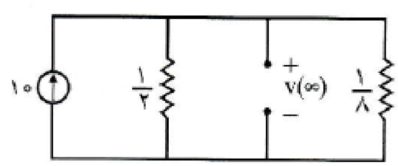
۲-۱۷ هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست

در $t = ۰^-$ کلید مدت زیادی باز بوده است و مدار به حالت دائمی رسیده است .



$$\Rightarrow v(۰^-) = ۱۰\times\frac{1}{2} = ۵(V)$$

در $t \to \infty$، کلید مدت زیادی بسته بوده است و مدار به حالت دائمی رسیده است :



$$v(\infty) = ۱۰\times(\frac{1}{2}\,||\,\frac{۱}{۸}) = ۱(V)$$

ثابت زمانی مدار، با صفر کردن منابع مستقل و به صورت زیر بدست می آید :

$$\tau = RC = (\frac{۱}{۲}\,||\,\frac{۱}{۸})\times 1 = \frac{1}{10}(s)$$

بنابراین ، با توجه به رابطه کلی حاکم بر مدارات مرتبه اول ، خواهیم داشت :

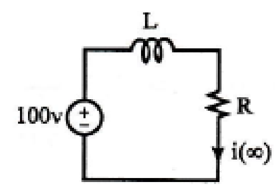
$$\left.\begin{array}{l} v(۰^-) = v(۰^+) \\ v(\infty) = ۱(V) \\ \tau = \frac{۱}{۱۰} = ۱(s) \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = ۱ + ۴e^{-۱۰t}, t > ۰$$

گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به رابطه $i_C = C\frac{dv_c(t)}{dt}$، خاهیم داشت:

$$i_C(t) = C\frac{d(۱-e^{-t})}{dt} \Rightarrow i_C(t) = Ce^{-t}$$

۲-۲۱ محل تقاطع خط مماس بر منحنی با محور زمان نشان دهنده ثابت زمانی است یعنی $\tau = 2m\sec$ از طرفی در $t \to \infty$ سلف شارژ و اتصال کوتاه می گردد.



$$i(\infty) = \frac{۱۰۰}{R}$$

از طرفی به کمک منحنی $i(\infty)$ به دست می آید پس

$$\frac{۱۰۰}{R} = ۱۰ \Rightarrow R = ۱۰\Omega$$

$$\tau = ۲mSec, R = ۱۰\Omega, \tau = \frac{L}{R} \Rightarrow ۲\times 10^{-3} = \frac{L}{۱۰} \Rightarrow L = ۲۰mH$$

جریان سلف برابر است با $I_L = I_S(۱-e^{\frac{-۵t}{L}})$ و جریان مقاومت برابر است با $I_R = I_S e^{\frac{-۵t}{L}}$ پس

$$I_L(۲) = I_R(۲) \Rightarrow ۱-e^{\frac{-۵\times 2}{L}} = e^{\frac{-۵\times 2}{L}} \Rightarrow e^{\frac{-۱۰}{L}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow L = ۱۰ / Ln۲$$

۲-۲۳- به ازای $۰ < t < ۱$ بعد از اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ، زمان شارژ برابر است با

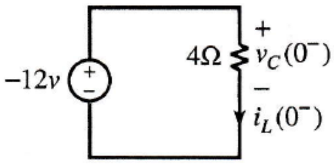
$$۵\tau_۱ = ۵\times ۲\times ۲\times ۰.۲ = ۲Sec$$

اما هنوز خازن شارژ نشده که کلید دوم در $t = ۱$ ثانیه بسته می گردد.

$5\tau_۲ = ۵\times(۲\parallel ۸)\times ۰.۲ = ۱.۶Sec$

با اضافه کردن زمان t=۱ به کل زمان شارژ ۲/۶ ثانیه به دست می آید.

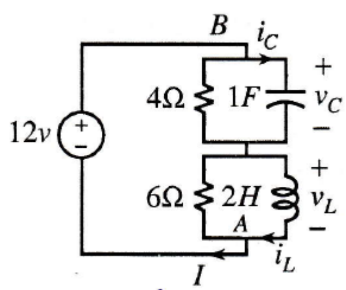
۲-۲۴: در $t = ۰^-$ مطابق شکل مقابل داریم :



$v_c(۰^-) = v_c(۰^+) = -۱۲(v)$

$i_L(۰^-) = i_L(۰^+) = \frac{-۱۲}{۴} = -۳A$

در $t = ۰^+$ مطابق شکل مقابل داریم:



$KVL: v_c(۰^+) + v_L(۰^+) = ۱۲$

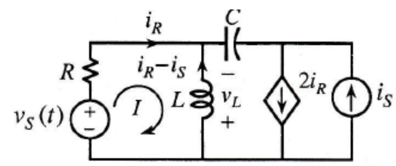
$-۱۲ + v_L(۰^+) = ۱۲ \Rightarrow v_L(۰^+) = ۲۴v$

$KCLA: I(۰^+) = \frac{v_L(۰^+)}{۶} + i_L(۰^+) = \frac{۲۴}{۶} + (-۳) = ۱A$

$KCLB: i_c(۰^+) = I(۰^+) - \frac{v_c(۰^+)}{۴} = ۱ - \left(\frac{-۱۲}{۴}\right) = ۴A$

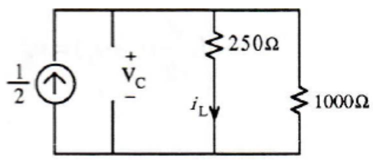
۲۵-۲

$$KVLI: Ri_R - v_L = v_s \Rightarrow Ri_R - L\frac{d}{dt}(i_R - i_s) = v_s$$



$$\frac{Ldi_R}{dt} - Ri_R = L\frac{di_s}{dt} - v_s$$

۲۶-۲ در حالت میرایی بحرانی $(a = w_\cdot)$ برای مدار RLC موازی داریم :



$$\alpha = \frac{۱}{۲RC}, w_\cdot^۲ = \frac{۱}{LC} \Rightarrow L = ۴R^۲C \Rightarrow R = ۱۰۰\Omega$$

$$\alpha = \frac{۱}{۲RC} = ۵۰۰$$

$$v_C(۰^-) = v_C(۰^+) = (۲۵۰ \| ۱۰۰۰) \times \frac{1}{2} = ۱۰۰v$$

$$i_L(۰^-) = i_L(۰^+) = \frac{v_C(۰^-)}{۲۵۰} = ۰.۴A, v_L(۰^+) = v_C(۰^+) = ۱۰۰$$

فرم پاسخ میرایی مدار RLC موازی به صورت :

$$i_L(t) = (A + Bt)e^{-۵۰۰t}u(t) \Rightarrow i_L(۰^+) = (A + B \times 0) = 0.4 \Rightarrow A = 0.4$$

$$\frac{di_L(۰^+)}{dt} = [B - ۵۰۰(۰.۴ + B \times 0)e^{-500\times0} = \frac{v_L(۰^+)}{۴} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۴} \Rightarrow B = ۲۲۵$$

$$i_L(t) = (۰.۴ + ۲۲۵t)e^{-۵۰۰}u(t)$$

۲-۲۷ روش اول :

$$v_c(\cdot^-) = v_c(\cdot^+) = \frac{۵}{۵+۱} \times ۱۲ = ۱۰v$$

$$i_L(\cdot^-) = i_L(\cdot^+) = \frac{۱۲}{۱+۵} = ۲A$$

تعیین ریشه های معادله مشخصه در $t > ۰$

$$I + ۰.۵sI + \frac{۱}{۲s} I = ۰ \Rightarrow s + 2s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -۱, v_C(\infty) = ۱۲v$$

$$v_C(t) = (A + Bt)e^{-t} + ۱۲ \Rightarrow v_C(\cdot^+) = ۱۰ \Rightarrow A + 12 = 10 \Rightarrow A = -2$$

$$\frac{i_C(\cdot^+)}{C} = \frac{dv(\cdot^+)}{dt} = ۱ \Rightarrow \frac{dvc}{dt} Be^{-t} - (A + Bt)e^{-t} \Rightarrow B\text{-}A = 1 \Rightarrow B\text{-}1$$

$$v_C(t) = (-۲ - t)e^{-t} + ۱۲$$

روش دوم حل: $v_C(\cdot^-) = v_C(\cdot^+) = \frac{۵}{۵+۱} \times ۱۲ = ۱۰v$ با چک گزینه ها گزینه های (۲) و (۴) غلط اند.

از طرفی

$$i_C(\cdot^+) = i_L(\cdot^+) = ۲A \Rightarrow \frac{i_C(\cdot^+)}{C} = \frac{dv_C(\cdot^+)}{dt} = ۱$$

رابطه فوق تنها در گزینه (۳) صدق می کند.

۲-۲۸- حل به روش تستی:

ولتاژ اولیه خازن $v(۰) = ٤v$ بین گزینه ها تنها گزینه (۴) این شرط در آن رعایت شده است.

۲-۲۹- به ازای $۰ \leq t \leq ۲$ مدار RLCموازی است

$$\alpha=\frac{۱}{RC}=\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲}}=۵$$

۳۰-۲- در $t=۰^-$ داریم، $v_C(۰^-)=۰$ و $i(۰^-)=i(۰^+)=۰$ و $i(۰^-)=i(۰^+)=۰, v_C(۰^-)=v_C(۰^+)$

$$v_L(۰^+)=۱\times۱=۱v, v_L(۰^+)=L\frac{di(۰^+)}{dt}\Rightarrow\frac{di(0^+)}{L}=\frac{۱}{۲}$$

۳۱-۲- حل

$$L=۱۰H, C=\frac{۱}{۵}F$$

برای $t>۰$ معادله مشخصه مدار RLC موازی را به دست می آوریم.

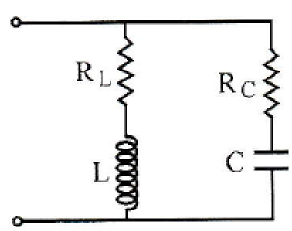
$$۲\alpha=\frac{۱}{RC}=\frac{۵}{R}, w_۰^۲=\frac{۱}{LC}=\frac{۱}{۳}$$

$$s^۲+۲\alpha s+w_۰^۲=۰\Rightarrow s^2+\frac{۵}{R}s+\frac{۱}{۳}=۰, s=-۱$$

$$(-۱)^۲+\frac{۵}{R}(-۱)+\frac{۱}{۳}=۰\Rightarrow R=\frac{15}{4}\omega$$

۳۲-۲- گزینه (۳) صحیح است.

روش اول- این مدار، حالت خاصی از مدار زیر می باشد:



$$\omega_۰=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L-R_L^۲C}{L-R_C^۲C}}$$

بنابراین با جاگذاری در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\omega_{\cdot} = \frac{۱}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L - R_L^۲}{L - ۰}} = \sqrt{\frac{۱}{LC} - \left(\frac{R_۲}{L}\right)^۲}$$

نکته : مقاومت $R_۱$ هیچ تاثیری در فرکانس تشدید مدار ندارد.

روش دوم- می دانیم در فرکانس تشدید جزء موهومی ادمیتانس یا امپدانس ورودی صفر می شود. بنابراین ادمیتانس ورودی این مدار را حساب می کنیم:

$$Y(j\omega) = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲ + j\omega L} + j\omega C = \frac{۱}{R_۱} + \frac{R_۲ - j\omega L}{R_۱ + \omega^۲ L^۲} + j\omega C$$

$$= \left(\frac{۱}{R_۱} + \frac{R_۲}{R_۲^۲ + \omega^۲ L^۲}\right) + j\omega\left(C - \frac{L}{R_۲^۲\omega^۲ L^۲}\right)$$

با مساوی صفر قرار دادن جزء موهومی، به دست می آوریم:

$C - \dfrac{L}{R_۲^۲ + \omega^۲ L^۲} = ۰ \quad \Longrightarrow CL^۲\omega^{۲۰} = L - R_۲^۲ C \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{۱}{LC} - \dfrac{R^۲}{L^۲}$ و بنابراین خواهیم داشت:

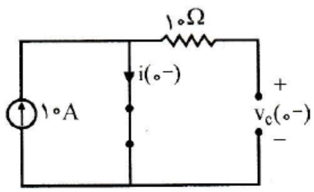
$$\omega_{\cdot} = \sqrt{\frac{۱}{LC} - \left(\frac{R_۲}{L}\right)^۲}$$

۲-۳۳ گزینه (۳) صحیح است .

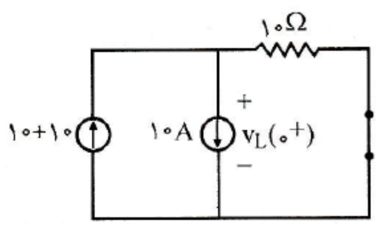
با توجه به رابطه $v_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ ، می توان نوشت :

$$\frac{di(t)}{dt}=\frac{v_L(t)}{L}\xrightarrow{L=1}\frac{di(0^+)}{dt}=v_L(0^+)$$

بنابراین باید ولتاژ دو سر سلف را در لحظه ی $t=o^+$ بیابیم. در $t<0$ ، مدار به صورت زیر می باشد .



بنابراین در $t=0^-$ سلف و خازن به طور کامل شارژ شده اند و مدار به صورت زیر ساده می شود:



$$\Rightarrow\begin{cases} i(0^-)=10(A)\\ v_c(0^-)=0\end{cases}$$

با توجه به عدم تغییر ناگهانی ولتاژ خازن و جریان سلف در یک لحظه ، داریم :

$$i(0^-)=i(0^+)=10(A),v_c(0^-)=v_c(0^+)=0$$

بنابراین در $t=0^+$ مدار به صورت زیر ساده می گردد.

$$\Rightarrow v_L(0^+)=\frac{di(0^+)}{dt}=100(\frac{A}{s})$$

۲-۳۴ گزینه (۴) صحیح است .

روش اول – با استفاده از اپراتور D، معادلات گره حاکم بر مدار را می نویسیم :

$$\Rightarrow v(\frac{۱}{۳D+۲}+۲D+\frac{۱}{٤})=v(\frac{۲٤D^{۲}+۱۹D+٦}{٤(۳D+۲)})=۰$$

بنابراین ، معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار به صورت زیر بدست می آید :

$$v(۲٤D^{۲}+۱۹+٦)=۰\Rightarrow v''+\frac{۱۹}{۲٤}v'+\frac{۱}{٤}v=۰$$

با توجه به معادله مشخصه کلی حاکم بر مدارهای مرتبه دوم ، $s^{۲}+۲\alpha s+\omega_{۰}^{۲}=۰$ خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{l}۲\alpha=\frac{۱۹}{۲٤}\\ \omega_{۰}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{Q=\frac{\omega_{۰}}{۲\alpha}}Q=\frac{۱۲}{۱۹}$$

روش دوم – از ماتریس امپدانس Z_m ، برای یافتن معادله مشخصه سیستم و در نتیجه محاسبه Q استفاده می کنیم .

$$\Rightarrow Z_m=\begin{bmatrix}۲+۳s+\frac{۱}{۲s} & \frac{-۱}{۲s}\\ \frac{-۱}{۲s} & \frac{۱}{۲s}+٤\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم ، دترمینان ماتریس امپدانس مش می باشد . بنابراین خواهیم داشت :

$$\Delta=(۲+۳s+\frac{۱}{۲s})(\frac{۱}{۲s}+٤)-(\frac{۱}{۲s})(\frac{۱}{۲s})\Rightarrow\Delta=\frac{s^{۲}+{}^{۱۹}\!/_{۲٤}\,s+{}^{۱}\!/_{٤}}{{}^{s}\!/_{۱۲}}$$

با مقایسه رابطه ی اخیر با معادله مشخصه کلی حاکم بر مدارات مرتبه دوم ، $s^{۲}+۲\alpha s+\omega_{۰}^{۲}=۰$ خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{l}۲\alpha=\frac{۱۹}{۲٤}\\ \omega_{۰}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{Q=\frac{\omega_{۰}}{۲\alpha}}Q=\frac{۱۲}{۱۹}$$

۲-۳۵ گزینه (۴) صحیح است .

روش اول – در $t < ۰$ مدار به حالت پایدار رسیده و مدار به صورت زیر ساده می شود :

$$\Rightarrow \begin{cases} i_L(۰^-) = \frac{٤}{۲} = ۲(A) \\ v_c(۰^-) = -۱ i_L(۰^-) + ٤ = ۲(V) \end{cases}$$

در $t = 0^+$ با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف و ولتاژ خازن، مدار به صورت زیر ساده می شود . با KCL زدن در گره های مدار، جریان شاخه ها به صورت زیر بدست می آید (جریان مقاومت R ، طبق قانون اهم $i = \frac{v}{R} = \frac{v}{۱}$ می باشد) .

برای محاسبه ی $v(۰^+)$ با KVL زدن در مش سمت راست خواهیم داشت :

$$-٤ + ۱\times(v+2) + 2 + v = 0 \Rightarrow v(0^+)$$

برای محاسبه ی $v'(۰^+)$ ، ابتدا باید $v(t)$ را بر حسب متغیرهای دیگر (ترجیحا ولتاژ خازن و جریان سلف) بیان کنیم . با KVL زدن در مش سمت راست داریم :

$$v(t) = -v_c(t) - ۱\times[v(t) + i_L(t)] + ٤$$

اشتباه رایج : تعداد زیادی از داوطلبان ، به جای $i_L(t)$ در رابطه بالا به اشتباه عدد ۲ را جاگذاری می کنند!

با مشتق گیری از رابطه فوق بر حسب t ، خواهیم داشت :

$$v'(t) = \frac{-۱}{۲}(v'_c(t) + i'_L(t)) \xrightarrow{\begin{cases} i_C = Cv'_C \\ v_L = Li_L \end{cases}} v'(t) = \frac{-۱}{۲}(i_C(t) + v_L(t))$$

با توجه به شکل مدار در $t = ۰^+$ خواهیم داشت :

$$v_L(۰^+) = -۱\times 2 - 1\times 2 + 4 - 4 = -4(v) \xrightarrow{i_C(۰^+) = v(۰^+)} v'(۰^+) = \frac{-۱}{۲}(۰ - ٤) = ۲(V)$$

تا همین جا و با توجه به گزینه ها ، مشخص است که فقط گزینه ۴ می تواند صحیح باشد . اگر بخواهیم معادله دیفرانسیل حاکم بر v(t) را بیابیم ، می توانیم از اپراتور D استفاده کنیم :

KCL در گره A

$$v+(v+۲)+\frac{\frac{v}{D}+v-٤}{D+۱}=۰$$

پس از ساده کردن رابطه بالا، به معادله مرتبه دوم زیر می رسیم :

$$v(D^۲+۲D+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}v''+۲v'+v=۰\\ v(۰^+)=۰\\ v'(۰^+)=۲(V)\end{cases}$$

با حل معادله ی دیفرانسیل فوق ، خواهیم داشت:

$$v(t)=۲te^{-t},t>۰$$

روش دوم – معادلات مش را با توجه به روش سریع مش (روش نظری) می نویسیم :

$$\begin{pmatrix}D+۲ & -۱\\ -۱ & ۲+\frac{۱}{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_۱\\ i_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٤u(t)-٤\\ ٤-v_c(۰)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\\ ۲\end{pmatrix}$$

اگر تبدیل لاپلاس بگیریم ، بدست می آوریم :

$$\begin{pmatrix}s+۲ & -۱\\ -۱ & ۲+\frac{۱}{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_۱\\ I_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\\ \frac{۲}{s}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-۲\\ ۰\end{pmatrix}$$

اگر این معادلات را بر حسب I_2 حل کنیم بدست می آوریم $I_۲=\frac{۲}{(s+۱)^۲}$ یا $i_{۲(t)=۲te^{-t}u(t)}$

۲-۳۶ گزینه (۲) صحیح است .

با توجه به اینکه $v_C(\cdot^+) = \cdot$ است ، می توانیم خازن را به صورت اتصال کوتاه در نظر بگیریم . بنابراین در $t = \cdot^+$ مدار به شکل زیر ساده می شود .

با توجه به این شکل ، دو سر مقاومت $R۱$ اتصال کوتاه شده و بنابراین جریان گذرنده از آن صفر است . از طرفی طبق فرض مسئله ، $i_L(\cdot^+)$ نیز صفر سات . بنابراین ، تمام جریان مقاومت $R_۲$ از خازن عبور می کند و داریم :

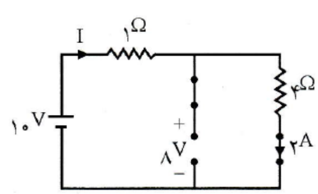
$$i_C(\cdot^+) = i_{R_۲}(\cdot^+) = \frac{۱\cdot(v)}{۲(\Omega)} = ٥(A)$$

بنابراین با توجه به رابطه ی $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$ خواهیم داشت :

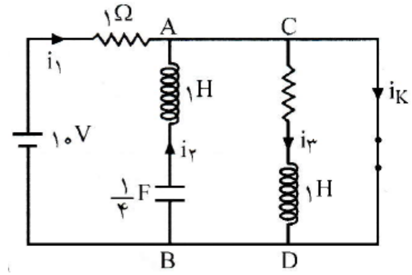
$$C = \frac{i_C(\cdot^+)}{\dfrac{dv_c(\cdot^+)}{dt}} = \frac{٥}{۱\cdot} = \frac{۱}{۲}(F)$$

۲-۳۷ گزینه (۴) صحیح است .

در $t = \cdot^-$ مدار به حالت پایدار رسیده و داریم :



با توجه به این شکل ، واضح است که $(t = \cdot^-)$ جریـان سـلف سـری بـا مقاومـت ٤Ω ، $\dfrac{۱\cdot V}{۱\Omega + ٤\Omega}$ اسـت و ولتـاز خـازن نیـز $٤\Omega \times 2A = 8(V)$ می باشد . پس از بسته شدن کلید، مدار به صورت زیر در می آید :



با بسته شدن کلید k ، هر سه شاخه اتصال کوتاه می شوند . بنابراین با توجه به مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان سلف ، سه جریان $i_۱$ ، $i_۲$ و $i_۳$ در جهت های نشان داده شده ایجاد می شوند . بنابراین داریم :

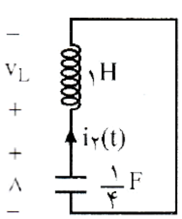
$$i_K = i_۱ + i_۲ - i_۳$$

$$i_۱ = \frac{۱۰}{۱} \Rightarrow i = ۱۰A$$

محاسبه ی i_1 : شاخه ی AB یک مدار مرتبه دوم بدون اتلاف (نامیرا) می باشد، زیرا دو سر سلف و خازن سری اتصال کوتاه شده است (و هیچگونه مقاومتی با سلف و خازن سری نشده است) بنابراین داریم :

$$\omega_. = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{۱\times\frac{1}{4}}} = ۲(\frac{rad}{s}) \Rightarrow i_۲(t) = k\sin ۲t$$

برای یافتن ثابت مجهول k ، از شرایط اولیه ی بدست آمده استفاده می کنیم :



$$v_L(۰^+) = ۸(V) \xrightarrow{v_L = L\frac{di_۲(t)}{dt}} \frac{di_۲(۰^+)}{dt} = \frac{v_L(۰^+)}{L} = ۸\left(\frac{A}{s}\right)$$

$$\frac{di_۲(۰^+)}{dt} = ۸ \Rightarrow ۲k\cos ۲t\,|_{t=۰} = ۸ \Rightarrow k = ٤ \Rightarrow i_۲(t) = ٤\sin ۲t$$

محاسبه $i_۳$: شاخه CD یک مدار مرتبه اول RL با ثابت زمانی $\tau = \frac{L}{R} = \frac{۱}{٤}(s)$ و جریان اولیه $i_۳(۰^+) = ۲A$ می باشد .

بنابراین :

$$i_3(t) = 2e^{-4t}$$

بنابراین برای $t > 0$ ، جریان $i_k(t)$ عبارت خواهد بود از :

$$i_k(t) = i_۱(t) + i_۲(t) - i_۳(t) = ۱۰ + ٤\sin ۲t - ۲e^{-٤t}$$

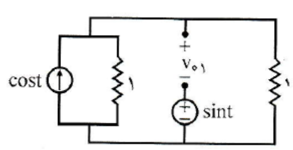
۲-۳۸- گزینه (۳) صحیح است.

در $t > ۰$ یک مدار RLC موازی داریم که در آن $R \to \infty$ است و بنابراین، مدارد در حالت بـی اتـلاف $\alpha = \frac{۱}{۲RC} = ۰$ قـرار می گیرد. بنابراین $\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = ۱\left(\frac{rad}{s}\right) = \left(\frac{rad}{s}\right)$ و شکل کلی پاسخ $t > ۰$، به صـورت $v'_۰(۰), v_۰(۰)$ اسـتفاده کنـیم.

بنابراین با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف و ولتاژ خازن در t=۰، به سراغ مدار در t>۰ می رویم.

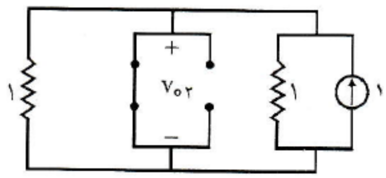
در t>۰، با توجه به قضیه جمع آثار، یک بار اثر منابع سینوسی را در نظر می گیریم و یک بار اثر منبع جریان DC.

تاثیر منابع سینوسی : فرکانس منابع سینوسی $(\omega = ۱)$، همان فرکانس رزونـانس مـدار RLC مـوازی اسـت. بنـابراین در ایـن فرکانس، ترکیب LC مانند مدار- باز عمل می کند:



$$\begin{cases} v_۰(t) = \frac{۱}{۲}\cos t - \sin t \\ i_L(t) = -i_C(t) = -C\frac{dv_۰}{dt} = \frac{۱}{۲}\sin t + \cos t \end{cases}$$

تاثیر منبع DC: در اثر منبع DC، در حالت ماندگار، خازن مدار- باز، و سلف اتصال کوتاه می شود. بنابراین.



$$\Rightarrow \begin{cases} v_{02}(t) = ۰ \\ i_{L۲}(t) = ۱(A) \end{cases}$$

اشتباه رایج: اگر تاثیر $i_L(۰^+)$ را در محاسبه $i_L(۰^+)$ در نظر نمی گرفتیم،اشتباهاً گزینه نادرست ۲ را انتخاب می کردیم!

با توجه به قضیه جمع آثار، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_۰(t) = v_{۰۱}(t) + v_{۰۲}(t) \\ i_L(t) = i_{L۱}(t) + i_{L۲}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0(۰) = \left[\frac{۱}{۲}\cos_۰ - \sin_۰\right] + ۰ \\ i_L(۰) = \left[\frac{۱}{۲}\sin_۰ + \cos_۰\right] + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0(۰) = \frac{۱}{۲}(V) \\ i_L(۰) = ۲(A) \end{cases}$$

نهایتاً با جایگذاری این شرایط اولیه در $v_۰(t) = C_۱ \cos t + C_۱ \cos t$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_۰(۰) = C_۱ \cos ۰ = \frac{۱}{۲} \\ i_L(۰) = -i_c(۰) = -C\dfrac{dv_۰(۰)}{dt} = C_۱ \sin ۰ - C_۲ \cos_۰ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_۱ = \frac{۱}{۲} \\ C_۲ = -۲ \end{cases}$$

$$v_۰(t) = \frac{۱}{۲}\cos t - ۲\sin t = \sqrt{\frac{۱}{٤} + ٤}\cos\left(t - th^{-۱}\frac{-۲}{۱/۲}\right) = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}\cos(t + ۷٥/۹٦)$$

$$A\cos\omega_o + B\sin\omega_o t = \sqrt{A^۲ + B^۲}\cos\left(\omega_o t - tg^{-۱}\frac{B}{A}\right)$$

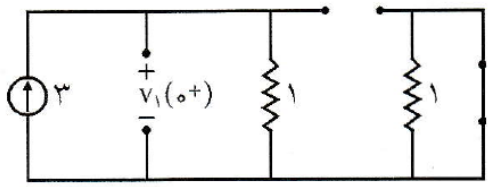
البته اثبات قضیه فوق با استفاده از مفهوم فازورها بسیار ساده است.

۲-۳۹. ۱۶ – گزینه (۴) صحیح است.

در $t < ۰$، دو سر منبع جریان اتصال کوتاه شده و مدار در حالت دایمی قرار دارد. بنابر این .

$$v_c(۰) = ۰ \qquad , \qquad i_L(۰) = ۰$$

در $t=\cdot^{+}$، بدلیل عدم تغییر ناگهانی جریان سلف و ولتاژ خازن، مدار بصورت زیر در می آید:



$$\Rightarrow v_{۱}\left(\cdot^{+}\right)=۳\times ۱=۳(V)$$

برای محاسبه $\frac{DV_{۱}(\cdot^{+})}{dt}$، ابتدا باید ضابطه $v_{۱}(t)$ را بر حسب سایر متغیرهای مدار (ترجیحاً ولتاژ سلف و جریان خازن) بنویسیم.

با KCL زدن در سر مثبت $v_{۱}$، خواهیم داشت:

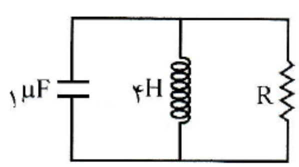
$$\frac{v_{۱}}{۱}+i_{L}=۳\Rightarrow \frac{dv_{1}}{dt}+\frac{di_{L}(t)}{dt}=\cdot \xrightarrow{\frac{di_{L}}{dt}=\frac{v_{L}}{L}} \frac{dv_{۱}(t)}{dt}+\frac{v_{۱}(t)-v_{c}(t)}{۱}=\cdot$$

بنا در $t=\cdot^{+}$، خواهیم داشت:

$$\frac{dv_{۱}(\cdot^{+})}{dt}=v_{c}(\cdot^{+})-v_{۱}(\cdot^{+})=\cdot-۳\Rightarrow \frac{dv_{1}(\cdot^{+})}{dt}=-۳(V/Sec)$$

۲-۴۰- گزینه (۴) صحیح است.

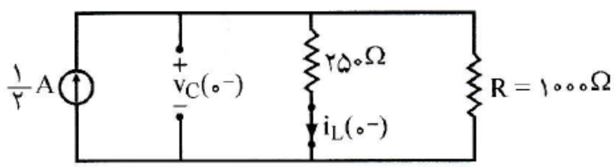
در $t>0$، یک مدار RLC موازی داریم که طبق فرض سوال، در حالت میرای بحرانین قرار دارد. با توجه به اینکه در مدارات RCL موازی، $\alpha=\frac{۱}{۲RC}, \omega_{\cdot}=\frac{۱}{\sqrt{LC}}$ می باشد، و همچنین از آنجایی که در حالت میرایی بحرانی $\alpha=\omega_{\cdot}$ می باشد، داریم:



$$\begin{cases}\omega_{\cdot}=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=۵\cdot\cdot(rad/s)\\ \alpha=\frac{۱}{۲RC}=\frac{۱\cdot^{٦}}{۲R}\end{cases}$$

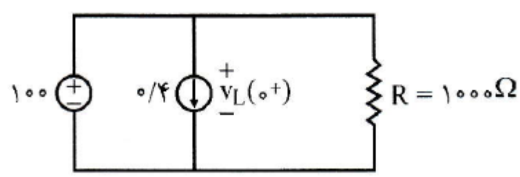
$$\alpha=\omega_{\cdot}\Rightarrow \frac{10^{6}}{۲R}=۵\cdot\cdot\Rightarrow R=1000(\Omega)$$

بنابراین $\alpha = \omega_0 = ۵۰۰$ می باشد و با توجه به رابطه کلی حاکم بر مدارات مرتبه دوم در حالت میرای بحرانی $i_L(t)$ به فرم کلی: $i_L(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}u(t)$ می باشد. برای محاسبه ضرایب ثابت A و B به شرایط اولیه $i_L(۰^+)$ و $\frac{di_L(۰^+)}{dt}$ نیاز داریم. بنابراین، با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف و ولتاژ خازن، برای محاسبه شرایط اولیه $t = ۰^+$، به سراغ مدار $t = ۰^-$ می رویم:



$$\begin{cases} i_L(۰^-) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۰۰۰}{۲۵۰ + ۱۰۰۰} = ۰/۴(A) \\ v_C(۰^-) = i_L(۰^-) \times ۲۵۰ = ۱۰۰(V) \end{cases}$$

بنابراین در $t = ۰^+$ مدار به صورت زیر در می آید:



$$\frac{di_L(۰^+)}{dt} = \frac{v_L}{L} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵(A/Sec)$$

نهایتاً با جاگذاری $i_L(۰^+)$ و $\frac{di_L(۰^+)}{dt}$ در رابطه $i_L(t)$، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} & i_L(۰^+) = A = ۰/۴ \\ & \frac{di_L(۰^+)}{dt} = B - ۵۰۰ \times ۰/۴ = ۲۵ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = ۰/۴ \\ B = ۲۲۵ \end{cases}$$

فصل سوم: تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی

در فصل های گذشته به بررسی مدارهای مقاومتی، تحلیل مدارهای مرتبه اول و دوم پرداخته شد. درآن جا برای ورودی های سینوسی، محاسبات سخت می گردید. در حالت کلی تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی از اهمیت خاصی برخوردار است. به طوری که تحلیل مدار با ورودی ثابت حالت خاصی از تحلیل حالت دائمی سینوسی است. در این فصل بعد از مرور محاسبات اعداد مختلط، کلیه قوانین و قضایای حاکم بر مدارهای مقاومتی، مرتبه اول و دوم در حالتی کلی تر در حالت دائمی سینوسی و در حوزه فرکانس (فازور) مورد بررسی قرار گرفته است.

مروری بر اعداد مختلط

فرض کنید A یک عدد مختلط و b,a به ترتیب جزء حقیقی و جزء موهومی آن باشند در این صورت

$$A = a + jb$$

که در آن $j = \sqrt{-1}$ می باشد در رابطه داریم

$$\mathrm{Re}[A] = a \quad , \mathrm{Im}[A] = B$$

که در آن $\mathrm{Re}(\ldots)$ به معنی جز حقیقی و $\mathrm{Im}(\ldots)$ به معنی جزء موهومی می باشد.

توجه: دقت کنید که قسمت موهومی عدد مختلط یک عدد حقیقی است.

توجه: اعداد حقیقی را می توان اعدادی مختلط با قسمت موهومی صفر تصور کرد.

معادله (۱) نمایش مختصات قائم (دکارتی) عدد مختلط A است. نمایش نمایی عدد مختلط A چنین است.

$$A = |A| e^{j\theta}$$

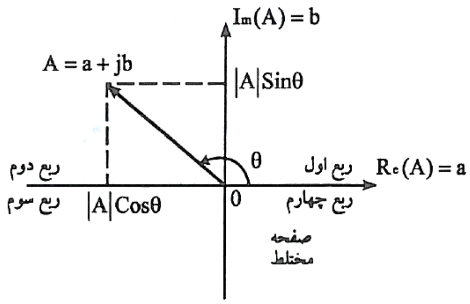
که در آن $|A|$ اندازه یا دامنه A نامیده می شود و مقدار آن به همراه فاز A برابر است با

$$|A| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}, \theta = \tan^{-۱}\frac{b}{a}$$

گاهی اوقات عدد مختلط را به صورت قطبی که فرم دیگر نمایش نمایی است، نشان می دهیم در این حالت به جای $e^{j\theta}$ از علامت $(\angle\theta)$ استفاده می کنیم یعنی $A = |A| \angle \theta$

نمایش تصویری عدد مختلط

برای انتخاب صحیح زاویه از روش تصویری عدد مختلط کمک می گیریم. مطابق با شکل عدد مختلط A با نقطه ای که مختصات آن $\mathrm{Im}(A),\mathrm{Re}(A)$ می باشد، مربوط شده است. توجه کنید که فاز θ زاویه بین محور x و برداری است که از مبدا شروع شده و به نقطه A ختم می گردد.



نکته: در ربع اول $b, a \ge 0$، در ربع دوم $b \ge 0, a \le 0$، در ربع سوم $b, a \le ۰$ و در ربع چهارم $b \le ۰ . a \ge ۰$

توجه: زوایه θ محدود به بازه $[۰, ۲\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ است.

مثال: عدد مختلط z را به فرم قطب نمایش دهید.

عدد Z در ناحیه اول واقع باشد.

Z=x+jy

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

عدد Z در ناحیه دوم واقع باشد

$$, Z = -x + jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} \; \theta = ۱۸۰^\circ - \tan^{-۱}\frac{y}{x}$$

عدد Z در ناحیه سوم واقع باشد.

$$Z = x - jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x \;\; = y^2}, \theta = 180^0 + \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

چند رابطه مفید

$$Z = x + jx \Rightarrow |z| = x\sqrt{۲}, \theta = ۴۵^\circ$$

$$Z = x - jx \Rightarrow |z| = x\sqrt{۲}, \theta = -۴۵^\circ$$

$$Z = jx \Rightarrow |z| = x, \theta = -۹۰^\circ$$

$$Z = -jx \Rightarrow |z| = x, \theta = -۹۰^\circ$$

عملیات با اعداد مختلط

اعمال اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد مختلط همانند اعداد حقیقی است به شرط این که از رابطه $j^2 = -1$ استفاده شود.

جمع و تفریق دو عدد مختلط

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

به طور مثال

$(۱+J)+(۲+J۳)=۳+j۴$

$(۱-j)+(۰+۲j)=۱+j$

$(۲+j)-(۱+j۳)=(۱-J۲)$

ضرب دو عدد مختلط

$(a+jb)(c+jd)=(ac-bd)+j(bc+ad)$

نمایش قطبی حاصلضرب دو عدد مختلط

$(A_۱\angle\theta_۱)(A_۲\angle\theta_۲)=A_۱A_۲\angle(\theta_۱+\theta_۲)$

به طور مثال

$(V_m\angle\theta_v)(I_m\angle-\theta_۱)=V_mI_m\angle(\theta_v-\theta_۱)$

مزدوج مختلط

هرگاه عدد مختلط $A=a+jb$ را داشته باشیم، گویی عدد مختلط $\overline{A}=a-jb$ مزدوج A است. به آسانی دیده می شود که هرگاه

$$A=|A|e^{j\theta}\Rightarrow\overline{A}=|A|e^{-j\theta}$$

$$A=|A|\angle\theta\Rightarrow\overline{A}=|A|\angle-\theta$$

گاهی مزدوج مختلط A را با A^* نیز نشان می دهند.

چند رابطه مفید

$A\overline{A}=|A|^2=a^2+b^2$, $A-\overline{A}=j۲b$, $A+\overline{A}=۲a$

$b=\frac{۱}{j۲}(A-\overline{A})$, $a=\frac{۱}{۲}(A+\overline{A})$

تقسیم (نسبت) دو عدد مختلط

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^۲+d^۲}$$

نمایش قطبی تقسیم دو عدد مختلط

$$\frac{A_۱\angle\theta_۱}{A_۲\angle\theta_۲}=\frac{A_۱}{A_۲}\angle(\theta_۱-\theta_۲)$$

توجه: جمع و تفریق دو عدد مختلط در دستگاه قائم عمل نسبتاً ساده ای است. ضرب و تقسیم دو عدد مختلط در مختصات قطبی راحت تر است.

نمایش فازوری موج سینوسی

موج سینوسی با فرکانس زاویه ای w زیر را در نظر بگیرید.

$$v(t) = A_m Cos(wt + \varphi)$$

که در آن ثابت های حقیقی φ, w, A_m به ترتیب دامنه، فرکانس زاویه ای و فاز سینوسی نامیده می شوند. دراین صورت نمایش فازوری v(t) برابر است با

$$V = A_m \angle \varphi \qquad \text{یا} \qquad v = A_m e^{j\theta}$$

توجه: باید تأکید شود که فرم فازوری یک سینوسی، تنها مقادیر دامنه و فاز آن را مشخص می کند و اطلاعی از فرکانس به دست نمی دهد.

نکته: اتحاد اویلر در محاسبات فازور مفید است.

$$e^{-j\theta} = Cos\theta - jSin\theta \quad , \quad e^{j\theta} = Cos\theta + jSin\theta$$

نکته:

$$v(t) = AmCos(wt + \varphi) \Rightarrow V = A_m \angle \varphi$$

نکته:

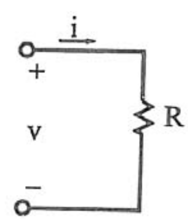
$$v(t) = A_m Sin(wt + \varphi) = AmCos(wt + \varphi - ۹۰^\circ) \Rightarrow V = A_m \angle (\varphi - ۹۰^\circ)$$

$$-Sin(wt + \varphi) = Cos(wt + \varphi + ۹۰^\circ)$$
$$\_Cos(wt + \varphi) = Cos(wt + \varphi + ۱۸۰^\circ)$$

روابط فازوری عناصر مداری C,L,R

مقاومت: فرم فازوری ولتاژ و جریان همانند رابطه زمانی ولتاژ و جریاناست.

$$v(t) = Ri(t) \Rightarrow V = RI$$
$$\angle V = \angle I$$

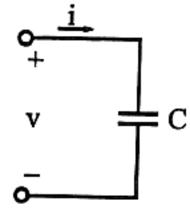


در مقاومت ولتاژ و جریان هم فازاند. به طور مثال، در صورتی که ولتاژ دو سر یک مقاومت ۴ اهمی $V_R = 4\angle -20^\circ$ باشد. آنگاه جریان عبوری از آن برابر است با

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{۴\angle -۲۰^\circ}{۴} = ۱\angle -۲۰^\circ$$

خازن: برای خازن مقابل روابط میان فازور ولتاژ جریان برابر اند با

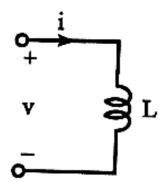
$$i(t)=C\frac{dv}{dt}\Rightarrow I=jwCV\Rightarrow V\frac{۱}{jwC}I$$
$$\angle I=۹۰^{\circ}+\angle V$$



در خازن I نسبت به V ، ۹۰ پیش فاز است به عبارتی دیگر ماکزیمم جریان ۹۰ زودتر از ماکزیمم ولتاژ رخ می دهد.

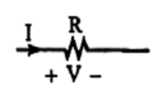
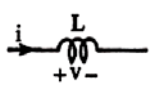
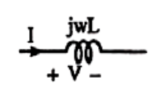
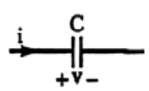
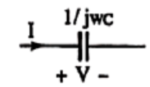
سلف: برای سلف مقابل روابط میان فازور ولتاژ و جریان عبارت است از

$$v(t)=L\frac{di}{dt}=V=jwLI\Rightarrow I\frac{1}{jwL}V$$
$$\angle I=-90^{0}+\angle V$$



دراین حالت فازور جریان از فازور ولتاژ به مقدار 90^{0} عقب می افتد یعنی شکل موج جریان به میزان یک چهارم سیکل از شکل موج ولتاژ عقب تراست.

خلاصه روابط vi حوزه زمان و V I حوزه فرکانس سه عنصر RLC به صورت جدول زیر می باشد.

حوزه زمان		حوزه فرکانس	
	$v=Ri$	$V=RI$	
	$v=L\frac{di}{dt}$	$V=jwLI$	
	$v=\frac{1}{C}\int idt$	$V=\frac{1}{jwC}I$	

تعریف امپدانس و ادمیتانس

نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان را امپدانس می نامیم و آن را با نماد z(jw) نشان می دهیم. رابطه ولتاژ و جریان سه عنصر غیرفعال RLC در حوزه فرکانس عبارت اند از:

«مقاومت»

$$V=RI\Rightarrow\frac{V}{I}=R\Rightarrow Z(jw)=R$$

«خازن»

$$V = \frac{۱}{jwC} I \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{۱}{jwC} \Rightarrow Z(jw) = \frac{۱}{jwC}$$

«سلف»

$$V = jwLI \Rightarrow \frac{V}{I} = jwL \Rightarrow Z(jw) = jwL$$

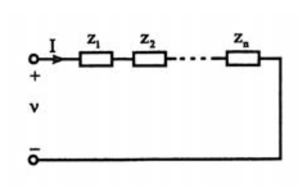
به طور مشابه نسبت فازور جریان به فازور ولتاژ را ادمیتانس $Y(jw)$ می نامیم. جدول زیر امپدانس و ادمیتاس عناصر C,L,R را نمایش می دهد.

عنصر مداری	z(امپدانس)	Y(ادمیتانس)
مقاومت با R	R	$G = \frac{1}{R}$
خازن با ظرفیت C	$\frac{1}{jwC}$	jwC
سلف با اندوکتانس L	jwL	$\frac{1}{jwL}$

به هم پیوستن سری- موازی عناصر مداری

«اتصال سری عناصر»

در شکل مقابل کلیه عناصر سری هستند و امپدانس معادل برابر است با



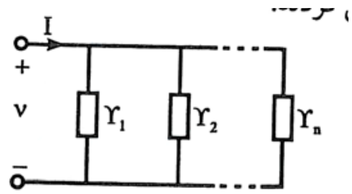
$$Z(jw) = \frac{V}{I} = Z_۱ + Z_۲ + \ldots + Z_n = \sum_{i=۱}^{n} Z_i(jw)$$

اگر $Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n$ باشد آنگاه

$$Z(jw) = nZ_۱(jw)$$

«اتصال موازی عناصر»

در مدار مقابل کلیه عناصر موازی هستند و لذا ادمیتانس آنها با هم جمع می گردند.



$$Y(jw)=\frac{I}{V}=Y_۱+Y_۲+\ldots+Y_n=Y(jw)=\sum_{i=۱}^{n}Y_۱(jw)$$

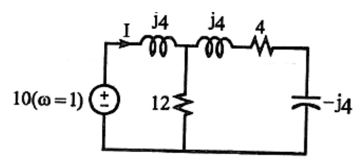
اکر $Y_۱=Y_۲=\ldots=Y_n$ باشد آنگاه

$$Y(jw)=nY_۱(jw)$$

«اتصال سری – موازی عناصر»

در این حالت مدارهای پیچیده را می توان با ترکیب اجزاء به صورت سری و موازی تجزیه و تحلیل نمود.

مثال ۲: در مدار مقابل جریان $i(t)$ را به دست آورید.



حل:

امپدانس دیده شده از دو سر منبع را به دست می آوریم.

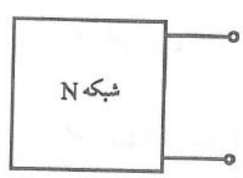
$$Z = j۴ = [۱۲ || ۹ j۴ + ۴ - j۴)] = ۳ + j۴(\Omega)$$

$$I = \frac{۱۰}{۳ + j۴} = ۲\angle -۵۳^{\circ} \Rightarrow i(t) = ۲Cos(t - ۵۳^{\circ})$$

امپدانس مدار

برای شکل مقابل در صورتی که از دو سر B,A امپدانس محاسبه گردد، شکل کلی امپدانس مدار در حالت قطبی برابر خواهد بود

با



$$Z(jw) = |z| \angle \varphi$$

و در حالت مختصات قائم

$$Z(wj) = R \pm jX$$

$\mathrm{Re}[z] = R, \mathrm{Im}[z] = \pm X$ در این حالت ضریب قسمت موهومی امپدانس، همان راکتانس (X) بوده و جزء مقاومتی امپدانس مدار را با R نشان می دهند.

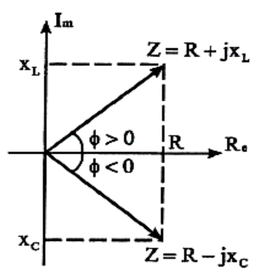
«نمایش برداری امپدانس مدار»

$$z = \frac{V}{I} = \frac{V_m}{I_m} \angle(\theta_v - \theta_1)$$

زوایه امپدانس برابر است با

$$\phi = \theta_V - \theta_I$$

مطابق با شکل مقابل اگر X (ضریب قسمت موهومی امپدانس) در بالای محور حقیقی قرار گیرد. آن گاه $\phi > 0$ می گردد یعنی راکتانس مدار خاصیت سلفی دارد. به عبارت دیگر فاز ولتاژ مدار نسبت به فاز جریان مدار جلوتر است و مدار خاصیت پس فاز دارد. به طور مشابه اگر ضریب قسمت موهومی امپدانس (X) در پایین محور حقیقی قرار گیرد (ربع چهارم) آن گاه $\phi < 0$ می گردد یعنی راکتانس مدار خاصیت خازنی دارد. به عبارتی فاز ولتاژ مدار نسبت به فاز جریان مدار عقب تر است و مدار خاصیت پیش فاز دارد.



حالت های مختلف امپدانس مدار

هرگاه هدف تعیین امپدانس از دو سر مورد نظر باشد حالت های مختلف زیر برای امپدانس رخ می دهد.

- ✓ امپدانس مدار اهمی خالص

$$Z = R \quad , \qquad \phi = 0$$

- ✓ امپدانس مدار سلفی خالص

$$Z = jX_L \ , \quad \phi = 90^0$$

- ✓ امپدانس مدار خازنی خالص

$$Z = -jX_C \ , \quad \phi = -90^0$$

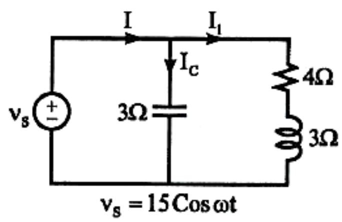
✓ امپدانس مدار اهمی، سلفی

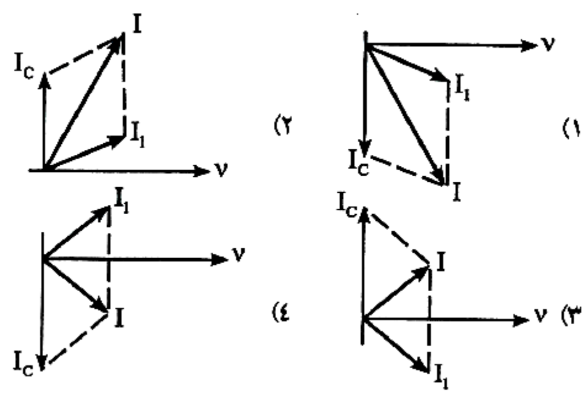
$, Z = R + jX_L \quad \phi > 0$

✓ امپدانس مدار اهمی، خازنی

$Z = R - jX_C \ , \quad \phi < 0$

مثال ۳: دیاگرام phasor مدار مقابل کدام است؟





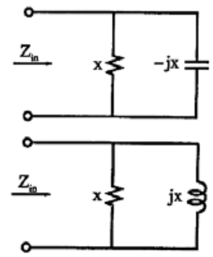
$CV_S = ۱۵\angle ۰ \quad ,$

$$I_1 = \frac{V}{4+3j} = \frac{15}{5\angle 36^0} = 3\angle -36^0$$

با توجه به گزینه ها، تنها گزینه (۳) دارای این دو ویژگی است.

نکته:

$$Z_{in} = x||(-jx) = \frac{x}{۲}(۱-j) \Rightarrow Z_{in} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x\angle ۴۵^{\cdot}$$
$$Z_{in} = x||\ jx = \frac{x}{۲}(۱+j) \Rightarrow Z_{in} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x\angle ۴۵^{\cdot} \qquad (۱۶)$$



ادمیتانس مدار

در حالت کلی ادمیتانی مدار از دو سر مورد نظر از دو قسمت تشکیل شده است.

$$Y = G + jB$$

مولفه حقیقی ادمیتانس را رسانایی G و مولفه موهومی آن سوسپتانس B نامیده می شود.

نکته: با توجه به روابط زیر

$$V = ZI$$

,

در می یابیم که ادمیتانس و امپدانس معکوس هم هستند یعنی

$$Z = Y^{-1} \Leftrightarrow Y = Z^{-1}$$

$$|Z| = \angle Z = -\angle Y$$

$\angle Z$ همان زوایه امپدانس است که برابر است با

$$\angle Z = \angle V - \angle I$$

فرم فازوری قوانین کیرشهف

قوانین کیرشهف بیان می دارند در هر لحظه از زمان جمع جبری ولتاژهای حلقه های معین و یا جمع جبری جریـان هـای شـاخه های معینی صفر می باشند. به عنوان مثال فرض کنید معادله یک مش در حوزه زمان چنین نوشته شود.

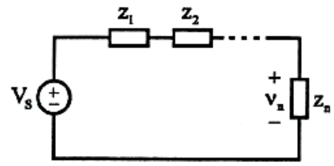
$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$$

در حالت دائمی سینوسی فرم فازوری رابطه فوق عبارت است از

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که فازورهای جریان هم قانون جریان کیرشهف را تصدیق می کند.

تقسیم ولتاژ

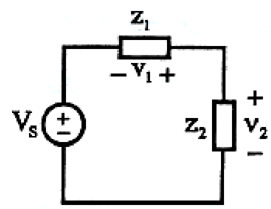


$$V_n = \frac{Z_n V_S}{Z_1 + Z_2 + ...Z_n}$$

$Z_1 = Z_2 = ... = Z_n$ اگر

$$V_n = \frac{V_s}{n}$$

در حالت خاص (n=۲)



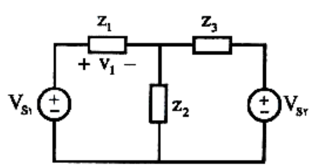
$$V_1 = \frac{-Z_1 V_s}{Z_1 + Z_2} \qquad V_2 = \frac{Z_2 V_s}{Z_1 + Z_2}$$

مثال ۴: به کمک جمع آثار V_1 را به دست آورید.

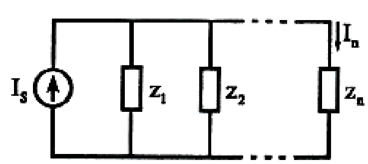
حل:

$$V_1 = \underbrace{\frac{Z_1 V_{S1}}{Z_1 + (Z_2 || Z_3)}}_{1} - \underbrace{\frac{(Z_1 || Z_2) V_{S2}}{(Z_1 || Z_2) + Z_3}}_{2}$$

جمله ۱، اثر منبع V_{S1} و جمله ۲، اثر منبع V_{S2} می باشد.



تقسیم جریان



$$I_n = \frac{Z_{eq} I_s}{Z_{eq} + Z_n}$$

$$Z_{eq} = Z_1 || Z_2 || ... || Z(n-1)$$

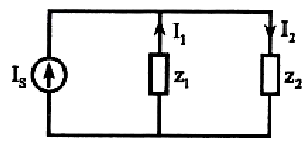
$Z_1 = Z_2 = ... = Z_n$ اگر

$$Z_{eq} = \frac{I_s}{n}$$

$$I_n = \frac{-Z_2 I_2}{Z_1 + Z_2} \ , \ I_2 = \frac{Z_1 I_s}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_1 = \frac{G_1 I_S}{G_1 + G_2} , G_1 = \frac{1}{Z_1}$$

$$I_2 = \frac{G_2 I_s}{G_1 + G_2}$$



$$I_1 = \frac{\left(Z_2 + Z_3\right) I_S}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$I_2 = \frac{Z_1 I_S}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

مثال ۵: به کمک جمع آثار I را به دست آورید.

حل:

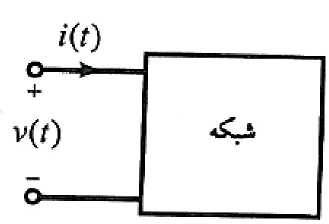
$$I = \underbrace{\frac{-Z_1 I_{S1}}{Z_1 + Z_2 + Z_3}}_{1} + \underbrace{\frac{-Z_2 I_{S2}}{Z_1 + Z_2 + Z_3}}_{2}$$

جمله ۱ ، اثر منبع جریان I_{S1} و جمله ۲، اثر منبع جریان I_{S2} می باشد.

تحلیل توان در حالت دائمی سینوسی

یکی از مباحث مهم مدار های ac در حالت دائمی سینوسی، مبحث توان می باشد. به طوری که میـزان تـوان مفیـد و غیـر مفیـد تحمیلی به شبکه مورد ارزیابی قرار می گیرد. در این فصل به بررسی توان هـای نظیـر تـوان لحظـه هـای ، متوسـط، مخـتلط و ... پرداخته شده است. در انتها فصل یک روش جهت کاهش توان راکیتو و حالت های مختلف قضیه انتقال تـوان مـاکزیمم در حالـت دائمی سینوسی بیان گردیده است.

توان لحظه ای



شبکه مقابله را در نظر بگیرید

$$V\left(t\right) = V_m \sin\left(wt + \theta_v\right)$$
$$i\left(t\right) = I_m \sin\left(wt + \theta_I\right)$$

در حالت دائمی سینوسی توان لحظه ای تحویلی به شبکه برابر است با

$$P(t)=V(t)i(t)$$

با جایگزینی v و I و استفاده از روابط مثلثاتی روابط توان لحظه ای به دست می آید.

$$P(t)=\frac{۱}{۲}V_m I_m\left[\text{Cos}\varphi-\cos(۲wt+\varphi)\right]$$

در رابطه فاز ϕ برابر است با

$$\varphi=\theta_V-\theta_I$$

مثال ۱: معادلات ولتاژ و جریان یک مدار الکتریکی به صورت زیر است.

$$V(t)=۱۰۰\sin\left(wt+۴۵^{o}\right),i(t)=۱۰\cos wt$$

توان لحظه ای مدار در لحظه $t=0$ چند وات است؟

حل:

$$i(t)=۱۰\cos wt=۱۰\sin\left(wt+۹۰^{o}\right)$$
$$\varphi=\theta_V-\theta_I=۴۵^{o}-۹۰^{o}=-۴۵^{o}$$

طبق رابطه داریم

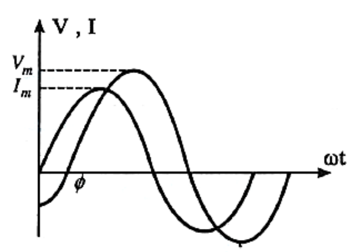
$$P(t)=\frac{۱}{۲}\times۱۰۰\times۱۰\left[\cos\left(-۴۵^{o}\right)-\cos\left(۲wt-۴۵^{o}\right)\right]$$
$$P(t)=۵۰۰\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\cos\left(۲wt-۴۵^{o}\right)\right]\Rightarrow P(۰)=۰$$

توان متوسط

مقدار متوسط توان لحظه ای را تون متوسط گویند.

$$P_{av}=\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}p(t)dt$$

T پریود سیگنال v (یا i) است با جایگزینی رابطه و ساده سازی داریم.



$$P_{av}=\frac{۱}{۲}V_m I_m \text{Cos}\varphi\ (w)$$

واحد توان متوسط وات (w) است. نمایش توان متوسط بر حسب ولتاژ و جریان موثر برابر است با

$$P_{av}=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۲}V_e\right)\left(\sqrt{۲}I_e\right)\text{Cos}\varphi \Rightarrow P_{av}=V_eI_e\cos\varphi\,(\text{w})$$

در رابطه فاز ϕ همان اختلاف فاز ولتاژ جریان و $Cos\phi$ ضریب توان می باشد.

نکته: توان متوسط مقداری حقیقی است که با توجه به مقدار $Cos\phi$ می توانند مثبت ، منفی و حتی صفر گردد.

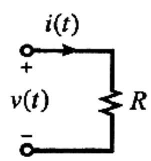
$$\varphi=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \cos\varphi=۰\Rightarrow P_{av}=۰$$

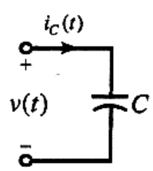
توان متوسط المان های مدار

مقاومت: در مقاومت اختلاف فاز بین سیگنال جریان و ولتاژ صفر است.

$$\varphi=۰\Rightarrow \cos\varphi=۱\Rightarrow p_{av}=V_eI_e\,(\text{w})$$

Oازن: در خازن فاز جریان ۹۰ درجه از فاز ولتاژ جلوتر است.

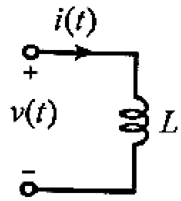




$$\varphi=\frac{-\pi}{۲}\Rightarrow \text{Cos}\varphi=\cos\left(\frac{-\pi}{۲}\right)=۰\Rightarrow P_{av}=۰$$

بنابر این در خازن توان مصرف نمی گردد.

سلف:در سلف فاز ولتاژ ۹۰ درجه از فاز جریان جلوتر است.



$$\varphi=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰\Rightarrow P_{av}=۰$$

در سلف نیز توان مصرف نمی گردد.

توان مختلط

طبق تعریف توان مختلط بر حسب ولتاژ و جریان فازوری $I = I_m\angle\theta_I , V = V_m\angle\theta_v$ برابر است با

$$S = \frac{1}{2} VI^* (VA)$$

که دارای واحد اندازه گیری ولت آمپر (VA) است. فرم قطبی توان مختلط

$$S = \frac{1}{2}(V_m\angle\theta_v)(I_m\angle-\theta_I) = \frac{1}{2}V_m I_m\angle(\theta_v-\theta_I) = \frac{1}{2}V_m I_m\angle\varphi$$

$$S = V_e I_e\angle\varphi (VA)$$

فرم قائم (دکارتی) توان مختلط

$$S = \frac{1}{2}V_m I_m Cos\varphi + j\frac{1}{2}V_m I_m \sin\varphi$$

$$S = V_e I_e \cos\phi + jV_e I_e \sin\phi$$

$$S = P_e + jP_r (VA)$$

توان اکتیو (موثر)

طبق تعریف قسمت حقیقی توان مختلط را توان اکتیو (مصرفی) می نامند:

$$\mathrm{Re}[S] = P_e = V_e I_e Cos\phi (w)$$

واحد اندازه گیری آن وات (w)است و در مقاومت های مدار به صورت حرارت تلف (مصرف) می گردد. به توان اکتیو، توان موثر و فعال نیز گفته می شود.

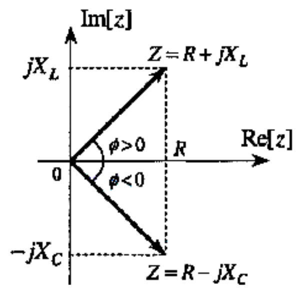
توان راکتیو (غیر موثر)

طبق تعریف قسمت موهومی توان مختلط را توان راکتیو (غیر مفید) نامند.

$$\mathrm{Im}[S] = P_r = V_e I_e \sin\phi (VAR)$$

واحد اندازه گیری آن ولت آمپر راکتیو (VAR) است. گاهی با Q نمایش داده می شود. مثبت و منفی بودن رابطه (۱۳) به حالت سلف و خازنی بودن مدار بستگی دارد. به طوری که

در مدار های سلفی (پس فاز)



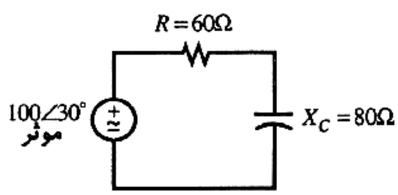
$\varphi > ۰ \Rightarrow P_r > ۰$

در مدار های خازنی (پیش فاز)

$\varphi > ۰ \Rightarrow P_r < ۰$

نکته: مدار های مقاومتی توان راکتیو و مدار های راکتانس توان اکتیو ندارند.

مثال: در مدار مقابل توان مختلط را به دست آورید.



حل : روش اول

امپدانس دیده شده از دو سر منبع ولتاژ برابر است با

$$Z_{in} = ۶۰ - j۸۰ = ۱۰۰\angle -۵۳.۱۳^o$$

$$I_e = \frac{V_e}{|Z_{in}|} = \frac{۱۰۰}{۱۰۰} = ۱A$$

طبق رابطه داریم

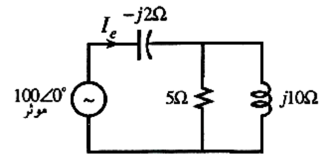
$$S = V_e I_e \angle\varphi = ۱۰۰ \times ۱ \angle -۵۳.۱۳^o \Rightarrow S = ۶۰ - j۸۰(VA)$$

روش دوم

$$Z_{in} = ۶۰ - j۸۰ \Rightarrow |Z_{in}|۱۰۰, I_e = \frac{V_e}{|Z_{in}|} = ۱A$$

$$S = Z_{in} \times I_e^۲ = (۶۰ - j۸۰) \times 1^۲ = ۶۰ - j۸۰(VA)$$

مثال: توان مصرفی مدار شکل مقابل چند وات است؟



حل : امپدانس دیده شده از دو سر منبع برابر است با

$$Z_{in} = -j۲ + ۵ || (j۱۰) = ۴\Omega, I_e = \frac{V_e}{|Z_{in}|} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵A$$

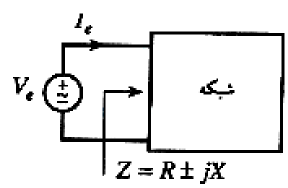
$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۱۰۰ \times ۲۵ \times \cos۰ = ۲۵۰۰w$$

توجه: در مثال ۳ به علت این که امپدانس ورودی اهمی خالص شد، توان راکتیو صفر خواهد بود.

محاسبه توان بر حسب امپدانس

برای شبکه مقابل با امپدانس تونن دیده شده از دو سر منبع ورودی، توان مختلط برابر است با

$$S = ZI_e^2 = (R \pm jX)I_e^2$$



که بخش حقیقی S همان توان مصرفی (اکتیو)

$$P_e = RI_e^۲$$

و بخش موهومی S توان راکتیو خواهد بود.

$$P_r = \pm XI_e^۲$$

در رابطه در صورتی که مدار خاصیت خازنی (پیش فاز) داشته باشد توان راکتیو منفی $(P_r < 0)$ خواهد شد.

توان ظاهری

حاصل ضرب ولتاژ موثر در جریان موثر را توان ظاهری گویند.

$$P_S = V_e I_e \qquad (VA)$$

واحد اندازه گیری آن ولت آمپر (VA) بوده و همواره مقدار آن مثبت است. توان ظاهری در واقع همان اندازه ی توان مختلط است.

$$P_S = |S| = \sqrt{P_e^۲ + P_r^۲}$$

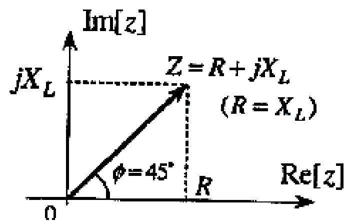
نکته: در صورتی که مداری در حالت تشدید باشد $(Cos\phi = 1)$ آن گاه

$$\varphi = 0 \Rightarrow P_r = 0 \Rightarrow P_S = P_e$$

به عبارتی توان ظاهری با توان مصرفی برابر می گردد.

نکته: در صورتی که مدار دارای فاز امپدانس $\phi = 45^o$ باشد آن گاه

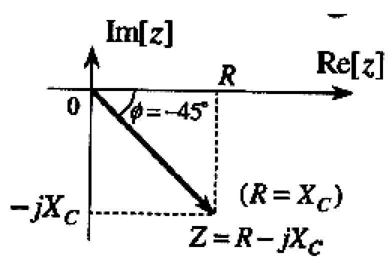
$$P_e = P_r \Rightarrow P_S = \sqrt{2}P_e$$



به ازای فاز امپدانس $\varphi = 45^{\circ}$، توان اکتیو و راکتیو مدار با هم برابر بوده و $P_S = \sqrt{2}P_e$ می گردد.

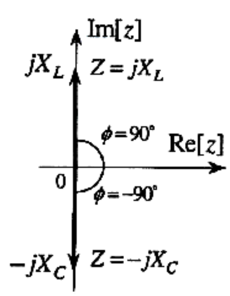
نکته: در صورتی که مدار دارای فاز امپدانس $\varphi = -45^{\circ}$ باشد (خاصیت خازنی) آن گاه

$$P_e = -P_r \Rightarrow P_S = \sqrt{2}P_e$$



نکته: مداری که تنها خاصیت راکتانسی را دارد آن گاه

$$\varphi = \pm 90^{o} \Rightarrow P_e = 0 \Rightarrow P_S = P_r$$



در این حالت توان ظاهری با توان راکتیو برابر می گردد.

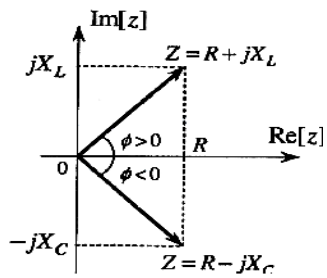
ضریب توان (Power factor)

نسبت توان متوسط به توان ظاهری را ضریب توان گویند.

$$P.F = \frac{V_e I_e \cos\varphi}{V_e I_e} = \cos\varphi$$

در رابطه ϕ فاز امپدانس که همان اختلاف فاز سیگنال ولتاژ و جریان می باشد به عبارت دیگر

$$P.F = \cos\phi = \cos(\theta_V - \theta_I)$$



نکته: محدوده تغییرات ϕ فاز برابر است با

$$-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$$

Fار خازنی (رادیو اکتیو خالص)

$$Z = -jX_C$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = 0 - 90^\circ = -90^\circ \Rightarrow P.F = \cos(-90^\circ) = 0$$

بار اهمی- خازنی (پیش فاز)

$$Z = R - jX_C \Rightarrow P.F = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$-90^\circ < \varphi < 0 \Rightarrow 0 < P.F < 1$$

بار اهمی (خالص)

$$Z = R \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow P.F = \cos 0 = 1$$

بار اهمی – سلفی (پیش فاز)

$$Z = R - jX_L \Rightarrow P.F = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$0 < \varphi < 90^\circ \Rightarrow 0 < P.F < 1$$

بار سلفی (راکتیو خاص)

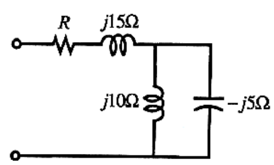
$$Z = jX_L \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow P.F = \cos 90^\circ = 0$$

نکته: به ازای ضریب توان یک $(\phi = 0)$، حالت تشدید در مدار ایجاد می گردد به عبارت دیگر فاز ولتاژ و جریان برابر می گردند.

نکته : به ازای ضریب توان $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\varphi = ۴۵^{o}\right)$ف توان اکتیو با توان راکتیو $\left(P_e = P_r\right)$ برابر می گردند. به عبارت دیگر در صورتی که امپدانس ورودی مدار به صورت $Z_{in} = R_{eq} + jX_{eq}$ به دست آید و فاز $\varphi = ۴۵^{o}$ برای مدار مد نظر باشد، شرط زیر همواره برقرار است.

$$R_{eq} = X_{eq}$$

مثال: مدار مقابل مقاومت R چند اهم باشد تا توان اکتیو و رادیو اکتیو شبکه برابر گردند؟



حل:

$$Z_{in} = R + j۱۵ + j۱۰ || \left(-j۵\right) = R + j۵$$

طبق رابطه ، $R = 5\Omega$ به دست می آید.

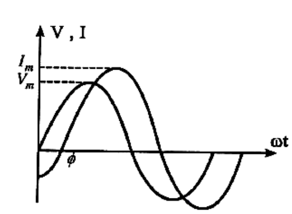
نکته: به کمک توان مختلط ضریب توان برابر است با

$$S = P_e + jP_r \Rightarrow \tan\varphi = \frac{P_r}{P_e} \Rightarrow \varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{P_r}{P_e}\right)$$

$$P.F = \text{Cos}\varphi = \cos\left[\tan^{-۱}\left(\frac{P_r}{P_e}\right)\right]$$

نکته: در صورتی که توان راکتیو مثبت باشد $(P_r > 0)$ ضریب توان پس فاز (خاصیت سلفی) و اگر منفی بود $(P_r < 0)$ ضریب توان پیش فاز (خاصیت خازنی) خواهد بود.

نکته: برای منحنی ولتاژ و جریان شکل مقابل داریم

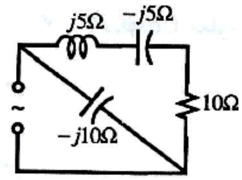


$$\varphi = \theta_V - \theta_I \Rightarrow \varphi > ۰$$

شبکه خاصیت سلفی دارد (پس فاز) و توان مختلط آن برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲}V_m I_m \angle\varphi \Rightarrow S = P_e + jP_r$$

مثال: ضریب توان شبکه شکل مقابل کدان گزینه است؟



۱) ۱ ۲) ۰/۶ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) صفر

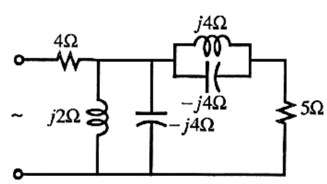
حل :

$$Z_{in} = (j۵ - j۵ + ۱۰) || (-j۱۰) = ۵(۱ - j) = ۵\sqrt{۲}\angle -۴۵^{\circ}$$

$$P.F = Cos(-۴۵^{\circ}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$ (پیش فاز)

مثال: در مدار مقابل ضریب قدرت کل چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$



حل:

LC موازی در بازوی افقی دارای امپدانس بی نهایت هستند لذا مدار باز می باشد.

$$Z_{in} = ۴ + j۲ || (-j۴) = ۴ + j۴ = ۴\sqrt{۲}\angle ۴۵^{o}$$

$$P.F = Cos۴۵^{o} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$ (پس فاز)

نکته: با توجه به معلومات داده شده، می توان توان مختلط را به دست آورد.

$Cos\varphi, P_e$ معلوم باشند.

$$S = P_e + jP_r \qquad (x)$$

$$\tan\varphi = \frac{P_r}{P_e} \Rightarrow P_r = P_e \tan\varphi \qquad (xx)$$

$$(x),(xx) \Rightarrow S = P_e(۱ + j\tan\varphi) \qquad (۲۸)$$

P_r و $Cos\phi$ معلوم باشند.

$$S = P_e + jP_r \qquad \text{(x)}$$

$$\tan\phi = \frac{P_r}{P_e} \Rightarrow P_e = \frac{P_r}{\tan\phi} = P_r Co\tan\phi \qquad \text{(xx)}$$

$$(x),(xx) \Rightarrow S = P_r(\cot an\phi + j)$$

در بار های خازنی (پیش فاز) ، j به j- تبدیل می گردد.

$Cos\phi, P_s$ معلوم باشند

$$\cos\varphi = \frac{P_e}{P_S} \Rightarrow P_e = Cos\varphi P_S$$

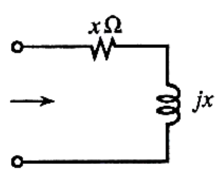
$$\sin\varphi = \frac{P_r}{P_S} \Rightarrow P_r = \sin\varphi P_S$$

$$S = P_e + jP_r$$

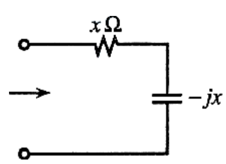
نکته: مدار RL مقابل دارای ضریب قدرت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

(پس فاز) $Z_{in} = x + jx \Rightarrow Cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + x^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

نکته: به طور مشابه مدار RC مقابل دارای ضریب قدرت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$است.

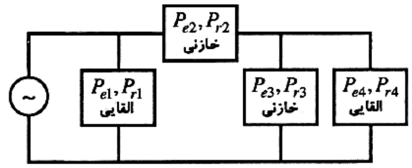


(پیش فاز) $Z_{in} = x - jx \Rightarrow Cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + x^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$



محاسبه توان مختلط کل شبکه

توان مختلط ترکیب چند بار متصل به هم برابر است با مجموع توان های مختلط تک تک بار ها، به طور مثال بـرای شـبکه مقابلـه توان مختلط کل برابر است با

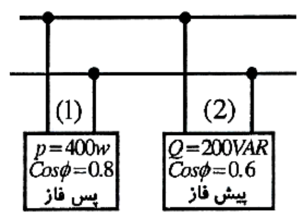


$$P_{eT} = P_{e۱} + P_{e۲} + P_{e۳} + P_{e۴}$$

$$P_{rT} = P_{r۱} - P_{r۲} - P_{r۳} + P_{r۴}$$

$$S_T = P_{eT} + jP_{rT}$$

مثال: شبکه مقابل از دو بار با مشخصات داده شده تغذیه می گردد توان مختلط کل به همراه ضریب قدرت شبکه را به دست آورید.



حل:

برای بار اول طبق رابطه، $(\phi > 0)$ داریم

$$\cos\varphi = ۰.۸ \Rightarrow \tan\varphi = \frac{۳}{۴}$$

$$S_۱ = P_e\left(۱ + j\tan\varphi\right) = ۴۰۰\left(۱ + j\frac{۳}{۴}\right) = ۴۰۰ + j۳۰۰$$

برای بار دوم طبق رابطه ، $(\phi < 0)$ داریم.

$$\cos\varphi = ۰.۶ \Rightarrow \cot an\varphi \frac{۳}{۴}$$

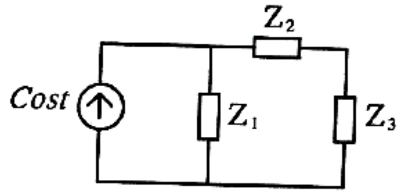
$$S_۲ = P_r\left(\cot an\varphi - j\right) = ۲۰۰\left(\frac{۳}{۴} - j\right) = ۱۵۰ - j۲۰۰$$

$$S = S_۱ + S_۲ = ۴۰۰ + j۳۰۰ + ۱۵۰ - j۲۰۰ = ۵۵۰ + j۱۰۰$$

طبق رابطه ضریب قدرت کل برابر است با

$$P.F = \cos\varphi = Cos\left[\tan^{-۱}\left(\frac{۱۰۰}{۵۵۰}\right)\right] \text{(پس فاز)}$$

مثال: مدار شکل مقابل در حالت دائمی سینوسی است؟ کدام گزینه نادرست است؟ (سداسری ۸۲)



$Z_۱ = ۰.۳ + j۰.۱\Omega$

$Z_۲ = ۰.۴ + j۰.۲\Omega$

$Z_۱ = ۰.۲ + j۰.۴\Omega$

۱) توان ظاهری (اندازه توان مختلط) تحویل داده شده به Z_2 و Z_3 برابر است.

۲) توان متوسط تحویل داده شده به Z_2 دو برابر توان متوسط تحویل داده شده به Z_3 است.

۳) توان راکیتو تحویل داده شده به Z_1، (۲-) برابر توان راکتیو تحویل داده شده به Z_2 است.

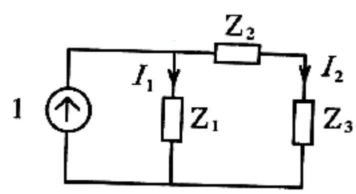
۴) توان راکتیو تحویل داده شده به Z_3، چهار برابر توان راجتیو تحویل داده شده به Z_1 است.

حل

$Z_۱ = ۰.۳ + j۰.۱, Z_۲ = ۰.۴ - j۰.۲, Z_۳ = ۰.۲ + j۰.۴$

$$I_۱ = \frac{۰.۶ + j۰.۲}{۰.۹ + j۰.۳} = \frac{۲}{۳}\angle ۰, I_۲ = \frac{۰.۳ + j۰.۱}{۰.۹ + j۰.۳} = \frac{۱}{۳}\angle ۰$$

$$S = P_{av} + jQ = \frac{۱}{۲}V_m I^*_m = V_e I^*_e = \frac{۱}{۲}Z|I|^۲ \qquad (x)$$



توان مختلط S به فرم $S = P_{av} + jQ$ تعریف می گردد که در رابطه (x)، P_{av} توان متوسط و Q توان راکتیو و |S| توان ظاهری می باشد. به کمک اطلاعات مسئله داریم

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}Z_۱|I_۱|^۲ = \frac{۱}{۲}(۰.۳ + j۰.۱)\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۲}{۳۰} + j\frac{۲}{۹۰} \Rightarrow Q_۱ = \frac{۲}{۹۰}VAR$$

$$S_۲ = \frac{۱}{۲}Z_۲|I_۲|^۲ = \frac{۱}{۲}(۰.۴ + j۰.۲)\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۲}{۹۰} - j\frac{۱}{۹۰}$$

$$P_{۲av} = \frac{۲}{۹۰}w, Q_۲ = \frac{-۱}{۹۰}VAR. |S_۲| = \frac{\sqrt{۵}}{۹۰}$$

$$S_۳ = \frac{۱}{۲}Z_۲|I_۲|^۲ = \frac{۱}{۲}(۰.۲ + j۰.۴)\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۹۰} + j\frac{۲}{۹۰}$$

$$P_{۳av} = \frac{۱}{۹۰}w, Q_۳ = \frac{۲}{۹۰}VAR, |S_۳| = \frac{\sqrt{۵}}{۹۰}$$

بنابر این $|S_1| = |S_2| = \frac{\sqrt{5}}{90}$ w, $P_{1av} = 2P_{2av} = \frac{2}{90}$ w, $Q_1 = -2Q_2$, $Q_1 = Q_3$ با توجه به اطلاعات به دست آمده در می آبیم، سه گذینه اول صحیح می باشند و گزینه چهارم نادرست است.

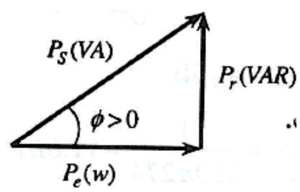
مثلث توان مختلط

رابطه $P_S^2 = P_e^2 + P_r^2$ که ارتباط دهنده توان های بار است را می توانیم به مثلث قائم الزاویه تشبیه کرد که وتر آن توان ظاهری P_S و اضلاع آن توان های P_r, P_e باشند.

حالت های مختلف مثلث توان

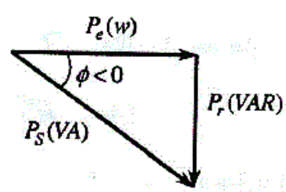
بار اهمی – سلفی : در این حالت اختلاف فاز ولتاژ و جریان مثبت است.

$\varphi > 0 \Rightarrow P_r > 0$

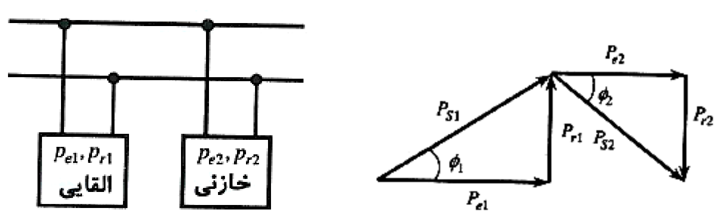


بار اهمی – خازنی : در این حالت اختلاف فاز ولتاژ و جریان منفی است.

$\varphi = \theta_V - \theta_I > 0 \Rightarrow P_r < 0$



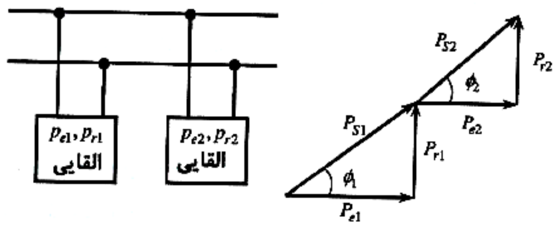
ترکیب بار ها: در این حالت مثلث توان هر بار به انتهای وتر بار قبل وصل می گردد.



$$P_{eT} = P_{e1} + P_{e2}$$
$$P_{rT} = P_{r1} - P_{r2}$$
$$S = P_{eT} + jP_{rT}$$

در کلیه مثلث ها بردار های افقی در جهت راست می باشند که نشان دهنده توان مصرفی است و جمع آنها همان توان مصرفی کل شبکه می باشد. بردار های عمودی نیز توان غیر موثر را نشان می دهند که با توجه به پس فاز بودن (رو به بالا) و پیش فاز بودن

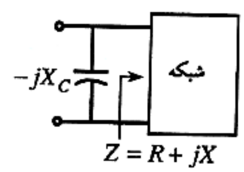
(رو به پائین) شبکه جهت آن مشخص می گردد . به طور مشابه



$$P_{eT} = P_{e1} + P_{e۲}$$
$$P_{rT} = P_{r۱} + P_{r۲}$$
$$S = P_{eT} + jP_{rT}$$

تصحیح ضریب توان شبکه

در مثلث توان هرچه P_S به P_e نزدیک تر باشد، زاویه ϕ به سمت صر میل کـرده و در نتیجـه ضـریب تـوان $(Cos\phi)$ افـزایش خواهد یافت. با توجه به این که شبکه مقابل خاصیت القایی (سلفی) دارد، قرار دادن یک راکتانس خازنی مـی توانـد ضـریب تـوان شبکه را به مقدار مطلوب برساند.

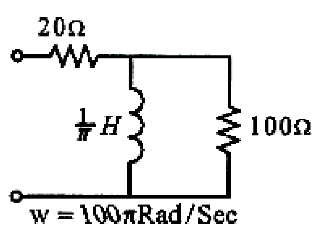


$$Z_{in} = \left(-jX_C\right) || \left(R + jX\right) = \frac{X_C}{R^۲ + \left(X - X_C\right)^۲}\left[RX_C - j\left(R^۲ + X^۲ + -XX_C\right)\right]$$

$$\tan\varphi = \frac{R^۲ + X^۲ - XX_C}{-RX_C} \Rightarrow X_C = \frac{R^۲ + X^۲}{X - R\tan\varphi}$$

با قرار دادن راکتانس خازنی X_C در ورودی شبکه می توان تا حدودی به مقدار مطلوب ضریب توان دست یافت.

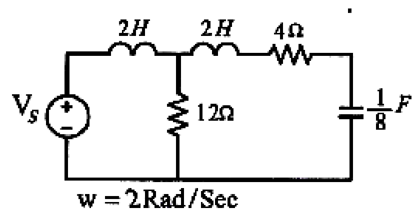
مثال: چه خازنی باید با ورودی شبکه شکل مقابل موازی کنیم تا ضریب توان شبکه حاصل ۰،۹۵ پس فاز شود؟



حل:

$$Z_{in} = ۲۰ + \left(۱۰۰ || j۱۰۰\right) = ۷۰ + j۵۰$$

$$X = \frac{۷۰^۲ + ۵۰^۲}{۷۰\tan\left(Cos^{-۱}۰.۹۵\right) - ۵۰} = -۲۷۴ \Rightarrow c = \frac{۱}{-wX_۱} = \frac{۱}{۱۰۰\pi ۲۷۴} = ۱۱.۶\mu F$$



مثال: چه خازنی به موازات منبع مدار شکل مقابل، قرار گیرد تا ضریب توان آن یک شود:

حل

$$Z_{in} = j۴ + \left[۱۲ || \left(j۴ + ۴ - j۴\right)\right] = ۳ + j۴$$

$$X_۱ = \frac{R^۲ + X^۲}{R\tan\left(Cos^{-۱}PF\right) - X} = \frac{۹+۱۶}{۳\times۰ - ۴} = \frac{-۲۵}{۴}$$

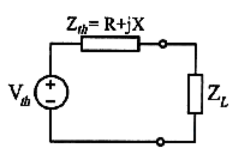
$$C = \frac{۱}{-wX_۱} = ۰.۸F$$

قضیه انتقال توان ماکزیمم

در حالت دائمی سینوسی برای انتقال توان ماکزیمم به بار، حالت های زیر معمولاً مورد نظر است.

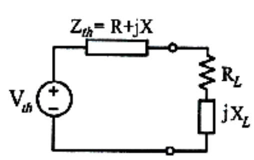
۱- برای مدار مقابل امپدانس تونن شبکه $Z_{th} = R + jX$ و فازور ولتاژ تونن V_{th} است. امپدانس باری که باعث می گردد تا ماکزیمم توان متوسط در آن مصرف شود برابر است با

$$Z_L = R - jX = Z_{th}^*$$



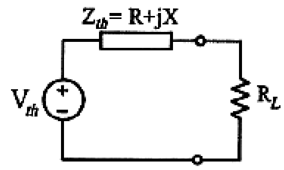
۲- برای مدار مقابل امپدانس تونن شبکه $Z_{th} = R + jX$ است و بار شبکه از یک مقاومت معلوم R_L و راکتانس سری X_L تشکیل شده است برای ایجاد توان مصرفی ماکزیمم دربار، X_L باید به فرم زیر تعریف گردد.

$$X_L = -X$$

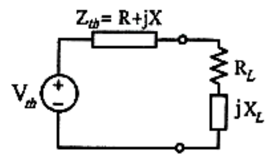


۳- امپدانس شبکه مقابل، $Z_{th} = R + jX$ است. در صورتی ماکزیمم توان متوسط در مقاومت بار R_L جذب می گردد که داشته باشیم

$$R_L = \sqrt{R^2 + X^2} = | Z_{th} |$$



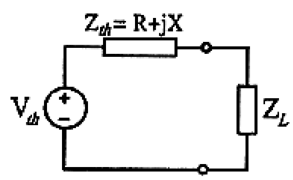
۴- امپدانس تونن شبکه مقابل $Z_{th} = R + jX$ است و بار شبکه از یک راکتانس معلوم X_L و مقاومت متغیر R_L تشکیل شده است. در صورتی ماکزیمم توان متوسط در مقاومت بار R_L مصرف می گردد که داشته باشیم.



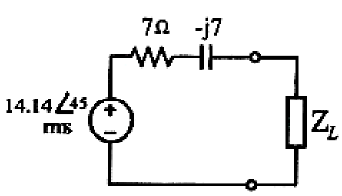
$$R_L = \sqrt{R^2 + (X + X_L)^2}$$

۵- ولتاژ تونن شبکه مقابل V_{th} و امپدانس تونن آن $Z_{th} = R + jX$ است. می خواهیم بار Z_L را به این شبکه وصل کنیم به نحوی که ماکزیمم توان را جذب کند ولی تنها می خواهیم اندازه Z_L را تغییر دهیم. $|Z_L|$ باید به مقدار زیاد باشد تا ماکزیمم توان را جذب کند.

$$|Z_L|^2 = |Z_{th}|^2 = R^2 + X^2$$



مثال: در مدار شکل مقابل، امپدانس بار Z_L است. تحت شرایط زیر Z_L را طوری تعیین کنید که توان مصرفی در آن ماکزیمم شود.



الف) Z_L را به طور دلخواه انتخاب کنید.

ب) Z_L تنها می تواند مقاومتی باشد.

ج) $Z_L = R + j2$ و تنها می توان R را تغییر داد.

در هر حالت توان مصرف شده در بار را بیابید.

حل:

الف)

$$Z_L = Z_{th}^* = ۷ + j۷$$

$$P = I^۲ R = \frac{(۱۴.۱۴)^۲}{۱۴^۲} \times ۷ = ۷.۱۴w$$

ب)
$$R=\sqrt{R_{th}^{۲}+X_{th}^{۲}}=\sqrt{۴۹+۴۹}=۹.۹\Omega$$

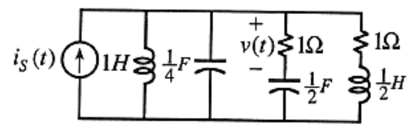
$$|I|^{۲}=\frac{(۱۴.۱۴)^{۲}}{(۷+۹.۹)^{۲}+(-۷)^{۲}}=۰.۵۹۷\Rightarrow P=|I|^{۲}R=۰.۵۹۷\times۹.۹=۵.۹۲w$$

ج)
$$R_L=\sqrt{R^{۲}+(X+X_L)^{۲}}=\sqrt{۷^{۲}+(-۷+۲)^{۲}}=۸.۶\Omega$$

$$|I|^{۲}=\frac{(۱۴.۱۴)^{۲}}{(۷+۸.۶)^{۲}+(۲-۷)^{۲}}=۰.۷۴۵\Rightarrow P=|I|^{۲}R=۰.۷۴۵\times۸.۶=۶.۱۴w$$

سوالات طبقه بندی شده

۳-۱: در مدار مقابل، پاسخ دائمی سینوسی $v(t)$ کدام است؟ $i_s(t) = ۲\text{Cos}۲t$



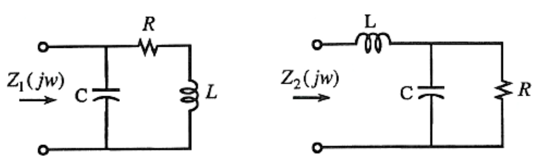
۱) $\sqrt{۲}\text{Cos}۲t$

۲) $\sqrt{۲}\text{Sin}۲t$

۳) $۲\text{Cos}(۲t + \frac{\pi}{۴})$

۴) $\sqrt{۲}\text{Sin}(۲t + \frac{\pi}{۴})$

۳-۲: برای آن که فرکانس تشدید دو مدار شکل زیر یکسان باشند، کدام شرط باید برقرار باشد؟



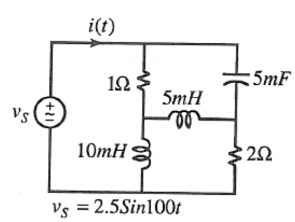
۱) $R = \frac{L}{C}$

۲) $R = \frac{C}{L}$

۳) $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$

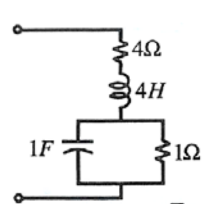
۴) $R = \sqrt{\frac{C}{R}}$

۳-۳: دامنه جریان i(t) در حالت دائمی سینوسی برای مدار مقابل برابر است با:



۱) $\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۸}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۰.۴\sqrt{۱۰}$ ۴) ۴

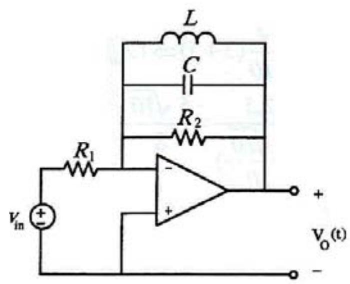
۳-۴: فرکانس تشدید مدار شکل مقابل کدام است؟ $(w_r = ?)$



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) فرکانس تشدید ندارد.

۳-۵: در مدار شکل مقابل $v_{in}(t) = v_{in}\text{Cos}\, wt$ **و مدار در حالت دائمی سینوسی است. در په فرکانسی رابطه ورودی و خروجی به صورت** $v_O = (t) = kv_{in}(t)$ **در می آید که k یک مقدار ثابت است و مقدار k کدام است؟**



۱) $k = \frac{-R_2}{R_1}, w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

۲) $k = \frac{-R_1}{R_2}, w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

۳) $k = \frac{-R_2}{R_1}, w = \sqrt{\frac{L}{C}}$

۴) $k = \frac{-R_1}{R_2}, w = \sqrt{\frac{L}{C}}$

۳-۶: معادلات حالت دائمی سینوسی یک مدار به صورت زیر است (w فرکانس منبع و I_1 و I_2 فازور i_1 و i_2 فازور)

$$\begin{cases} jw - j\frac{2}{w})I_1 + (1 - j\frac{1}{w})I_2 = 0 \\ (-jw + \frac{2}{w})I_1 + (1 + jw - j\frac{3}{w})I_2 = 1 \end{cases}$$

این مدار

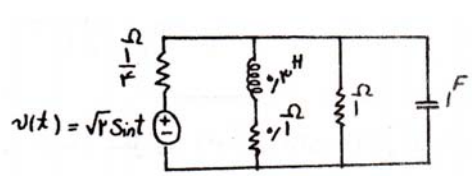
۱) با $w = \sqrt{2}$ حالت دائمی سینوسی دارد.

۲) $w \neq \sqrt{2}$ حالت دائمی سینوسی با فرکانس w دارد.

۳) با $w \neq \sqrt{2}$ حالت دائمی با فرکانس های $\sqrt{2}$ و w دارد

۴) به ازای هر w حالت دائمی سینوسی دارد.

۳-۷- درم دار شکل زیر توان راکتیو چقدر است؟



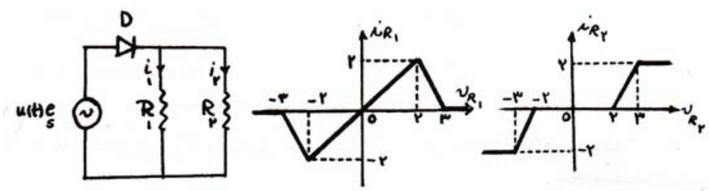
۱) ۱/۴ V ar

۲) ۰/۸ V ar

۳) ۱/۸ V ar

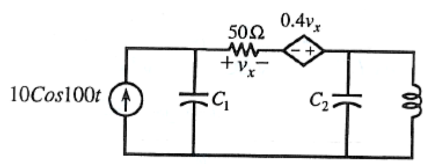
۴) ۲/۰ V ar

۳-۹- مدار نشان داده شده در شکل زیر شامل دو مقاومت غیر خطی $R_۱$ و $R_۲$ و یک منبع ولتاژ سینوسی $e_s = ۴\sin\frac{\pi}{۶}t$ و یک دیود ایده آل D می باشد. مقدار موثر شدت جریان عبوری از دیود برابر است با:



۱) $\sqrt{\frac{۸+\sqrt{۳}}{\pi}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۸+۲\sqrt{۳}}{\pi}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۸-۲\sqrt{۳}}{\pi}}$ ۴) هیچکدام

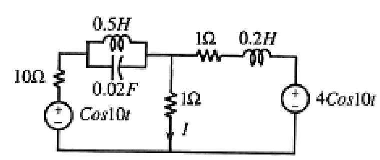
سوال ۳-۱۰: در مدار شکل مقابل $C_۱ = ۰.۴mF$ و $C_۲ = \frac{۵}{۶}mF$ و $L = ۰.۶$ هانری است. فازور ولتاژ V_x کدام است؟



۱) $۱۵۰ - j۲۰۰$ ۲) $۱۵۰ + j۲۰۰$

۳) $۲۰۰ + j۱۵۰$ ۴) $۲۰۰ - j۱۵۰$

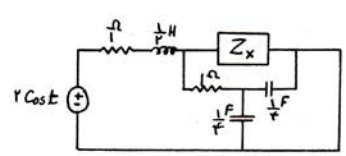
سوال ۳-۱۱: اگر مدار الکتریکی شکل زیر در حالت دائمی سینوسی باشد، شکل موج جریان I به چه صورتی خواهد بود.



۱) $\sqrt{۲}\cos(۱۰t + ۴۵^\circ)$ ۲) $\sqrt{۲}\cos(۱۰t + ۱۳۵^\circ)$

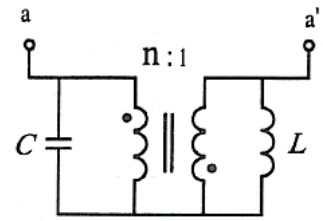
۳) $\sqrt{۲}\cos(۱۰t - ۴۵^\circ)$ ۴) $\sqrt{۲}\cos(۱۰t - ۱۳۵^\circ)$

۳-۱۲- در مدار شکل زیر Z_x را به نحوی تعیین کنید که توان متوسط در آن ماکزیمم باشد.



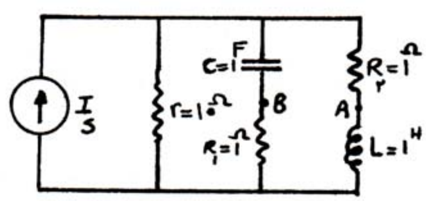
۱) ۱Ω ۲) $۱ - j\frac{۱}{۲}\Omega$ ۲ ۳) $۱ + j\frac{۱}{۲}\Omega$ ۴) $j۲\Omega$

سوال ۳-۱۳: مدار زیر از سرهای aa' با چه فرکانسی به تشدید درخواهد آمد (سلف و خازن و ترانس ایده آل هستند).



۱) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ۲) $\frac{n}{\sqrt{LC}}$ ۳) $\frac{1}{n\sqrt{LC}}$ ۴) فرکانس تشدید ندارد

۳-۱۴- کدامیک از عبارات زیر در مورد مدار شکل مقابل که در حالت سینوسی دایمی است صحیح می باشد؟



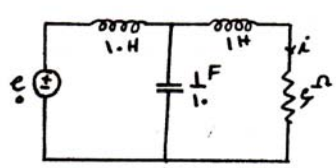
۱) افزایش فرکانس باعث افزایش $|V_{AB}|$ می گردد.

۲) افزایش فرکانس باعث افزایش $\angle V_{AB}$ می گردد.

۳) افزایش فرکانس تغییری در $|V_{AB}|$ بوجود نمی آورد.

۴) هیچکدام

۳-۱۵- در مورد مدار شکل مقابل کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟



۱) افزایش فرکانس منبع از ۲ رادیان بر ثانیه به ۳ رادیان بر ثانیه موجب نصف شدن $|i|$ می شود.

۲) افزایش فرکانس منبع از ۳ رادیان بر ثانیه به ۲ رادیان بر ثانیه موجب ۱/۵ برابر شدن $|i|$ می شود.

۳) افزایش فرکانس منبع از ۳ رادیان بر ثانیه به ۲ رادیان بر ثانیه موجب ۲/۲۵ برابر شدن $|i|$ می شود.

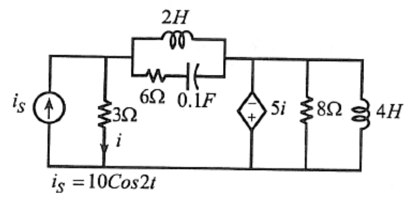
۴) افزایش فرکانس منبع از ۳ رادیان بر ثانیه به ۲ رادیان بر ثانیه موجب ۲/۱۲ برابر شدن $|i|$ می شود.

سوال ۳-۱۶: پاسخ ضربه مداری $h(t)\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+45^\circ)u(t)$ است. پاسخ حالت دائمی سینوسی این مدار به ورودی $10\cos(2t-23.4^\circ)u(t)$ برابر است با:

۱) $4.5\cos(2t-50^\circ)u(t)$ ۲) $4.5\cos(2t+50^\circ)u(t)$

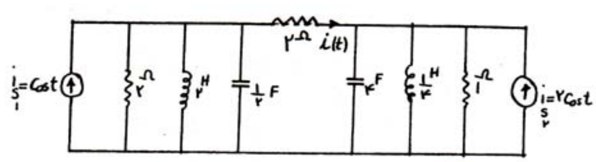
۳) $-4.5\cos(2t-50^\circ)y(t)$ ۴) $-4.5\cos(2t+50^\circ)u(t)$

سوال ۳-۱۷: مدار شکل مقابل در حالت دائمی سینوسی است. فازور جریان $i(t)$ کدام است؟



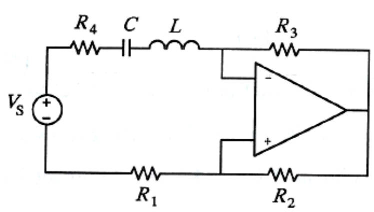
۱) $\frac{۵۰+j۶۰}{۴+j۱۷}$ ۲) $\frac{۵۰+j۶۰}{۱۷+j۴}$ ۳) $\frac{۱۷+j۴}{۵۰+j۶۰}$ ۴) $\frac{۴+j۱۷}{۵۰+j۶۰}$

۳-۱۸- مطلوبست محاسبه جریان i (t) در حالت دایمی در مدار شکل زیر:



۱) $\frac{۱}{۲}$Cost ۲) $-\frac{۸}{۵}$Cost ۳) − Cost ۴) صفر

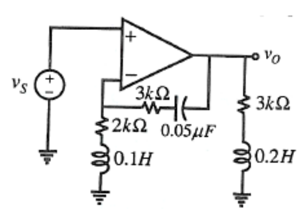
سوال ۳-۱۹: مدار شکل مقابل تحت چه شرایطی نوسان ساز می شود؟



۱) $R_۱R_۳ = R_۲R_۴$ ۲) $\frac{L}{R_۱R_۳} = \frac{R_۴C}{R_۲}$

۳) $R_۱R_۲ = R_۳R_۴$ ۴) این مدار هرگز نمی تواند نوسان ساز گردد.

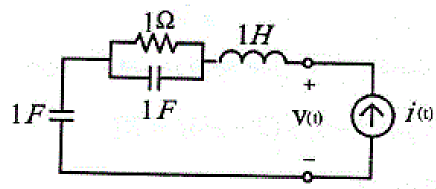
سوال ۳-۲۰: V_O در شکل مقابل کدام گزینه می باشد؟



۱) $۹.۱۲\sin(۱۰^۴۴ - ۵۷.۹^\circ)$ ۲) $-۹.۱۲\sin(۱۰^۴t + ۵۷.۹^\circ)$

۳) $-۹.۱۲\cos(۱۰^۴t + ۳۳.۱^\circ)$ ۴) $۹.۱۲\sin(۱۰^۴t + ۳۳.۱^\circ)$

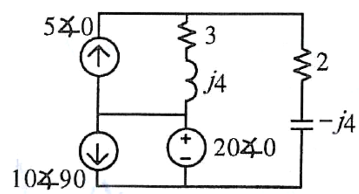
سوال ۳-۲۱: فرکانسی که سبب هم فاز شدن $v(t)$ و $i(t)$ در مدار زیر خواهد شد، برابر با کدام گزینه است؟



۱) $w=۱.۲۷\frac{rad}{sec}$ ۲) $w=۱.۱\frac{rad}{sec}$

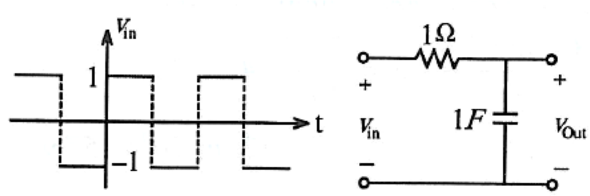
۳) $w=۰.۹\frac{rad}{sec}$ ۴) $w=۱.۵۳\frac{rad}{sec}$

سوال۳-۲۲: مدار مقابل در حالت دائمی سینوسی قرار دارد. فازور جریان گذرنده از سلف i_L برابر کدام گزینه است؟



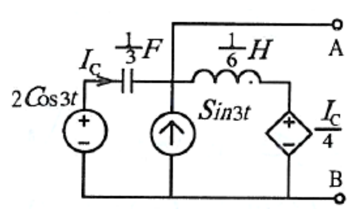
۱) $۷-j۲$ ۲) $۷+j۴$ ۳) $۲-j۴$ ۴) $۲+j۴$

سوال ۳-۲۳: دامنه ماکزیمم ولتاژ خروجی مدار مقابل به ورودی داده شده در حالت ماندگار چند ولت است؟



۱) $۱+e^{-۱}$ ۲) $e-۱$ ۳) $\frac{e-۱}{e+۱}$ ۴) $\frac{۱+e^{-۱}}{۱-e^{-۱}}$

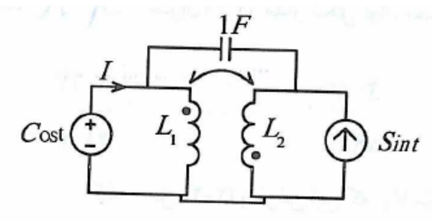
سوال ۳-۲۴: در مدار مقابل اگر شاخه A و B اتصال کوتاه شود، جریان گذرنده از A به B کدام گزینه است؟



۱) $\sqrt{۲}\cos(۳t+۴۵^\circ)$ ۲) $\sqrt{۲}\cos(۳t-۴۵^\circ)$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos(۳t+۴۵^\circ)$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos(۳t-۴۵^\circ)$

سوال ۳-۲۵: ماتریس $L=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ **ماتریس ضرایب القاء سلف های مدار شکل زیر است. جریان عبوری از منبع ولتاژ در حالت دائمی سینوسی به دست آورید؟**



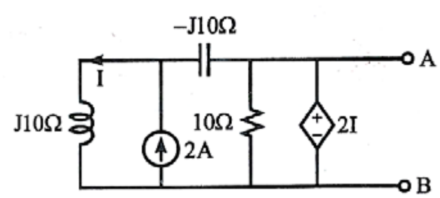
۱) $S\text{int}$

۲) $\frac{۱}{۲}\text{S int}$

۳) صفر

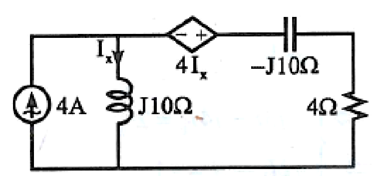
۴) $-\frac{۱}{۲}\text{S int}$

۳-۲۶) در مدار شکل زیر ولتاژ معادل تونن از دو پایانه A، B چند ولت است ؟



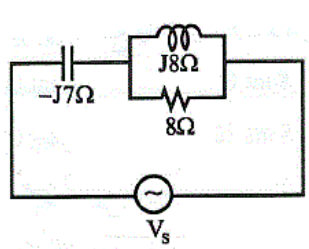
۱) $j۲۰$ ۲) $j۱۰$ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰+ j۱۰

۳-۲۷:در مدار شکل داده شده مقدار I_X بر حسب آمپر کدام است ؟



۱) ۲+ j۵ ۲) ۲− j۵ ۳) j۵ ۴) ۵+ j۲

۳-۲۸: در مدار شکل توان مصرفی مدار ۶۴ وات است اندازه V_s چند ولت است؟



۱) ۶۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۷۶

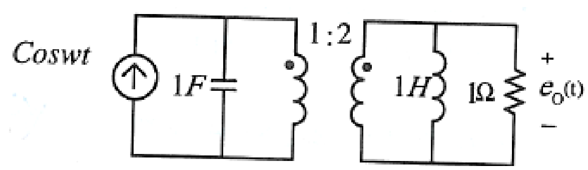
سوال ۳-۲۹: در مدار مقابل به ازای چه فرکانسی ولتاژ حالت دائمی $e_o(t)$ مـاکزیمم مـی باشـد؟ در ایـن فرکـانس $e_o(t)$ چقدر است؟

۱) $e_o(t)=\frac{۱}{۲}\cos ۲t, w=۲(Rad/sec)$

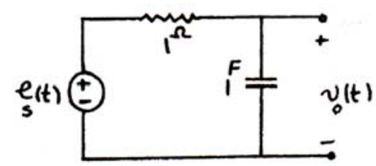
۲) $e_o(t)=\frac{۱}{۴}\cos ۲t, w=۲(Rad/sec)$

۳) $e_o(t)=\frac{۱}{۲}\cos ۴t, w=۴(Rad/sec)$

۴) $e_o(t)=\frac{۱}{۴}\cos ۴t, w=۴(Rad/sec)$



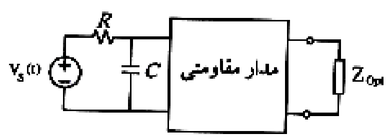
۳-۳۰- در مدار شکل زیر برای ورودی $e_s(t)=۴(\cos\frac{t}{۲}-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳}{۲}t+\frac{۱}{۵}\cos\frac{۵}{۲}t)$ مقدار موثر ولتاژ خروجـی $v_O(t)$ چیست؟



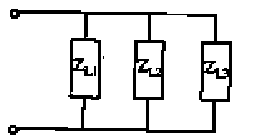
۱) ۱/۸۳ ۲) ۲/۱۲ ۳) ۲/۵۹ ۴) ۳/۷۲

سوال۳-۳۱: مدار شکل مقابل در حالت دائمی سینوسی است. کدام گزینه به عنوان Z_{Opt} (از چپ توان ماکزیمم) می تواند قابل قبول باشد؟

۱) $j\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۱-j$ ۴) $۱+j$



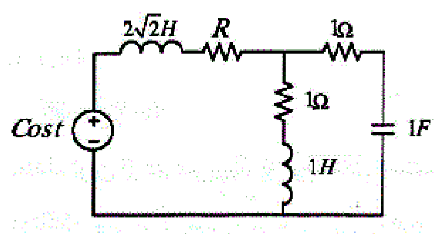
سوال ۳-۳۲: سه بار Z_{L3}, Z_{L2}, Z_{L1} به طور موازی به یک شبکه مطابق شکل زیر وصل هستند. بار Z_{L1} توان ۲۵KVAR,۲۵Kw را جذب م یکند. بار Z_{L2} توان ۱۵KVA را با ضریب توان پیشفاز ۰,۸ جذب می کند. بار Z_{L3} توان ۱۱Kw را با ضریب توان ۱ جذب می کند. ضریب توان کل بارها کدام است؟



۱) $\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$، پس فاز　　۲) $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$، پیش فاز

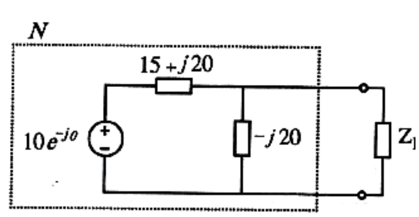
۳) $\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$، پیش فاز　　۴) $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

سوال۳-۳۳: در مدار شکل مقابل به ازاء چه مقدار R توان متوسط دریافتی آن حداکثر می شود؟



۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۹　　۴) $۱+۲\sqrt{۲}$

سوال ۳-۳۴: در مدار زیر امپدانس z_L متغیر بوده و در حالی که ماکزیمم توان حقیقی از شبکه N را جذب نماید، مقدار Z_L و همچنین مقدار توان حقیقی برابر با کدام گزینه است؟



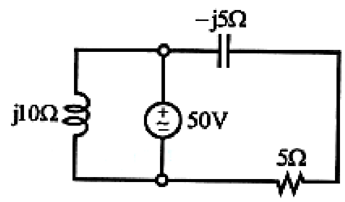
۱) $\begin{cases} z_L(jw) = ۲۲.۳ + j۱۸ \\ P_{Max} = ۱.۴۳w \end{cases}$

۲) $\begin{cases} z_L(jw) = ۲۶.۷ + j۲۰ \\ P_{Max} = ۱.۶۳w \end{cases}$

۳) $\begin{cases} z_L(jw) = -۲۶.۷ + j۱۸.۳ \\ P_{Max} = ۱.۲w \end{cases}$

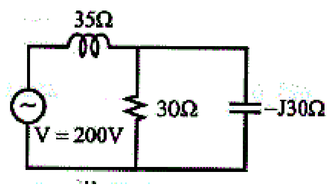
۴) $\begin{cases} z_L(jw) = ۲۶.۷ - j۲۰ \\ P_{Max} = ۱.۴۳w \end{cases}$

سوال ۳-۳۵: ضریب توان مدار شکل داده شده کدام است ؟



۱ (۱ ۰/۷(۲ ۳)صفر ۰/۸(۴

سوال ۳-۳۶: توان مصرفی مدار شکل داده شده چند وات است؟

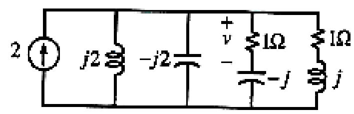


۹۶۰ (۱ ۱۲۸۰(۲ ۱۶۰۰(۳ ۱۳۳۳(۴

حل سوالات طبقه بندی شده فصل سوم

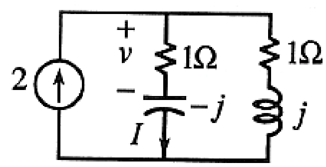
حل ۳-۱)

مدار را به حوزه فرکانس در حالت دائمی سینوسی می بریم. LC موازی در حالت تشدید هستند و یکدیگر را حذف می کنند.



$$I=\frac{(۱+j)۲}{1+j\_۱-j}=۱+j$$

$$v=1\times I=1+j=\sqrt{۲}\angle ۴۵^{o}\Rightarrow v(t)=\sqrt{۲}\mathrm{Cos}(۲t+\frac{\pi}{۴})$$



حل ۳-۳)

مدار را به حوزه فرکانس می بریم. همان طور که مشاهدهخ می گردد مدار در حالت پل وتستون قرار گرفته و لـذا سـلف ۵ میلـی هانری از مدار حذف می گردد.

$$Z_{in}=(1+j)||۲(1-j)=\frac{۴}{۱۰}(۳+j)\Rightarrow\}Z_{in}|=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۸}$$

$$|I|=\frac{|V_S|}{|Z_{inm}|}=\frac{۲.۵}{(\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۱۰})}=\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۸}$$

حل ۳-۲)

طبق رابطه (۴۱) فرکانس تشدید $Z_1(jw)$ برابر است با

$$w_r=\sqrt{\frac{۱}{LC}-(\frac{R}{L})^{۲}}$$

طبق رابطه (۴۳) فرکانس تشدید $Z_۲(jw)$ برابر است با:

$$\sqrt{\frac{۱}{LC}-(\frac{R}{L})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{LC}-\frac{۱}{(RC)^{۲}}}$$

با قرار دادن دو فرکانس فوق داریم:

$$\sqrt{\frac{۱}{LC}-(\frac{R}{L})^{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{LC}-\frac{۱}{(RC)^{۲}}} \Rightarrow \frac{R}{L}=\frac{۱}{RC} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

حل ۳-۴)

$$Z_{in}(jw) = ۴ + jw۴ + (\frac{۱}{jw}||۱) = ۴ + jw[۴ - \frac{۱}{w_{۲}+۱}]$$

قسمت موهومی را مساوی صفر قرار می دهیم.

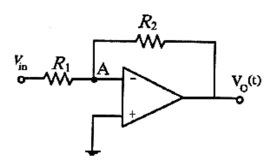
$$i_{IN}[z_{IN}] = ۰ \Rightarrow ۴ - \frac{۱}{w_{r}^{۲}+۱} = ۰ \Rightarrow w_{r}^{۲} = \frac{-۳}{۴}$$

بنابراین مدار فوق فرکانس تشدید ندارد.

حل ۳-۵) به روش تستی: در صورتی که $X_L = X_C$ شود بخش راکتانس مدار حذف می گردد.

$$Lw = \frac{۱}{Cw} \Rightarrow w = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

تحت این شرط داریم



$$\text{KCL A}: \frac{v_A - v_{in}}{R_{۱}} + \frac{v_A - v_O}{R_{۲}} = ۰, v_A = ۰ \Rightarrow \frac{v_O}{v_{in}} = k = \frac{-R_{۲}}{R_{۱}}$$

حل ۳-۶)

$$\begin{pmatrix} jw - j\frac{۲}{w} & ۱ - j\frac{۱}{w} \\ -jw + j\frac{۲}{w} & ۱ + jw - j\frac{۳}{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{۱} \\ I_{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\det P(w) = (jw - j\frac{۲}{w})(۱ +\_ jw - j\frac{۳}{w} - (۱ - j\frac{۱}{w})(-jw + j\frac{۲}{w})$$

$$\det P(w) = j(w - \frac{۲}{w})[۲ + jw - j\frac{۴}{w}]$$

فرض، فاروز $I_{۱}$ پایخ باشد.

$$I_{۱}(w) = \frac{-(1 - j\frac{۱}{w})}{\det P(w)} = \frac{-(۱ - j\frac{۱}{w})}{j(w - \frac{۲}{w})[۲ + jw - j\frac{۴}{w}]}$$

در این حالت مقدار فازور I_1 به ازای $w=\sqrt{۲}$ بی نهایت می شود و لذا مدار، حالت دائمی سینوسی ندارد.

فرض، فازور $I_۲$ پاسخ باشد.

$$I_۲(w)=jw-\frac{i(w-\frac{۲}{w})}{\det P(w)}=\frac{j(w-\frac{۲}{w})}{j(w-\frac{۲}{w})[۲+jw-j\frac{۴}{w}}$$

در این حالت مقدار فازور $I_۲$ به ازای هر w حالت دائمی سینوسی دارد.

۳-۷- گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به رابطه $S=P+jQ$، توان راکتیو (Q)، جزء موهومی توان ظاهری **S** می باشد. بنابراین ابتدا باید توانی را که منبع به مدار تحویل می دهد، بیابیم امپدانس دیده شده از دو سر منبع، عبارتست از:

$$Z=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{\frac{۱}{۰/۱+۰/۳J}+(۱+J)}=\frac{۳+۴j}{۴(۲+j)}$$

$$S=\frac{|V|^۲}{۲Z^*}=\frac{(\sqrt{۲})^۲}{۲Z^*}=\frac{۴(۲+j)}{۳+۴j}$$

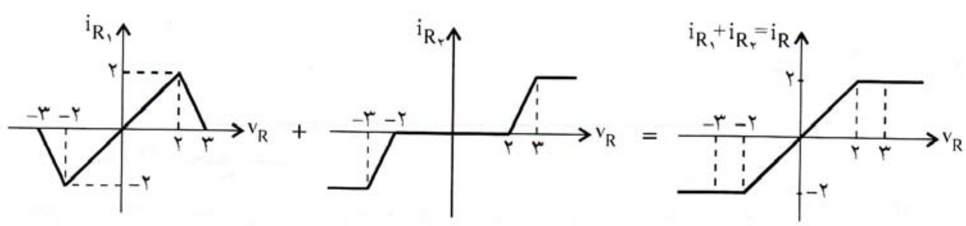
با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج، (**۴j**-۳)، خواهیم داشت:

$$S=\frac{۴(۲+j)}{۵}\xrightarrow{Q=\text{Im}\{S\}}Q=۰/۸(\text{VAR})$$

$$S=\frac{۱}{۲}VI^*=\frac{۱}{۲}Z^*|I|^۲=\frac{|V|^۲}{۲Z^*}$$

۳-۹- گزینه (۴) صحیح است.

ابتدا مشخصه ترکیب معادل مقاومت هایم وازی را می یابیم:



اما از طرفی جریان دیود نمی تواند منفی باشد. بنابراین، مشخصه جریان دیود بصورت زیر می باشد:

با توجه به اینکه $e_s = ۴\sin\frac{\pi}{۶}t$ می باشد، و با در نظر گرفتن مسخصه فوق، داریم:

$$۰ \le e_s \le ۲ \Rightarrow R = ۱ \Rightarrow i(t) = \frac{e_s(t)}{۱} = e_s(t)$$

$$۲ \le e_s \le ۴ \Rightarrow R = \infty \Rightarrow i(t) = ۰$$

بنابراین شکل موج جریان **$i_s(t)$** بصورت زیر می باشد $\left(T = \frac{۲\pi}{\pi/۶} = ۱۲\right)$

بنابراین، مقدار **RMS** جریان گذرنده از دیود، عبارتست از:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{۱}{T}\int_o^T i^۲(t)dt} = \sqrt{\frac{۱}{۱۲}\left[\int_o^۱ (۴\sin\frac{\pi t}{۶})^۲ dt + \int_۱^۵ (۲)^۲ dt + \int_۵^۶ (۴\sin\frac{\pi t}{۶})^۲ dt\right]}$$

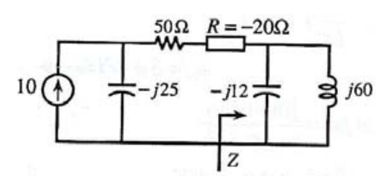
نهایتا با توجه به رابطه: $\int \sin^۲ atdt = \frac{۱}{۲}(t - \frac{۱}{۲a}\sin ۲at)$، خواهیم داشت:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{۸}{۳} - \frac{۲\sqrt{۳}}{\pi}}$$

حل ۳-۱۰)

$$X_{C_۱} = \frac{۱}{C_۱ w} = \frac{۱}{۰.۴\times۱۰^{-۳}\times۱۰۰} = ۲۵\Omega, X_{C_۲}$$
$$= \frac{۱}{\frac{۵}{۶}۱۰^{-۳}\times۱۰۰} = ۱۲\Omega, X_L Lw = ۰.۶\times۱۰۰ = ۶۰\Omega$$

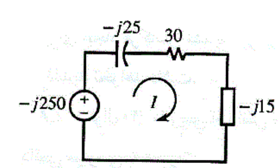
به جای منبع وابسته مقاومت قرار داده و سپس مدار را به حوزه فرکانس می بریم.



$$R = \frac{-۰.۴v_x}{(\frac{v_x}{۵۰})} = -۲۰\Omega$$

$$Z = (j۶۰)||(-j۱۲) = -j۱۵$$

$$KVL: -j۲۵I + ۳۰I - j۱۵I = -j۲۵۰$$

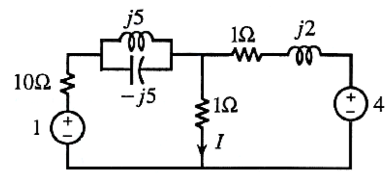


$$I = \frac{-j۲۵}{۳ - j۴} = ۴ - j۳$$

$$v_x ۵۰I = ۵۰(۴ - j۳) = ۲۰۰ - j۱۵۰$$

حل۳-۱۱)

LC موازی در حالت تشدید بوده و لذا مدار باز خواهد بود.



$$I=\frac{۴}{۲+j۲}$$

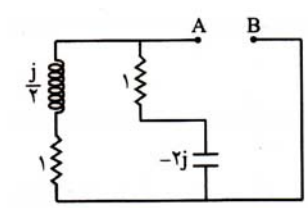
$$I=\frac{۴(۱-j)}{۴}=۱-j=\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ$$

$$I(t)=\sqrt{۲}\cos(۱۰t-۴۵^\circ)$$

۳-۱۲- گزینه (۱) صحیح است.

اگر امپدانس دیده شده از دو سر خازن را $\mathbf{Z_{AB}}$ را بنامیم، برای انتقال ماکزیمم توان به $\mathbf{Z_x}$، باید داشته باشیم: $\mathbf{Z_x = Z^*_{AB}}$.

برای یافتن $\mathbf{Z_{AB}}$ ابتدا باید منابع مستقل را صفر کنیم. پیش از اینکه مدار را به حوزه فرکانس ببریم، باید مدار را تا حد امکان ساده کنیم. بنابراین به جای ترکیب موازی خازن های $\frac{۱}{۴}F$، یک خازن $\frac{۱}{۲}F$ قرار می دهیم:



$$\Rightarrow Z_{AB}=\left(۱+\frac{j}{۲}\right)||(۱-۲j)=\frac{۲-۳j}{۲-۳j}=۱$$

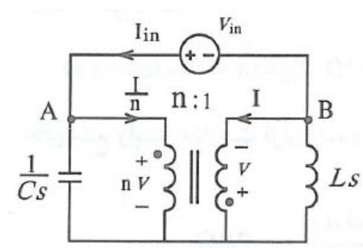
بنابراین، با توجه به رابطه $\mathbf{Z_x=Z^*_{AB}}$ باید داشته باشیم: $Z_{AB}=1(\Omega)$

حل۳-۱۳)

$$KVL: nv+v=v_{in}\Rightarrow v=\frac{v_{in}}{n+۱}$$

$$KCL\,A: \frac{I}{n}+Csnv=I_{in}$$

$$KCL\,B: \frac{-v}{Ls}+I=-I_{in}$$



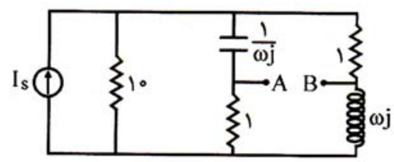
از حل معادلات فوق داریم

$$z(s)=\frac{(n+۱)^۲ Ls}{۱+LCn^۲s^۲}\Rightarrow z(jw)=\frac{j(n+۱)^۲ Lw}{۱-LCn^۲w^۲}$$

برای ایجاد فرکانس تشدید جز موهومی امپدانس باید صفر باشد. تحت این شرط مدار فوق فرکانس تشدید نخواهد داشت.

۳-۱۴- گزینه (۴) صحیح است.

مدار را در حالت ماندگار سینوسی در نظر می گیریم:



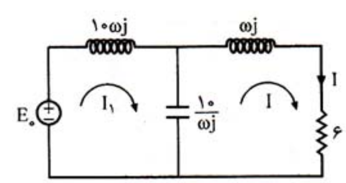
دو شاخه سمت راست مدار همانند یک پل وتستون در حال تعادل عمل می کند، زیرا:

$$\frac{۱}{wj}\times wj=۱\times۱\Rightarrow ۱=۱$$

بنابراین تغییر فرکانس، هیچ تغییری در V_{AB} (چه از نظر اندازه و چه از نظر فاز) ایجاد نمی کند. زیرا $V_{AB}=۰$ می باشد.

۳-۱۵- گزینه (۴) صحیح است.

باتدا با نوشتن معادلات مش در حوزه فرکانس، **I** را در می یابیم:



$$\begin{cases}(۱۰wj+\frac{۱۰}{wj})I_۱-\frac{۱۰}{wj}I=E_۰\ (a)\\ \frac{-۱۰}{wj}I_۱+(wj+۶+\frac{۱۰}{wj})I=۰(b)\end{cases}$$

یا محاسبه $I_۱$ از رابطه **(b)** و جایگذاری آن در رابطه **(a)**، خواهیم داشت:

$$I_۱=\frac{wj+۶+\frac{۱۰}{wj}}{\frac{۱۰}{wj}}I=\frac{-w^۲+۶wj+۱۰}{۱۰}I$$

$$\left[\left(wj+\frac{۱}{wj}\right)(-w^۲+۶wj+۱۰)-\frac{۱۰}{wj}\right]I=E_۰$$

$$\left[\left(-w^۲+۱\right)\left(-w^۲+۶wj+۱۰\right)-۱۰\right]I=E_۰\ wj$$

پس از ساده سازی عبارت فوق، خواهیم داشت:

$$I=\frac{E_{.}\ j}{w(w^{۲}-۱۱)+j۶(۱-w^{۲})}\Rightarrow |I|=\frac{|E|}{\sqrt{\left[w\left(w^{۲}-۱۱\right)\right]^{۲}+\left[۶\left(۱-w^{۲}\right)\right]^{۲}}}$$

با محاسبه مقدار **I** در فرکانس های ۲ و ۳ رادیان بر ثانیه، مسئله حل است!

$$\begin{cases}|I||_{w=۲}=\dfrac{|EJ۰|}{\sqrt{۵۲۰}}\approx ۴۳/۸۵۳|E_{.}|\times ۱۰^{-۳}\\ |I||_{w=۳}=\dfrac{|E_{.}|}{\sqrt{۲۳۴۰}}\approx ۲۰/۶۷۲|E_{.}|\times ۱۰^{-۳}\end{cases}\Rightarrow \frac{|I||_{w=۲}}{|I||_{w=۳}}\approx ۲/۱۲۱۳$$

اگر به گزینه ۳ توجه کنید، متوجه می شوید که مجبور بودیم با دقت بالایی محاسبات را انجام دهیم!!

روش دوم- تبدیل لاپلاس. فقط دقت کنید در این روش، در نهایت باید بجای **s**، مقادیر **j**۲ و **j**۳ را جایگذاری کنید (نه **s=**۲ و **s=**۳ را!!)

حل۳-۱۶)

$$h(t)=\sqrt{۲}e^{-t}[\cos t\cos ۴۵^{\circ}-\sin t\sin ۴۵^{\circ}]u(t)=\frac{۱}{۲}e^{-t}[\cos t-\sin t]u(t)$$

$$H(s)=\frac{۱}{۲}\frac{s-۱}{(s+۱)^{۲}+۱}\Rightarrow H(j۲)=\frac{۱}{۲}\frac{j۲-۱}{۲(j۲+۱)^{۲}}=۰.۴۵\angle -۲۶.۶^{\circ}$$

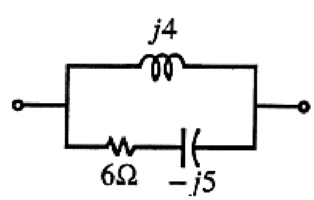
$$x(t)=۱۰\cos(۲t-۲۳.۴^{\circ})u(t)\Rightarrow X(j۲)=۱۰\angle -۲۳.۴^{\circ}$$

$$Y(j۲)=H(j۲)X(j۲)=۴.۵\angle -۵۰^{\circ}\Rightarrow y(t)=۴.۵\cos(۲t-۵۰^{\circ})u(t)$$

حل۳-۱۷)

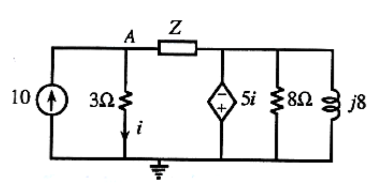
ابتدا مدار را ساده سازی می کنیم.

$$z=j۴||(۶-j۵)=\frac{۴(۵+j۶)}{۶-j}$$



برای مدار مقابل KCL می زنیم

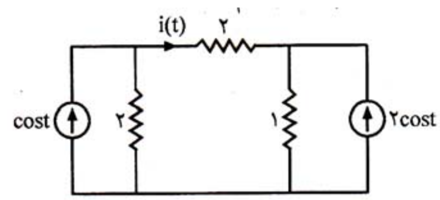
$$KCL\ A: i+\frac{۳i-(-۵i)}{۴(\frac{۵+j۶}{۶-j})}=۱۰\Rightarrow i=\frac{۵۰+j۶۰}{۱۷+j۴}$$



۳-۱۸- گزینه (۴) صحیح است.

فرکانس هر دو منبع جریان سینوسی اعمال شده، w=۱ است و این همان فرکانس تشدید مدارهای **LC** موجود در مدار است.

بنابراین در این فرکانس هر دو مدار **LC** به حالت مدار- باز در آمده و عملا مدار زیر را خواهیم داشت:



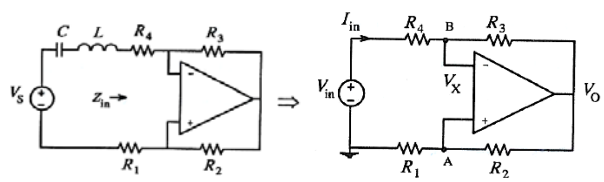
KVL در مش وسط:

$$۲i(t)+(i(t))+۲\cos t)-۲)\cos t-i(t))=۰$$

و از اینجا **i(t)=۰** بدست می آید.

حل۳-۱۹)

برای آن که مدار به نوسان ساز تبدیل شود، باید مانند مدار ی اتلاف باشد. یعنی جزء حقیقی فرکانس های طبیعی آن صفر باشد $(\sigma=۰)$ یا همه ریشه های معادله مشخصه روی محور jw باشد. به همین منظور برای ایجاد نوسان در مدار زیر باید $Z_{in}=۰$ گردد.



$$\text{KCL A}: \frac{v_x - v_o}{R_۲}\frac{v_x}{R_۱} = ۰ \Rightarrow \qquad (R_۱ + R_۲)v_x - R_۱ v_۰ = ۰$$

$$\text{KCL B}: \frac{v_x - v_۰}{R_۳} = I_{in} \Rightarrow v_x - v_۰ = R_۳ I_{in}$$

از حل معادلات (I) و (II) v_x بر حسب I_{in} به دست می آید. $v_x = \frac{-R_۱R_۳}{R_۲} I_{in}$ از طرفی

$$I_{in} = \frac{v_{in} - v_x}{R_۴}$$

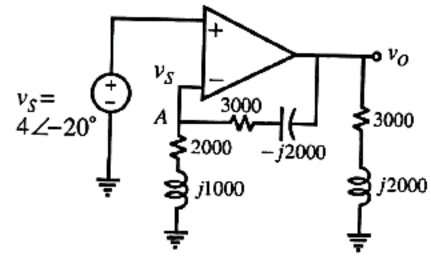
با قرار دادن v_x در رابطه فوق داریم

$$I_{in} = \frac{v_{in}}{R_۴} + \frac{R_۱R_۳}{R_۲R_۴} I_{in} \Rightarrow Z_{in} = \frac{v_{in}}{I_{in}} = \frac{R_۲R_۴ - R_۱R_۳}{R_۲}$$

$$Z_{in} = ۰ \Rightarrow R_۲R_۴ - R_۱R_۳ = ۰ \Rightarrow R_۲R_۴ = R_۱R_۳$$

حل ۳-۲۰)

مدار را به حوزه فازور می بریم



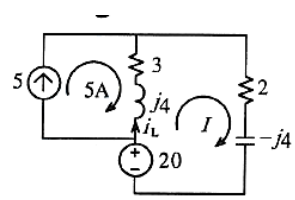
$$\text{KCL A}: \frac{v_s}{2000 + j1000} + \frac{v_s - v_o}{3000 - j2000} = 0$$

$$v_o = \frac{3 - j2 + 2 + j}{2 + j} v_s = \frac{5 - j}{2j} \times 4\angle -20^\circ$$

$$v_o = 9.12\angle -57.9^\circ \Rightarrow v_o(t) = 9.12\sin(10^4 t - 57.9^\circ)$$

حل۳-۲۲)

منبع جریان سینوسی با فازور $10\angle 90^\circ$ با منبع ولتاژ سینوسی موازی است. بنابراین می توان منبع جریان را نادیده گرفت در نتیجه مدار مقابل به دست می آید.



$$\text{KVL I}: (3 + j4)(I - 5) + (2 - j4)I = 20$$

$$I = 7 + j4$$

$$i_L = I - 5 = 2 + j4$$

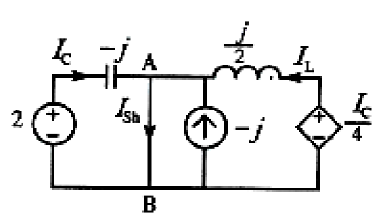
حل ۳-۲۳)

به روش تستی

ماکزیمم دامنه ورودی $\max(v_{in}) = 1V$ می باشد. بنابراین ماکزیمم دامنه خروجی نباید از یک ولت بیشتر گردد. با بررسی ۴ گزینه، در می یابیم تنها گزینه (۳) مقدار ماکزیمم ولتاژ خروجی آن از یک ولت کمتر است.

حل ۳-۲۴)

نقاط A وB را اتصال کوتاه کرده و مدار را به فرم فازوری شکل زیر در نظر می گیریم .



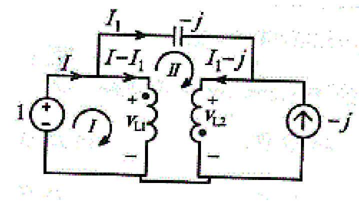
$$،I_c = \frac{2}{-j} = 2j$$

$$\text{KCLA}: I_{sh} = I_c + I_L - j = 2j - j + 1 = j + 1$$

$$I_{sh} = \sqrt{2}\angle$$

حل ۳-۲۵)

به کمک مدار مقابل با در نظر گرفتن مقادیر سلف ها و تزویج بین دو سلف، معادلات حلقه را می نویسیم.



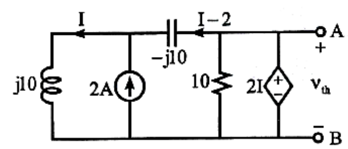
$L_۱ = ۳H , L_۲ = ۲H , M = ۱H$

$KVLI : v_{LI} = ۱$

$$\begin{aligned} & j۳(I - I_۱) - j(I_۱ - j) = ۱ \Rightarrow \\ KVLII : & -j۲(I_۱ - j) - j(I - I_۱) = ۱ \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} j۳I - j۴I_۱ = ۲ \\ j۲I_۱ - jI = -۱ \end{cases}$$

از حل این دو معادله $I = ۰$ به دست می آید.

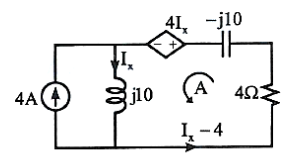
حل ۳-۲۶)



$KVL : -۲I - j۱۰(I - ۲) + j۱۰I = ۰ \Rightarrow I = j۱۰$

$V_{th} = ۲I = j۲۰(v)$

حل ۳-۲۷)



$KVLA : (۴ - j۱۰)(I_x - ۴) + ۴I_x + j۱۰I_x = ۰$

$۸I_x = ۱۶ - j۴۰ \Rightarrow I_x = ۲ - j۵(A)$

حل ۳-۲۸)

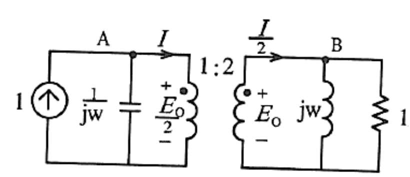
با فرض اینکه V_s مقدار موثر باشد.

$z_{in} = -j۷ + (j۸ \cap ۸) = ۴ - j۳ \Rightarrow |z_{in}| = ۵\Omega$

$P = RI_e^۲ , ۶۴ = ۴I_e^۲ \Rightarrow I_e = \pm۴A, v_s = I \times 5 = 4 \times 5 = 20v$

حل ۳-۲۹)

به کمک مدار مقابل KCL را برای نقاط A و B می نویسیم.

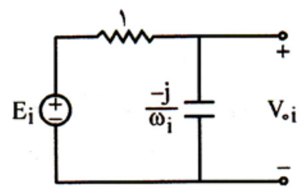


$KCL \quad A: \; jw\frac{E_۰}{۲} + I = ۱$

$KCL \quad B: -\frac{۱}{۲} + \frac{E_۰}{jw} + E_۰ = ۰$

۳-۳۰- گزینه (۳) صحیح است.

مدار دارای منابع غیر هم فرکانس می باشد. بنابراین مجبوریم ابتدا با استفاده از اصل جمع آثار، فازور ولتاژ **V** ناشی از هر یک از منابع را بطور مجزا محاسبه کنیم و سپس با استفاده از رابطه $V_{rms} = \sqrt{{V^{۲}}_{dc} + \frac{V_۱^۲ + V_۲^۲ + \ldots}{۲}}$، مقدار موثر **v(t)** را بیابیم. اگر $\mathbf{E_i}$ معرف دامنه منبع سینوسی با فرکانس $\mathbf{w_i = I}$ باشد، آنگاه با استفاده از تقسیم ولتاژ، داریم:



$$V_{oi} = \frac{E_i \times \frac{-j}{w_i}}{۱ - \frac{j}{W_i}} = \frac{-jE_i}{w_i - j} \Rightarrow |V_{oi}| = \frac{|E_i|}{\sqrt{w_i^۲ + ۱}}$$

با استفاده از رابطه اخیر، خواهیم داشت:

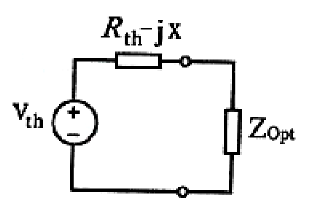
$$w = ۱/۲ \Rightarrow |V_{o۱}| = \frac{۴}{\sqrt{۱/۴ + ۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

$$w = ۳/۲ \Rightarrow |V_{o۲}| = \frac{۴/۳}{\sqrt{۹/۴ + ۱}} = \frac{۸}{۳\sqrt{۱۳}}$$

$$w = ۵/۲ \Rightarrow |V_{o۳}| = \frac{۴/۵}{\sqrt{۲۵/۴ + ۱}} = \frac{۸}{۵\sqrt{۲۹}}$$

$$V_{o_{rms}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}(V_{o۱}^۲ + V_{o۲}^۲ + V_{o۳}^۲)} = \sqrt{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۶۴}{۵} + \frac{۶۴}{۹ \times ۱۳} + \frac{۶۴}{۲۵ \times ۲۹}\right)} \Rightarrow V_{o_{rms}} = ۲/۵۹۲(V)$$

حل ۳-۳۱)



مدار معادل تونن از دو سر Z_{Opt} به فرم $Z_{opt} = R_{th} + jx$ انتخاب شود

بین گزینه ها تنها گزینه (۴) دارای چنین ویژگی است.

حل ۳-۳۲)

با توجه به مبحث توان برای مدارهای سری، موازی داریم

$$S_{L۱} = ۲۵ + j۲۵ + (K)$$

$$P_s = ۱۵(KVAR), \cos\varphi = ۰.۸ \Rightarrow s_{L۲} = P_s\varphi - jP_s \sin\varphi = ۱۲ - j۹(K)$$

$P_e = 11(KW), Cos\varphi = 1 \Rightarrow S_{L2} = P_e Cos\varphi = 11(K)$

$S = S_{L1} + S_{L2} = 16(3 + j)(K)$

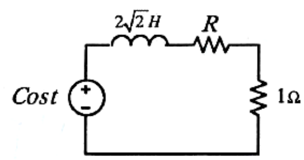
بخش موهومی توان مختلط کل مثبت گردیده است پس ضریب توان پس فاز است.

$$P.F = Cos\varphi = Cos(\tan^{-1}\frac{Q}{P}) = Cos(\tan^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

حل ۳-۳۳)

مدار مقابل شرط $R^2 = \frac{L}{C}$ را رعایت نموده است پس با یک مقاومت یک اهمی جایگزین می گردد. لذا شبکه را به صورت مقابل ساده می کنیم. مقدار مقاومت توان متوسط برابر است با

$R = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1+8} = 3\Omega$



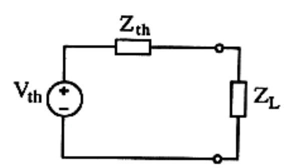
حل ۳-۳۴)

شرط این که ماکزیمم توان Z_L به بلند گو برسد این است که $Z_L = Z_{th}^*$ بنابراین:

$Z_{th} = (15 + j20)||(-j20) = 26.66 - j20$

$Z_L = Z_{th}^* = 26.66 + j20$

$$V_{th} = \frac{-j20}{15 + j20 - j20} \times 10 \Rightarrow V_L = \frac{1}{2}V_{th} = -j6.67$$



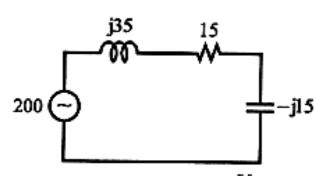
با فرض موثر بودن مقدار ولتاژ ورودی

$$P_L = \frac{|V_{Le}|^2}{Re[Z_L]} = \frac{6.67^2}{26.67} = 1.63w$$

حل ۳-۳۵) z_{in} از دو سر منبع ولتاژ

حل ۳-۳۶)

با فرض موثر بودن ورودی داریم :



$Z_{in} = 15 - j20 \Rightarrow |z_{in}| = 25\Omega$

$$I_e = \frac{V_e}{|Z_{in}|} = \frac{200}{25} = 8A \Rightarrow p15 = 15I_e^2 = 15 \times 8^2 = 960w$$

فصل چهارم: مبانی مدارهای LTI

تعاریف و خواص کلی

مدار خطی

هر مداری که هر یک از اجزایش، یک عنصر خطی و یا یک منبع مستقل باشد.

مدار تغییر ناپذیر با زمان

هر مداری که هر یک از اجزایش، یک عنصر تغییر ناپذیر با زمان و یا یک منبع مستقل باشد

با توجه به تعاریف فوق، ۴ نوع مدار وجود دارد:

- خطی و تغییر پذیر با زمان یا TV
- خطی و تغییر ناپذیر با زمان یا LTI
- غیر خطی و تغییر پذیر با زمان یا NLTV
- غیر خطی و تغییر ناپذیر با زمان یا NLTI

متغیر شبکه: هر یک از کمیت‌های ولتاژ شاخه، جریان شاخه، ترکیب خطی: ولتاژهای شاخه و جریان‌های شاخه، بار خازن، شار سلف و همچنین ترکیب خطی بار خازن‌ها و شار سلف‌ها، یک متغیر شبکه محسوب می‌شوند.

ورودی مدار: مجموعهٔ تمام ولتاژهای دو سر منابع ولتاژ مستقل و تمام جریان‌های داخل منابع جریان مستقل.

حالت اولیه: هر مجموعه‌ای از شرایط اولیه که همراه با ورودی‌ها، تمام متغیرهای مدار را به طور یکتا مشخص می‌کند.

خروجی (پاسخ) مدار: هر یک از کمیت‌های ولتاژ شاخه، جریان شاخه، بار خازن و شار سلف، می‌تواند به عنوان خروجی مدار در نظر گرفته شود.

پاسخ ورودی صفر (پاسخ عمومی یا همگن)

پاسخ شبکه‌ای که هیچ گونه ورودیی نداشته باشد. این پاسخ تابعی از شرایط اولیه و مشخصات مدار می‌باشد.

پاسخ حالت صفر (پاسخ خصوصی)

پاسخ شبکه‌ای که پیش از وارد کردن ورودی (یعنی در $t=t_0^-$)، هیچگونه حالت اولیه‌ای نداشته باشد این پاسخ فقط و فقط تابعی از ورودی مدار می‌باشد و شباهت زیادی به ورودی مدار دارد.

پاسخ حالت گذرا (میرا)

قسمتی از پاسخ یک مدار است که به ازای $t\to\infty$، صفر می‌شود.

پاسخ حالت دایمی (ماندگار)

قسمتی از پاسخ یک مدار است که به ازای $t \to \infty$، مخالف صفر است.

پاسخ کامل

پاسخ یک مدار به تحریک ورودی و شرط‌های اولیه، روی هم، پاسخ کامل نام دارد. در مدارات خطی ثابت می‌شود که پاسخ کامل، مجموعه‌ای از پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر می‌باشد:

پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر = پاسخ کامل

علاوه بر روش نمایش فوق، می‌توان پاسخ کامل را به صورت مجموعی از پاسخ‌های حالت گذرا و دایمی نیز در نظر گرفت:

پاسخ حالت دایمی + پاسخ حالت گذرا = پاسخ کامل

نکته: به هیچ وجه نمی توانیم بگوییم پاسخ گذرا همان ZIR است و پاسخ دایمی هم همان ZSR است ! تنها رابطه‌ای که می‌توانیم بین این دو گروه پاسخ ایجاد کنیم این است که:

- پاسخ دایمی فقط از ZSR ناشی می‌شود. (پاسخ حالت دایمی فقط ناشی از ورودی است)

- پاسخ گذرا از هر دو پاسخِ ZIR و ZSR ناشی می‌شود. (پاسخ گذرا هم تابع ورودی است و هم تابع شرایط اولیه)

شکل زیر این روابط را به تصویر کشیده است:

پاسخ کامل

ZSR	ZIR
پاسخ دایمی	پاسخ گذرا

نکته: پاسخ حالت دایمی دارای شکل موجی مشابه با شکل موج ورودی است.

نکته: گاهی می‌توان با طراحی مناسب مدار، حالت گذرا را کاملاً حذف کرد.

خطی بودن ZIR: در مدارات خطی، پاسخ ورودی صفر، تابعی خطی از شرایط اولیه می‌باشد.

خطی بودن ZSR: در مدارات خطی، پاسخ حالت صفر، تابعی خطی از ورودی مدار می‌باشد.

نکته: گرچه هر یک از پاسخ‌های ZIR و ZSR به طور جداگانه خطی هستند ؛ اما پاسخ کامل یک مدار، تابعی خطی از ورودی مدار نیست.

توصیف مدارها با استفاده از معادلات دیفرانسیل

به طور کلی، هر مدار (سیستم) LTI را می‌توان با استفاده از یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام با ضرایب ثابت توصیف کرد: ($y(t)$ خروجی مدار و $\omega(t)$ ورودی مدار می‌باشد.)

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dt^n} + a_1 \dfrac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \dfrac{d^m \omega}{dt^m} + b_1 \dfrac{d^{m-1}\omega}{dt^{m-1}} + \dots + b_m \omega \\ y(0)\ ,\ \dfrac{dy(0)}{dt}\ ,\ \dots\ ,\ \dfrac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} \end{cases}$$

نکته: ثوابت $a_1 \dots a_n$, و $b_0 \dots b_m$, تابع مقادیر عناصر مدار و توپولوژی مدار می‌باشند.

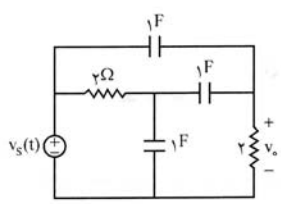
نکته: شرایط اولیهٔ $y(0), \dfrac{dy(0)}{dt}, \dots, \dfrac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$، با توجه به حالت اولیهٔ مدار تعیین می‌شوند.

روش اپراتور D: برای نوشتن معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک مدار، علاوه بر روش کلاسیک (نوشتن معادلات دیفرانسیل-انتگرال)، روش سریعتری نیز وجود دارد. در این روش، با تعریف نمودن اپراتورهای $D = \dfrac{d}{dt}\ ,\ D^{-1} = \int dt$ معادل انتگرال-دیفرانسیل حاکم بر مدار، به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. الگوریتم بدست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مدار با استفاده از روش اپراتور D، به صورت زیر است:

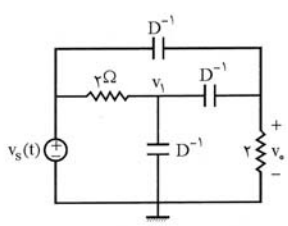
۱- جایگزینی نمودن سلف و خازن با معادله‌های اهمی آنها:

۲- نوشتن خروجی مدار بر حسب ورودی، با استفاده از روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی (مانند روش گره و مش و...)

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر $v_0(t)$ را بیابید.



با استفاده از اپراتور D، مدار به صورت زیر در می‌آید:



معادلات گرهٔ مدار، به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1 - v_S}{2} + \dfrac{v_1}{D^{-1}} + \dfrac{v_1 - v_o}{D^{-1}} = 0 \\ \dfrac{v_o}{2} + \dfrac{v_o - v_1}{D^{-1}} + \dfrac{v_o - v_S}{D^{-1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1\left(2D + \dfrac{1}{2}\right) - v_o D = \dfrac{v_S}{2} & (a) \\ -v_1 D + v_o\left(2D + \dfrac{1}{2}\right) = v_S D & (b) \end{cases}$$

با محاسبهٔ v_1 از رابطهٔ (b)، داریم:

$$v_1 = \frac{v_0\left(2D + \frac{1}{2}\right) - v_S D}{D}$$

با جاگذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (a)، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{v_0\left(2D + \frac{1}{2}\right) - v_S D}{D}\left(2D + \frac{1}{2}\right) - v_0 D = \frac{v_S}{2}$$

با ضرب نمودن طرفین در D و پس از ساده سازی، خواهیم داشت:

$$v_0\left(3D^2 + 2D + \frac{1}{4}\right) = 2v_S D^2 + v_S D$$

نهایتاً با جاگذاری $D = \frac{d}{dt}$، معادلهٔ دیفرانسیل مدار برابر خواهد بود با:

$$3v_0'' + 2v_0' + \frac{1}{4}v_0 = 2v_s'' + v_s'$$

پاسخ ورودی صفر

چون در این حالت سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل مدار صفر می‌شود، به معادلهٔ دیفرانسیل همگنی با چند جمله‌ای مشخصهٔ $s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$ می‌رسیم. بر حسب مقدار این ریشه‌ها، پاسخ ورودی صفر مدار، به یکی از اشکال زیر خواهد بود:

الف- ریشه‌ها متمایزند: ($s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_n$)

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}$$

ب- m ریشه، تکراری می‌باشد: ($s_1 = s_2 = \ldots = s_m$, $s_{m+1} \neq s_{m+2} \neq \ldots \neq s_n$)

$$y(t) = \left(k_1 + k_2 t + \ldots + k_m t^{m-1}\right)e^{s_1 t} + \sum_{i=m+1}^{n} k_i e^{s_i t}$$

همچنین وجود ریشه‌های مختلط به صورت $s_{1,2} = p \pm jq$، باعث ایجاد جمله‌ای به صورت $e^{px}\left(k_1 \cos qx + k_2 \sin qx\right)$، در پاسخ ورودی صفر y می‌شود.

پاسخ حالت صفر

چون در این حالت ورودی در مدار وجود دارد، سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل مدار مخالف صفر است و یک معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داریم که دارای جواب عمومیِ y_h و جواب خصوصیِ y_p می‌باشد. جواب عمومی با توجه به ریشه‌های معادلهٔ مشخصه بدست می‌آید و جواب خصوصی را نیز به صورت زیر حدس می‌زنیم:

حالت اول- ورودی، تابع پله $\left(\omega(t) = u(t)\right)$, $m \langle n$ می‌باشد: در این حالت y_p را یک عدد ثابت دلخواه انتخاب می‌کنیم.

حالت دوم- ورودی، تابع سینوسی $(\omega(t) = \sin \omega \circ t)$ می‌باشد: در این حالت y_p را یک تابع سینوسی با همان فرکانس $\omega_\circ$ انتخاب می‌کنیم.

حالت سوم- ورودی، چند جمله‌ای مرتبهٔ b (از t) می‌باشد: در این حالت y_p را به صورت چند جمله‌ای کامل مرتبه b انتخاب می‌کنیم. (مثلا برای b=۲، به صورت $yp = \alpha t^۲ + \beta t + y$)

حالت چهارم- ورودی، تابع ضربه $(\omega(t) = \delta(t))$ می‌باشد: در این حالت ابتدا با حل معادلهٔ مفسر، پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل را می‌یابیم. در اینجا ۳ حالت وجود داد:

۱-اگر n>m باشد: $yh(t)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل جاگذاری می‌کنیم و با مساوی قرار دادن عبارات متناظر در طرفین، ضرایب مجهول ki را بدست می‌آوریم.

۲- اگر n=m باشد: $y_h(t) + b_\circ \delta(t)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل جاگذاری می‌کنیم و با مساوی قرار دادن عبارات متناظر در طرفین، ضرایب مجهول k و bرا بدست می‌آوریم.

۳- اگر n<m باشد: $yh(t) + b_\circ\delta(t) + b_۱\delta'(t) + \ldots + b_m\delta^m(t)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل جاگذاری می‌کنیم و با مساوی قرار دادن عبارات متناظر در طرفین، ضرایب مجهول k و b را بدست می‌آوریم.

نکته: روابط زیر، در حل معادلاتی که شامل تابع ضربه و مشتقات آن هستند، کاربرد زیادی دارد:

$$\begin{cases} y(t) = e^{at} f(t)u(t) \\ y'(t) = e^{at}(f' + af)u(t) + f\delta \\ y''(t) = e^{at}(f'' + ۲af' + a^۲ f)y(t) + e^{at}(f' + af)\delta e^{at} f\delta' \\ y'''(t) = e^{at}(f''' + ۳af'' + ۳a^۲ f' + a^۳ f)u(t) + e^{at}(۳f'' + ۶af' + ۳a^۲ f)\delta \\ \qquad + e^{at}(۲f' + (۳a + ۱)f)\delta + e^{at} f\delta'' \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر یک مدار به صورت $y'' + y' + y = w' + w$ می‌باشد.

پاسخ ضربهٔ این مدار را بیابید.

از حل معادله مشخصهٔ $s^۲+s+۱=۰$، فرکانس‌های طبیعی سیستم $s_{۱,۲} = \frac{-۱}{۲} \pm j\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بدست می‌آیند و لذا پاسخ عمومی مدار برابر است با:

$$\begin{cases} y_h(t) = e^{\frac{-t}{۲}}\left(k_۱ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + k_۲ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)u(t) \\ y'_h(t) = e^{\frac{-t}{۲}}\left[\left(\frac{-k_۱}{۲} + \frac{k_۲\sqrt{۳}}{۲}\right)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \left(\frac{-k_۱\sqrt{۳}}{۲} - \frac{k_۲}{۲}\right)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right]u(t) + k_۱\delta(t) \\ y''_h(t) = e^{\frac{-t}{۲}}\left[\left(\frac{-k_۱}{۲} - \frac{k_۲\sqrt{۳}}{۲}\right)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \left(\frac{k_۱\sqrt{۳}}{۲} - \frac{k_۲}{۲}\right)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right]u(t) \\ \qquad + \left(-k_۱ + k_۲\sqrt{۳}\right)\delta(t) + k_۱\delta'(t) \end{cases}$$

با جاگذاری روابط فوق در معادلهٔ دیفرانسیل، و با توجه به اینکه پاسخ ضربهٔ مدار خواسته شده $(\omega(t) = \delta(t))$، داریم:

$$\left(k_۱ - k_۱ + k_۲\sqrt{۳}\right)\delta + k_۱\delta' = \delta' + \delta \Rightarrow \begin{cases} k_۱ = ۱ \\ k_۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

لذا پاسخ مدار برابر خواهد بود با:

$$y(t) = e^{\frac{-t}{۲}}\left(\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)u(t)$$

مثال: از مثال فصل مدارات مرتبه دو، به خاطر دارید که حل معادله دیفرانسیل $۲i'' + i' + i = \delta'' + \delta$، دارای پاسخ ضربه‌ای به فرم کلی:

$$i(t) = e^{\frac{-t}{۴}}\left(A\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴} + B\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right)u(t) + C\delta(t)$$

بود. ضرایب مجهول A، B و C را بیابید.

برای یافتن ضرایب مجهول A، B و C کافیست فرم کلی پاسخ ضربه را در معادلهٔ دیفرانسیل جاگذاری کنیم:

$$M = k\sqrt{L_۱L_۲} = ۰.۶\sqrt{۴.۵\times۲} = ۱.۸H$$

$$w_T = \frac{۱}{۲}L_۱i_۱^۲ - Mi_۱i_۲ + \frac{۱}{۲}L_۲i_۲^۲$$

$$w_T = \frac{۱}{۲}\times۴.۵\times۴^۲ - ۱.۸\times۴\times۲ + \frac{۱}{۲}\times۲\times۲^۲ = ۲۵.۶J$$

با جاگذاری روابط فوق در معادلهٔ دیفرانسیل $۲i'' + i' + i = \delta'' + \delta$، داریم:

$$e^{\frac{-t}{۴}}\left(\frac{-۶A-۲B\sqrt{۷}+۲B\sqrt{۷}-۲A+۸A}{۸}\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right.$$

$$\left.+\frac{-۶B+۲A\sqrt{۷}-۲A\sqrt{۷}-۲B+۸B}{۸}\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}\right)u(t)$$

$$+\frac{B\sqrt{۷}-A-۲A+C}{۲}\delta(t)+(۲A+C)\delta'(t)+۲C\delta''(t)=\delta''(t)+\frac{\delta(t)}{۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{B\sqrt{۷}-۳A+C}{۲}\delta(t)+(۲A+C)\delta'(t)+۲C\delta''(t)=\delta''(t)+\frac{\delta(t)}{۲}$$

نکته: همانطور که می‌بینیم، ضرایب توابع سینوس و کسینوس صفر شده اند. البته اگر کمی دقت می‌کردیم، این موضوع از همان ابتدا هم قابل پیش بینی بود، زیرا سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل فقط شامل توابع ضربه است و بنابراین اگر پاسخ خصوصی را درست حدس زده باشیم، ضرایب سینوس و کسینوس باید صفر شوند. (با استفاده از این نکته، حل این گونه مسایل بسیار ساده تر و کوتاهتر صورت می‌پذیرد !)

با برابر گذاشتن ضرایب δ، δ' و δ'' در طرفین، ضرایب مجهول A، B و C به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} ۲C=۱ \\ ۲A+C=۰ \\ \dfrac{B\sqrt{۷}-۳A+C}{۲}=\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\dfrac{۱}{۲} \\ A=\dfrac{۱-}{۴} \\ B=\dfrac{-۱}{۴\sqrt{۷}} \end{cases}$$

بنابراین پاسخ ضربهٔ مدار عبارتست از:

$$i(t)=\frac{-۱}{۴}e^{\frac{-t}{۴}}\left(\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴}t+\frac{۱}{\sqrt{۷}}\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}\right)u(t)+\frac{۱}{۲}\delta(t)$$

نتایجی از LTI بودن سیستم ها

چنانچه N مداری LTI با ورودی x(t) و پاسخ حالت صفر y(t) باشد، هر عملگر خطی که روی ورودی این سیستم عمل کند، روی خروجی سیستم نیز عمل می‌کند:

$$x(t)\rightarrow LTI \rightarrow y(t)$$

عملگر مشتق:
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \to LTI \to \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

عملگرد انتگرال:
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \to LTI \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$

تبدیل فوریه:
$$F.T.\{x(t)\} \to LTI \to F.T.\{y(t)\}$$

تبدیل لاپلاس:
$$L\{x(t)\} \to LTI \to L\{y(t)\}$$

مثال: در یک مدار LTI، به ازای ورودی $x(t)$، پاسخ حالت صفر $y(t)$، بدست آمده است.

پاسخ ضربهٔ این مدار در هر یک از حالت زیر بیابید.

الف-
$$x(t) = e^{-۲t}u(t) \to LTI \to y(t) = \left(e^{-t} - e^{-۲t}\right)u(t)$$

با استفاده از LTI بودن سیستم و قضیهٔ جمع آثار، باید کاری کنیم که در ورودی سیستم، فقط تابع $\delta(t)$ ایجاد شود:
$$x'(t) = -۲e^{-۲t}(t) + \delta(t) \to LTI \to y'(t) = \left(-e^{-t} + ۲e^{-۲t}\right)u(t)$$

با توجه به قضیهٔ جمع آثار، می‌توانیم بنویسیم:
$$x'(t) + ۲x \geq (t) = \delta(t) \to y'(t) + ۲y(t) = h(t) = e^{-t}u(t)$$

ب-
$$x(t) = \cos tu(t) \to LTI \to y(t) = e^{-t}u(t)$$

با استفاده از LTI بودن سیستم و قضیهٔ جمع آثار، باید کاری کنیم که در ورودی سیستم، فقط تابع $\delta(t)$ ایجاد شود:
$$x'(t) = -\sin tu(t) + \delta(t) \to LTI \to y'(t) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$
$$x''(t) = -\cos tu(t) + \delta'(t) \to LTI \to y''(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

با توجه به قضیهٔ جمع آثار خواهیم داشت:
$$x'''(t) + x(t) = \delta'(t) \to LTI \to h'(t) = y''(t) + y(t) = ۲e^{-t}u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه مدار برابر خواهد بود با:
$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} h'(\tau)\,d\tau = ۲\left(-e^{-t} + ۱\right)u(t) - u(t) + \delta(t)$$

ج-
$$x(t) = (\cos t + \sin t)u(t) \to LTI \to y(t) = \sin tu(t)$$

با استفاده از LTI بودن سیستم و قضیهٔ جمع آثار، باید کاری کنیم که در ورودی سیستم، فقط تابع $\delta(t)$ ایجاد شود:
$$x'(t) = (-\sin t + \cos t)u(t) + \delta(t) \to LTI \to y'(t) = \cos tu(t)$$
$$x''(t) = (-\cos t - \sin t)u(t) + \delta(t) + \delta'(t) \to LTI \to y''(t) = -\sin tu(t) + \delta(t)$$
$$x''(t) + x(t) = \delta'(t) + \delta(t) \to LTI \to y''(t) + y(t) = h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

نهایتاً از حل این معادله دیفرانسیل، خواهیم داشت:

$$h'(t)+h(t)=\delta(t)\Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$$

انتگرال کانولوشن

کانولوشن دو سیگنال دلخواه $x(t)$ و $y(t)$، بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

قضیه: چنانچه $h(t)$ پاسخ ضربهٔ یک مدار LTI باشد، پاسخ حالت صفر $y(t)$ این مدار به ورودی دلخواه $w(t)$ برابر است با:

$$y(t)=w(t)*h(t)$$

نکته: از آنجایی که مدارهای الکتریکی سیستم‌های قابل ساخت می‌باشند، جزو سیستم‌های علی به شمار می‌روند. بنابراین چنانچه ورودی $w(t)$ در لحظهٔ $t=t_0$ به مدار اعمال شود، پاسخ ضربهٔ $h(t)$ پیش از این لحظه صفر خواهد بود و در نتیجه انتگرال کانولوشن در مدارهای الکتریکی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y(t)=w(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t-t}w(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{\infty}w(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

نکته: در سوالات تستی معمولاً محاسبهٔ پاسخ حالت صفر، در یک لحظهٔ خاص مطلوبست و در نتیجه در این نوع سوالات، محاسبهٔ انتگرال کانولوشن به زمان زیادی نیاز ندارد.

تحلیل مدارهای دارای تزویج مغناطیسی

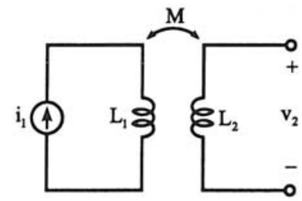
بر اثر عبور جریان از سیم پیچ‌های مدار شار مغناطیسی در اطراف آن ایجاد می‌گردد. تغییرات شار باعث ایجاد القای ولتاژ الکتریکی بر روی دیگر سیم پیچ‌های مجاور سیم پیچ اول می‌گردد. همین امر سبب شده در تحلیل سلف‌های تزویج شده ولتاژ القا شده نیز مدنظر قرار گیرد.

در این فصل خواص و ویژگی سلف‌های تزویج شده و نحوه‌ی تحلیل آن مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان فصل خواص ترانسفورماتور ایده آل که حالت خاصی از سلف‌های تزویج شده است، اشاره شده است.

سلف‌های تزویج شده

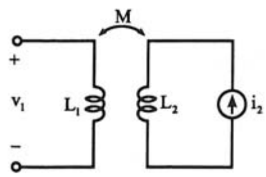
دو سیم پیچ که در مجاورت یکدیگر مطابق شکل قرار گیرند، در نظر بگیرید. عبور جریان i_1 از سیم پیچ اول با اندوکتانس L_1، باعث ایجاد میدان مغناطیسی در اطراف آن می‌گردد در صورتی که سیم پیچ دوم با اندوکتانس L_2 در کنار آن باشد، شار مغناطیسی از آن هم می‌گذرد. با تغییر شار مغناطیسی نسبت به زمان، در سیم پیچ دوم هم ولتاژی القا می‌شود که با آهنگ تغییرات جریان سیم پیچ اول متناسب است.

$$v_{۲}(t)=M\frac{di_{۱}}{dt}$$



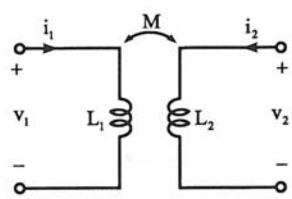
اگر مدار سیم پیچ دوم نیز بسته شود، جریان $i_{۲}$ در سیم پیچ دوم جاری شده و آن نیز مانند سیم پیچ اول شار مغناطیسی به وجود می‌آورد که روی سیم پیچ اول تأثیر می‌گذارد.

$$v_{۱}(t)M\frac{di_{۲}}{dt}$$



در روابط فوق M ضریب تزویج متقابل بین دو سیم پیچ است و واحد آن هانری است. برای دو سیم پیچ مقابل به ازای جریان‌های ورودی $i_{۱}$ و $i_{۲}$ داریم

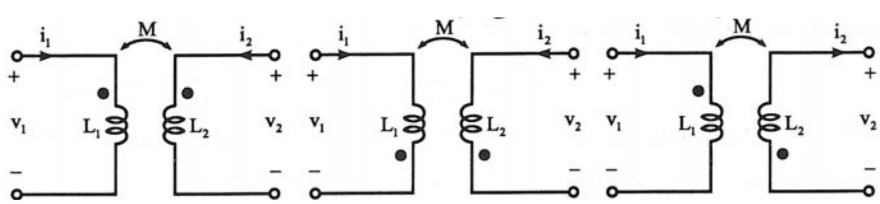
$$v_{۱}=L_{۱}\frac{di_{۱}}{dt}\pm M\frac{di_{۲}}{dt}$$
$$v_{۲}=\pm M\frac{di_{۱}}{dt}+L_{۲}\frac{di_{۲}}{dt}$$



همانطور که مشاهده می‌کنید بسته به این که سیم پیچ‌ها چگونه پیچیده شده باشند ضریب تزویج متقابل M می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. به کمک قرارداد نقطه‌ای علامت M را تعیین می‌کنیم.

قرارداد نقطه‌ای

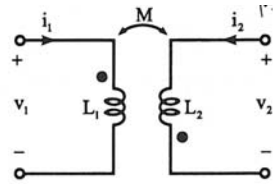
در صورتی که جریان‌های $i_{۱}$ و $i_{۲}$ با هم از سر نقطه دار سلف‌های تزویج وارد (یا خارج) شوند علامت M مثبت است در غیر این صورت علامت M منفی خواهد شد.



برای هر سه شکل بالا روابط زیر صادق است.

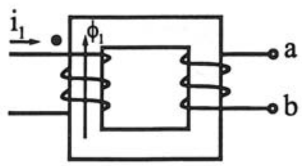
$$\begin{aligned} v_{۱}&=L_{۱}\frac{di_{۱}}{dt}+M\frac{di_{۲}}{dt}\\ v_{۲}&=M\frac{di_{۱}}{dt}+L_{۲}\frac{di_{۲}}{dt}\end{aligned}\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}v_{۱}\\ v_{۲}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}L_{۱} & M\\ M & L_{۲}\end{pmatrix}}_{L}\begin{pmatrix}\frac{di_{۱}}{dt}\\ \frac{di_{۲}}{dt}\end{pmatrix} \qquad (۱)$$

L ماتریس ضرایب خود القا می‌باشد. برای دو سلف تزویج شده مقابل داریم



$$\begin{aligned} v_1 &= L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

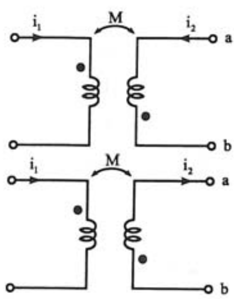
شکل مقابل دو سیم پیچ را نشان می‌دهد که بر روی یک هسته پیچیده شده اند. برای تعیین علامت M از قانون دست راست کمک می‌گیریم.



اگر انگشتان دست راست در جهت عبور جریان بسته شود، انگشت شست جهت شار داخل سیم پیچ را نشان می‌دهد.

- اگر شارها هم راستا باشند، M مثبت خواهد شد.
- اگر شارها هم راستا نباشند، M منفی خواهد شد.

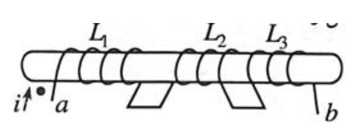
برای شکل فوق



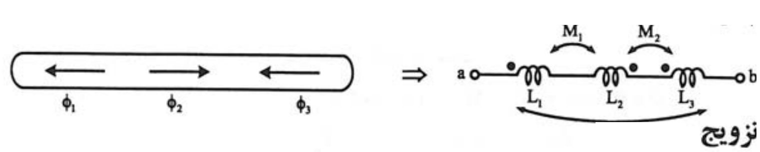
a: اگر جریان $i_۲$ از سر a وارد گردد، آنگاه شارهای ø۱ و ø۲ خلاف جهت هم و M منفی خواهد شد.

b: اگر جریان $i_۲$ از سر a خارج گردد، آنگاه شارهای ø۱ و ø۲ هم راستا و M مثبت خواهد شد.

مثال ۱: مدل مداری سیم پیچ‌های تزویج شده شکل مقابل را رسم نمائید.



حل: سیم پیچ‌ها سری هستند با رعایت قاعده دست راست داریم



ضریب تزویج

پارامتری است که به کمک آن می‌تواند درجه‌ی تزویج بین دو سیم پیچ را سنجید. ضریب تزویج با رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$k=\frac{|M|}{\sqrt{L_۱L_۲}} \qquad O\le k\le ۱ \qquad (۳)$$

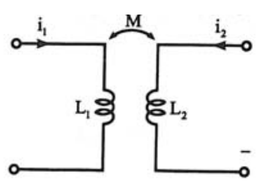
- هرچه دو سلف از هم دورتر باشند k کوچک تر و به سمت صفر میل می‌کند.

- هرچه دو سلف نزدیک تر باشند و نوع پیچش و جهت آنها به ایجاد یک شار مغناطیسی مشترک بیشتر کمک کند، k بزرگتر می‌شود.

- در صورتی که k به یک نزدیک شود بین دو سیم پیچ تزویج شدید ایجاد می‌شود.

انرژی ذخیره شده

انرژی ذخیره شده در یک سلف تزویج شده دارای سه جمله است یعنی انرژی ذخیره شده در هر یک از سلف‌ها ($\frac{۱}{۲}Li^۲$) و انرژی ذخیره شده در تزویج متقابل ($\pm Mi_۱i_۲$) پس



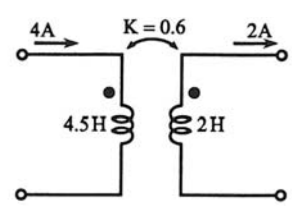
$$w_T=\frac{۱}{۲}L_۱i_۱^۲\pm Mi_۱i_۲+\frac{۱}{۲}L_۲i_۲^۲ \qquad (۴)$$

توجه ۱: رابطه (۴) برای انرژی لحظه‌ای دو سلف تزویج شده هم صادق است.

توجه ۲: به ازای $M>۰$ انرژی کل ذخیره شده در حالت هایی که به ترتیب جریان $i_۱$ به تنهایی و جریان $i_۲$ به تنهایی جاری شود بزرگتر است.

مثال ۲: انرژی ذخیره شده در مدار مقابل چند ژول است؟

حل:



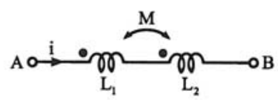
$$M=k\sqrt{L_۱L_۲}=۰.۶\sqrt{۴.۵\times ۲}=۱.۸H$$

$$w_T=\frac{۱}{۲}L_۱i_۱^۲-Mi_۱i_۲+\frac{۱}{۲}L_۲i_۲^۲$$

$$w_T=\frac{۱}{۲}\times ۴.۵\times ۴^۲-۱.۸\times ۴\times ۲+\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲^۲=۲۵.۶J$$

اتصال سری سلف تزویج شده

برای شکل مقابل روابط زیر صادق اند.

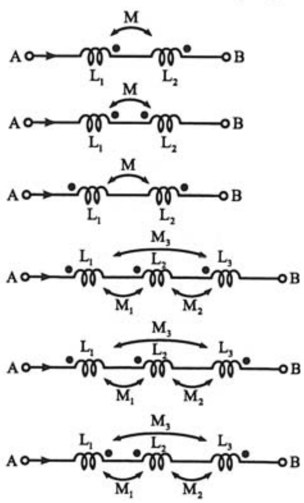


$$i = i_۱ = i_۲$$
$$\phi_۱ = L_۱ i_۱ + M i_۲ \Rightarrow \phi_۱ = (L_۱ + M) i$$
$$\phi_۲ = L_۲ i_۲ + M i_۱ \Rightarrow \phi_۲ = (L_۲ + M) i$$

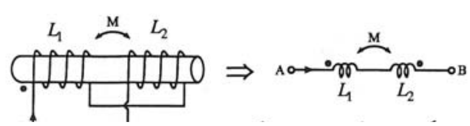
آنگاه اندوکتانس دیده شده از دو سر A، B برابر است با

$$\varphi = \varphi_۱ + \varphi_۲ = (L_۱ + M) i + (L_۲ + M) i$$
$$\varphi = (L_۱ + L_۲ + ۲M) i \Rightarrow L_{AB} = L_۱ + L_۲ + ۲M \qquad (۵)$$

به طور مشابه



$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ + ۲M \qquad (۶)$$
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ - ۲M \qquad (۷)$$
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ - ۲M \qquad (۸)$$
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ + L_۳ + ۲M_۱ + ۲M_۲ + ۲M_۳ \qquad (۹)$$
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ + L_۳ + ۲M_۱ - ۲M_۲ - ۲M_۳ \qquad (۱۰)$$
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ + L_۳ - ۲M_۱ - ۲M_۲ + ۲M_۳ \qquad (۱۱)$$



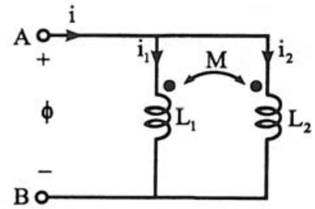
$$L_{AB} = L_۱ + L_۲ - ۲M$$

نکته ۱: دو سلف تزویج شده مقابل همانند یک اتصال کوتاه عمل می‌کند.

اتصال موازی سلف‌های تزویج شده

برای شکل مقابل روابط زیر صادق‌اند

(×)



$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$
$$\phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

با عمل معکوس، جریان‌های i_1 و i_2 را بر حسب شارهای ϕ_1 و ϕ_2 محاسبه می‌کنیم.

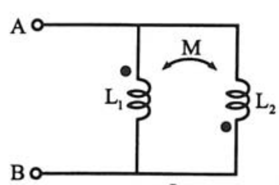
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{pmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

از طرفی

(××)

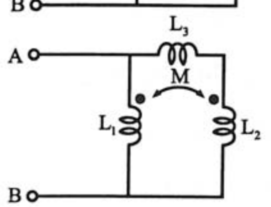
$$i = i_1 + i_2$$

با قرار دادن $i1$ و $i2$ در رابطه (××) با رعایت رابطه (×) اندوکتانس معادل از دو سر A، B برابر است با



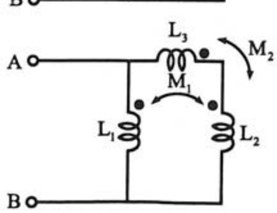
$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \qquad (12)$$

به طور مشابه

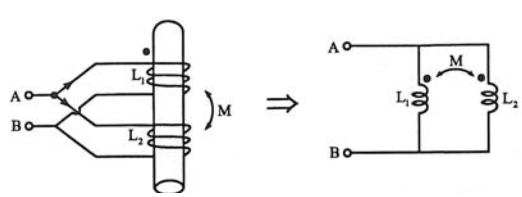


$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \qquad (13)$$

$$L_{AB} = \frac{L_1 L_a - M^2}{L_1 + L_a - 2M} \qquad (14)$$
$$La = L_2 + L_3$$



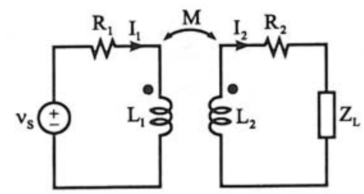
$$L_{AB} = \frac{L_1 L_a - M_1^2}{L_1 + L_a - 2M_1} \qquad (15)$$
$$L_a = L_2 + L_3 - 2M_2$$



$$L_{AB} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_i + L_2 - 2M}$$

امپدانس ورودی سلف‌های تزویج شده

$$\text{KVL1}: R_1 I_1 + jwL_1 I_1 - jwMI_2 = V_s$$
$$\text{KVL2}: R_2 I_2 + Z_L I_2 + jwL_2 I_2 - jwMI_1 = 0$$
$$\begin{cases} (R_1 + jwL_1) I_1 - jwMI_2 = V_s \\ -jwMI_1 + (R_2 + jwL_2 + Z_L) I_2 = 0 \end{cases}$$



فرض کنید

$$Z_{11} R_1 + jwL_1, Z_{22} = R_2 + jwL_2 + Z_L$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول داریم

$$Z_{in} = \frac{V_S}{I_1} \Rightarrow Z_{in} = Z_{11} + \frac{w^2 M^2}{Z_{22}} \qquad (۱۶)$$

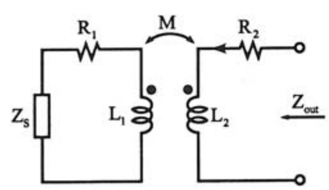
در رابطه (۱۶) اگر ضریب تزویج متقابل صفر باشد، آن گاه

$$M = 0 \Rightarrow Z_{in} = R_1 + jwL_1$$

امپدانس خروجی سلف‌های تزویج شده

$$Z_{11} = R_1 + jwL_1 + Z_S, Z_{22} = R_2 + jwL_2$$

$$Z_{out} = Z_{22} + \frac{w^2 M^2}{Z_{11}} \qquad (۱۷)$$

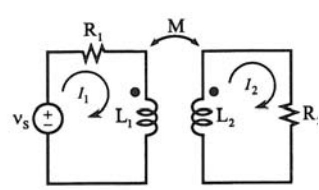


توجه ۳: مکان نقاط سلف‌های تزویج شده تأثیری در تعیین Z_{in} و Z_{out} ندارد.

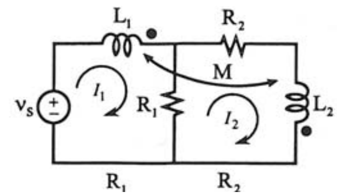
تحلیل مدارهای دارای تزویج مغناطیسی

با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر در حالت دائمی سینوسی برای چند مدار، معادله نویسی می‌کنیم.

$$\text{KVL 1}: \; R_1 I_1 + jwL_1 I_1 - jwMI_2 = V_S$$
$$\text{KVL 2}: \; jwL_2 I_2 - jwMI_1 + R_2 I_2 = 0$$

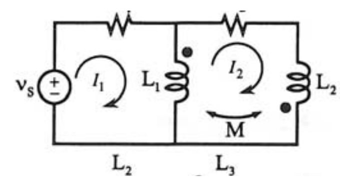


در معادلات فوق جریان $I_۱$ از سر نقطه دار وارد و جریان $I_۲$ از سر نقطه دار خارج می‌گردد. پس M منفی است.



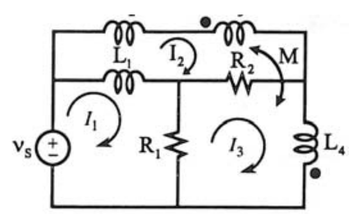
$$KVL\ ۱: jwL_۱I_۱ + jwMI_۲ + R_۱(I_۱ - I_۲) = V_S$$
$$KVL\ ۲: R_۲I_۲ + jwL_۲I_۲ + jwMI_۱ + R_۱(I_۲ - I_۱) = ۰$$

در معادله‌های فوق دو جریان از سر بدون نقطه وارد می‌شوند پس M مثبت است.



$$KVL\ ۱: R_۱I_۱ + jwL_۱(I_۱ - I_۲) - jwMI_۲ = V_S$$
$$KVL\ ۲: R_۲I_۲ + jwL_۲I_۲ - jwM(I_۱ - I_۲)$$
$$+ jwL_۱(I_۲ - I_۱) + jwMI_۲ = ۰$$

در رابطه مثال فوق به علامت M توجه فرمائید.



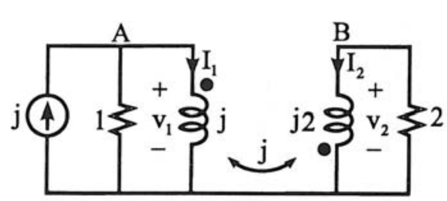
$$KVL\ ۱: jwL_۱(I_۱ - I_۲) + R_۱(I_۱ - I_۳) = V_S$$
$$KVL\ ۲: jwL_۲I_۲ + jwL_۴I_۲ - jwMI_۳$$
$$+R_۲(I_۲ - I_۳) + jwL_۱(I_۲ - I_۱) = ۰$$
$$KVL\ ۳: R_۲(I_۳ - I_۲) + jwL_۴I_۳ - jwMI_۲ + R_۱(I_۳ - I_۱) = ۰$$

در مثال فوق اندوکتانس‌های $L_۱$ و $L_۲$ دارای تزویج نمی باشند.

توجه ۴: در مدارهای دارای تزویج متقابل در حالتی که نیاز به زدن KCL و تحلیل گره باشد، در مرحله اول همواره جریان سلف‌های تزویج شده را بر حسب ولتاژ دو سر آنها به دست آورد، و بعد KCL می‌زنیم.

مثال۳: در مدار مقابل معادلات گره را بنویسید.

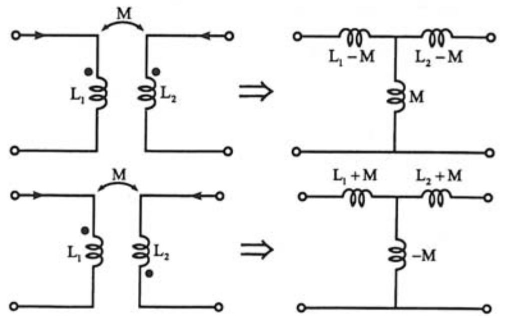
حل:



$$\begin{cases} jI_۱ - jI_۲ = V_۱ & I_۱ = -j۲V_۱ - jV_۲ \\ -jI_۱ + j۲I_۲ = V_۲ & I_۲ = -jV_۱ - jV_۲ \end{cases}$$
$$KCLA: V_۱ + I_۱ = j \Rightarrow \quad (۱ - j۲)V_۱ - jV_۲ = j$$
$$KCLB: \frac{V_۲}{۲} + I_۲ = ۰ \Rightarrow -jV_۱ + \left(\frac{۱}{۲} - j\right)V_۲ = ۰$$

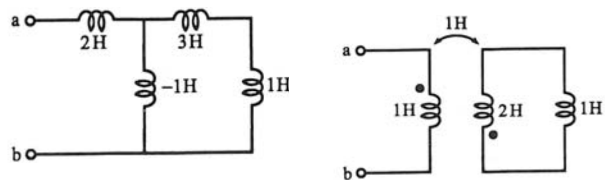
مدار معادل T سلف‌های تزویج شده

در تحلیل مدارهای دارای سلف‌های تزویج شده مدار معادل‌های شکل مقابل مفید می‌باشند. در مدار معادل تزویج مغناطیسی حذف می‌گردد. ضمناً در مدار معادل احتمال دارد مقادیر منفی نیز ظاهر گردد.



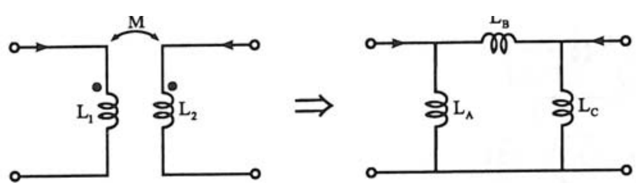
مثال ۴: در مدار مقابل اندوکتانس دیده شده از دو سر a، b چند هانری است؟

حل: معادل سلف‌های تزویج شده را قرار می‌دهیم.

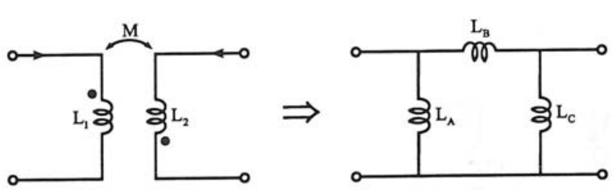


$$L_{ab} = ۲ + \left[(۳+۱)\|(-۱)\right] = \frac{۲}{۳}\mathrm{H}$$

مدار معادل π سلف‌های تزویج شده



$$L_A = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{L_۲ - M}, L_B = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{M}, LC = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{L_۱ - M}$$

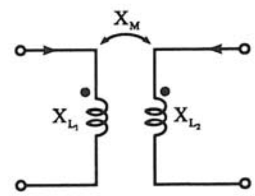


$$L_A = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{L_۲ + M}, L_B = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{-M}, LC = \frac{L_۱L_۲ - M^۲}{L_۱ + M}$$

توجه ۵: مدار معادل π یک شبکه پیچیده است که کاربرد زیادی هم ندارد.

روابط تزویج بر حسب راکتانس

برای مدار مقابل در حالت دائمی سینوسی با رعایت شرایط اولیه صفر داریم



$$X_L = Lw, X_M = Mw$$

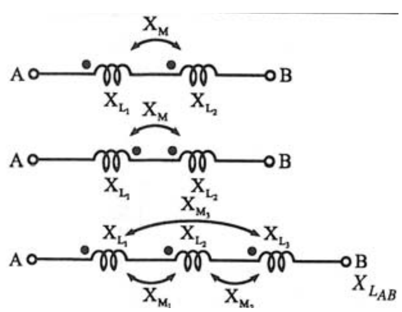
روابط دو سلف تزویج شده

$$\begin{cases} V_1 = jX_{L1}I_1 + jX_M I_2 \\ V_2 = jX_M I_1 + jX_{L2} I_2 \end{cases} \qquad (۱۸)$$

ضریب تزویج شده

$$k = \frac{|X_M|}{\sqrt{X_{L1}X_{L2}}} \qquad 0 \le k \le 1 \qquad (۱۹)$$

اتصال سری

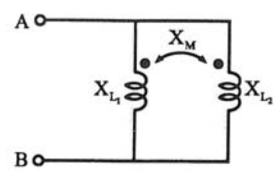


$$X_{LAB} = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M \qquad (۲۰)$$

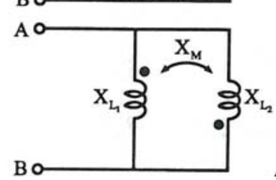
$$X_{LAB} = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M \qquad (۲۱)$$

$$X_{LAB} = X_{L1} + X_{L2} + X_{L3} + 2X_{M1} + 2X_{M2} + 2X_{M3} \qquad (۲۲)$$

اتصال موازی

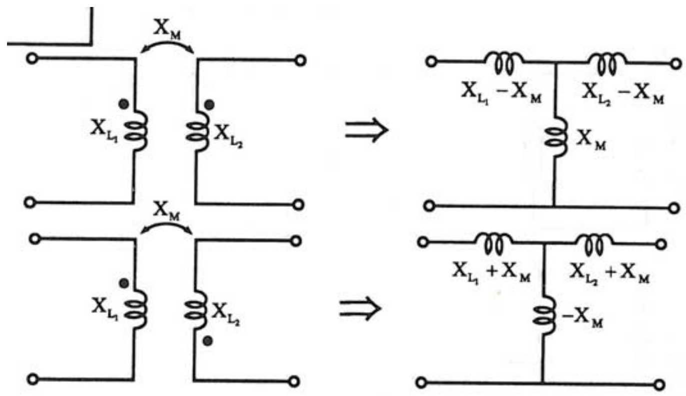


$$X_{LAB} = \frac{X_{L1}X_{L2} - X_M^2}{X_{L1} + X_{L2} - 2X_M} \qquad (۲۳)$$



$$X_{LAB} = \frac{X_{L1}X_{L2} - X_M^2}{X_{L1} + X_{L2} + 2X_M} \qquad (۲۴)$$

مدار معادل T

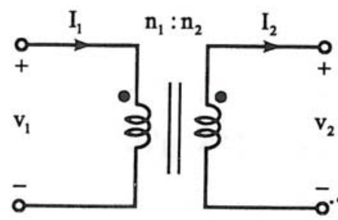


ترانسفورماتور ایده آل

به دو سلف تزویج شده که به دور یک هسته مغناطیسی پیچیده شده اند و دارای ۳ خاصیت زیر باشند ترانس ایده آل گویند.

۱- عنصری خطی تغییر ناپذیر با زمان است که انرژی تلف یا ذخیره نمی کند.

$$P(t)=V_۱I_۱-V_۲I_۲=۰$$ (۲۵)

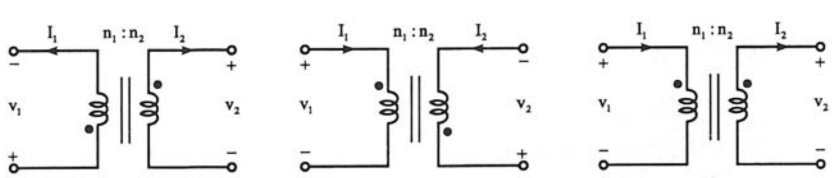


۲- دارای هیچ گونه شار نشتی نیست و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی آن بی نهایت است. به عبارت دیگر ضریب تزویج آن برابر یک ($k=۱$) است.

۳- اندوکتانس هر سلف بی نهایت است یعنی $L_۱\to\infty$, $L_۲\to\infty$.

روابط حاکم بر ترانس

شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



برای هر سه حالت فوق روابط زیر صادق هستند.

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{n_۱}{n_۲},\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}$$ (۲۶)

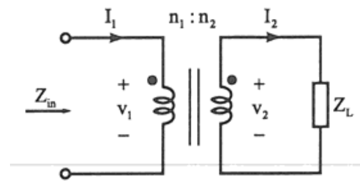
توجه۶: نقاط ترانس پایه مثبت ولتاژ ورودی (و خروجی) ترانس را نشان می‌دهد.

توجه۷: جریان ورودی ترانس در صورتی که از سر نقطه دار وارد ترانس گردد باید جریان خروجی از سر نقطه دار خارج گردد و بالعکس تا روابط فوق تصحیح باشند.

امپدانس ورودی و خروجی ترانس

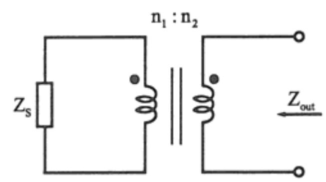
$$V_2 = \frac{n_2}{n_1}V_1, V_2 = Z_L I_2, I_2 = \frac{n_1}{n_2} I_1$$

$$\frac{n_2}{n_1}V_1 = Z_L \frac{n_1}{n_2} I_1$$



$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L \qquad (۲۷)$$

به طور مشابه



$$Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 Z_S \qquad (۲۸)$$

توجه۸: در تعیین امپدانس ورودی و خروجی مکان نقاط ترانس بی تأثیر است.

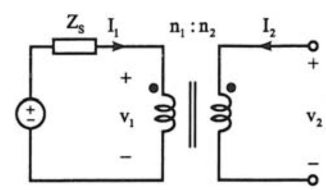
مدار معادل تونن

گاهی اوقات انتقال منبع و امپدانس به طرفین ترانس باعث کاهش محاسبات در تعیین پاسخ می‌گردد.

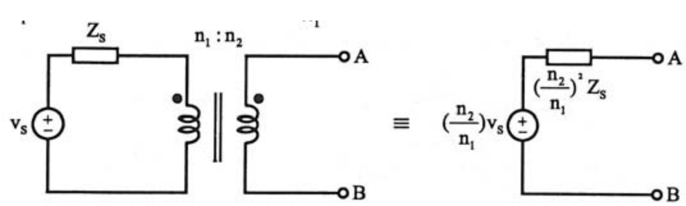
$$V_1 = \frac{n_1}{n_2}V_2, I_1 = \frac{-n_2}{n_1} I_2$$

$$KVL: Z_S I_1 + V_1 = V_S$$

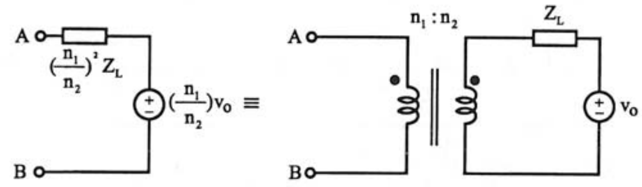
$$V_2 = \frac{n_2}{n_1}V_S + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 Z_S I_2 \qquad (۲۹)$$



ترانس سمت راست خود یک منبع ولتاژ به مقدار $\frac{n_2}{n_1}V_S$ و یک امپدانس به مقدار $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 Z_S$ خواهد دید.



به طور مشابه

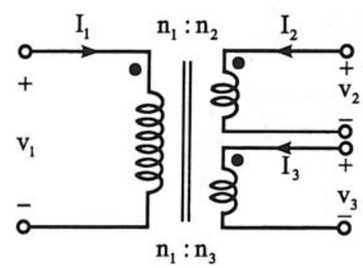


توجه۹: در صورتی که مکان نقاط ترانس تغییر کند علامت منبع ولتاژ منتقل شده تغییر می‌کند.

ترانس سه سیم پیچ

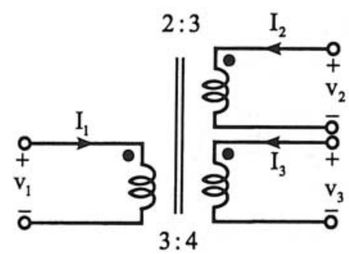
در صورتی که مطابق شکل مقابل سیم پیچ سومی به ترانس اضافه کنیم روابط ولتاژ و جریان چنین خواهند شد.

$$\frac{V_۱}{n۱} = \frac{V_۲}{n_۲} = \frac{V_۳}{n_۳} \quad , \quad n_۱ I_۱ + n_۲ I_۲ + n_۳ I_۳ = ۰$$



مثال ۵: برای مدار مقابل نسبت دورهای سیم پیچ اولیه و ثانویه و رابطه خطی جریان‌های ترانس را به دست آورید.

حل:



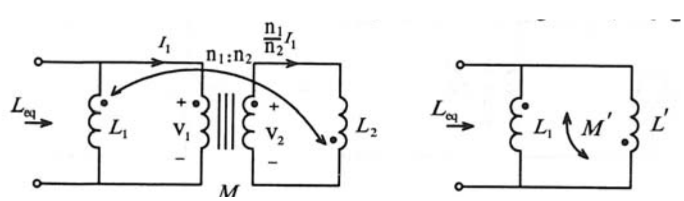
$$\left.\begin{matrix} \frac{V۱}{V۲} = \frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹} \\ \frac{V۱}{V۳} = \frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n_۱ = ۶, n_۲ = ۹, n_۳ = ۸$$

لذا رابطه خطی جریان برابر خواهد بود با

$$۶I_۱ + ۹I_۲ + ۸I_۳ = ۰$$

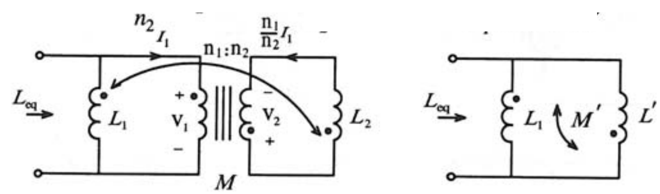
چند مدار معادل مفید

با کمی دقت می‌توان (بدون حل) رابطه اندوکتانس معادل را از دو سر مورد نظر به دست آورد.



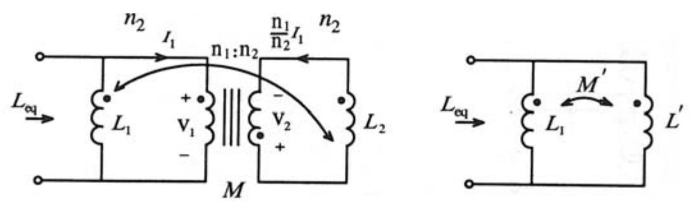
$$v_{۲} = L_{۲}S\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)I_{۱} + MsI_{۱} \quad , \quad v_{۱} = \frac{n_{۱}}{n_{۲}}v_{۲} = L_{۲}S\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} I_{۱} + \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)MsI_{۱}$$

$$L' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} L_{۲} \quad , \quad M' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)M \quad , \quad L_{eq} = \frac{L_{۱}L' - M'^{۲}}{L_{۱} + L' + ۲M'}$$



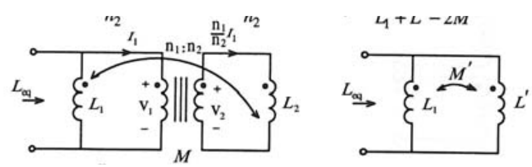
$$v_{۲} = L_{۲}s\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)I_{۱} - MsI_{۱} \Rightarrow v_{۱} = \frac{n_{۱}}{n_{۲}}v_{۲} = L_{۲}S\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} I_{۱} - \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)MsI_{۱}$$

$$L' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} L_{۲} \quad , \quad M' = -\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)M \quad , \quad L_{eq} = \frac{L_{۱}L' - M'^{۲}}{L_{۱} + L' + ۲M'}$$



$$v_{۲} = L_{۲}s\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)I_{۱} + MsI_{۱} \Rightarrow v_{۱} = \frac{n_{۱}}{n_{۲}}v_{۲} = L_{۲}S\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} I_{۱} + \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)MsI_{۱}$$

$$L' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} L_{۲} \quad , \quad M' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)M \quad , \quad L_{eq} = \frac{L_{۱}L' - M'^{۲}}{L_{۱} + L' - ۲M'}$$

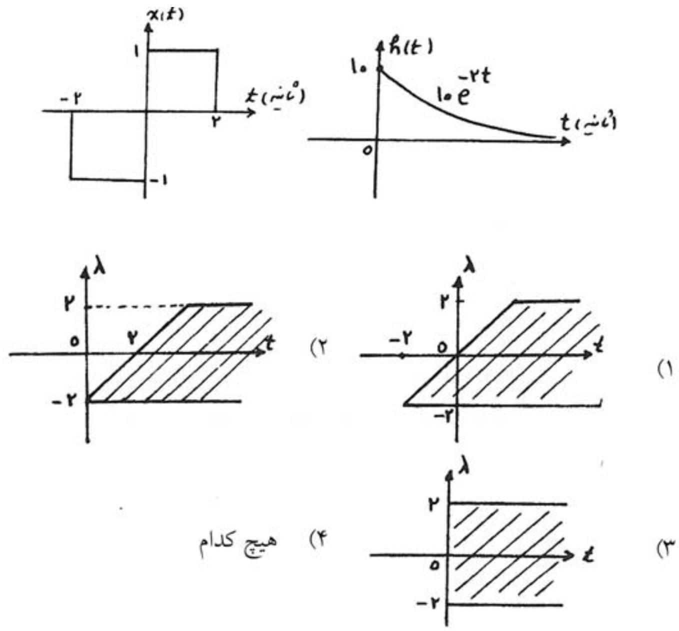


$$v_{۲} = L_{۲}s\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)I_{۱} - MsI_{۱} \Rightarrow v_{۱} = \frac{n_{۱}}{n_{۲}}v_{۲} = L_{۲}S\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} I_{۱} - \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)MsI_{۱}$$

$$L' = \left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)^{۲} L_{۲} \quad , \quad M' = -\left(\frac{n_{۱}}{n_{۲}}\right)M \quad , \quad L_{eq} = \frac{L_{۱}L' - M'^{۲}}{L_{۱} + L' - ۲M'}$$

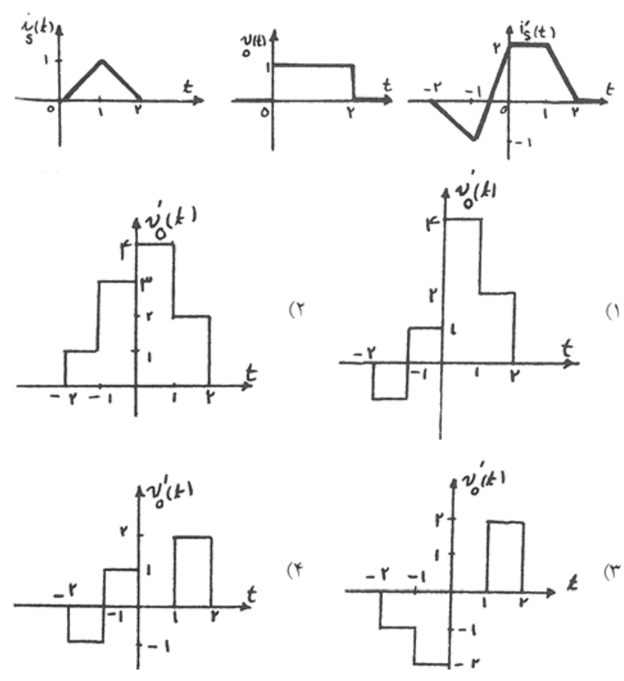
مجموعه تست فصل چهارم

۴-۱- اگر $x(t)$ ورودی یک مدار و $h(t)$ پاسخ ضربهٔ آن باشد، کدامیک از شکل‌های زیر ناحیهٔ پاسخ را در قسمت هاشور زده نشان می‌دهد؟

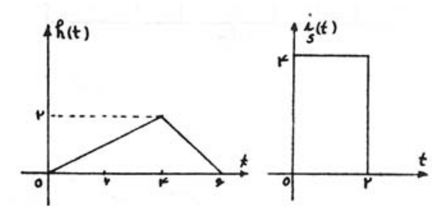


۴) هیچ کدام

۴-۲ پاسخ حالت صفر یک سیستم خطی نابسته به زمان به ورودی $i_s(t)$ به شکل $v_o(t)$ است. پاسخ حالت صفر همان سیستم به ورودی $i'_s(t)$ کدام است؟



۳-۴ پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و ورودی آن در شکل زیر داده شده‌اند. پاسخ حالت صفر این مدار برای $۴ \le t \le ۵$ چیست؟



۱) $-۳t^۲ + ۲۸t - ۵۲$

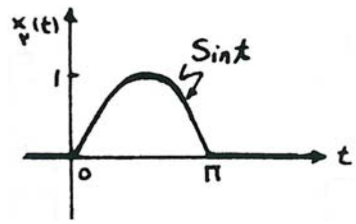
۲) $-۳t^۲ + ۲۸t + ۵۲$

۳) $-\frac{۳}{۴}t^۲ + ۷t - ۱۳$

۴) $-\frac{۳}{۴}t^۲ + ۷t + ۱۳$

۴-۴ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_۱(t) = (\sin t)u(t)$ به صورت: $y_۱(t) = \left[\frac{۱}{۲}e^{-t} + \sin\left(t + ۴۵^\circ\right)\right]u(t)$ است. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $x_۲(t)$ (مطابق شکل) چیست؟

($P_\Delta(t)$ تابع پالس واحد با پهنای Δ (و بلندی $\frac{۱}{\Delta}$ است)



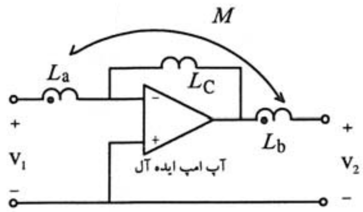
۱) $\frac{۱}{۲}e^{it}\,u(t) + \pi\sin(t + ۴۵^\circ)\,p_\pi(t)$

۲) $\frac{۱}{۲}e^{-t}u(t) + \frac{۱}{۲}e^{-(t-\pi)}\,u(t-\pi) + \pi\sin(t + ۴۵^\circ)\,p_\pi(t)$

۳) $\left[\frac{۱}{۲}e^{-t} + \sin(t + ۴۵^\circ)\right]\pi p_\pi(t)$

۴) بدون مشخص بودن پاسخ ضربه مدار، قابل محاسبه نیست.

۴-۵ ماتریس اندوکتانس دو قطبی مقابل کدام است؟



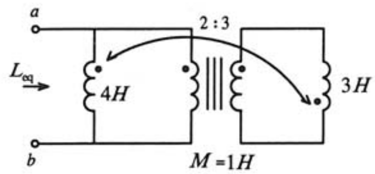
۱) $\begin{pmatrix} L_a & -M \\ -L_C - M & L_b \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} L_a & -M \\ L_C - M & L_b \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} L_a & M \\ -L_C - M & L_b \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} L_b & -M \\ -L_C - M & L_a \end{pmatrix}$

۴-۶ در مدار مقابل سلف معادل دیده شده از دو سر a و b (L_{ab}) چند هانری است؟



۱) $\frac{۱۱}{۱۵}$

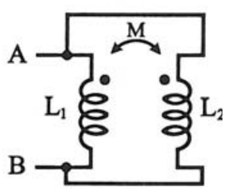
۲) $\frac{۹}{۲۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

۴-۷ در شکل زیر، L_{AB} چند هانری است؟

$L۲ = ۴H \quad , \quad L۱ = ۱H \quad , \quad M = ۰.۵H$



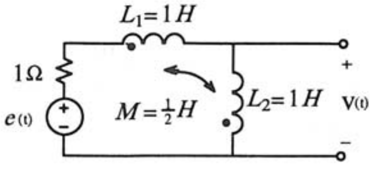
۱) /۴۶.

۲) /۹۳.

۳) /۵.

۴) ۱/۸۶

۴-۸ در مدار مقابل در صورتی که $v۱(t) = ۲\text{Sin}۲t$ باشد، e(t) برابر با کدام گزینه است؟



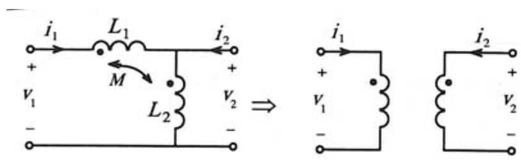
۱) $e(t) = ۲\sqrt{۵}\text{Sin}(۲t - ۲۶.۶^\circ)$

۲) $e(t) = ۲\text{Sin}(۲t - ۲۶.۶^\circ)$

۳) $e(t) = ۲\text{Sin}(۲t + ۲۶^\circ)$

۴) $e(t) = \sqrt{۵}\text{Sin}(۲t - ۲۶^\circ)$

۴-۹ مدار شکل زیر را در نظر بگیرید که در آن: $L_2=3H$, $L_1=2H$, $|M|=1H$ اگر مدار مذکور معادل سلف‌های تزویج شده‌ای به صورت شکل نتیجه باشد ضریب تزویج سلف‌ها (k) در شکل اخیر تقریباً برابر است با



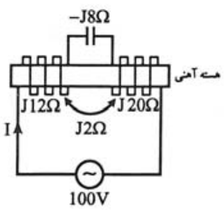
۱) ۰/۲۳

۲) ۰/۴

۳) ۰/۵۲

۴) ۰/۸۷

۴-۱۰ در مدار مقابل جریان I چند آمپر است؟



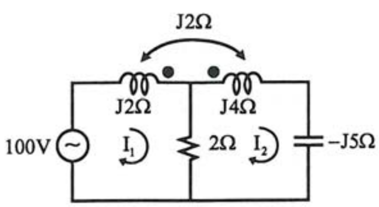
۱)۲/۵

۲)۷/۵

۳)۴

۴) ۵

۴-۱۱ دستگاه تعیین جریان‌های، مدار زیر کدام است؟



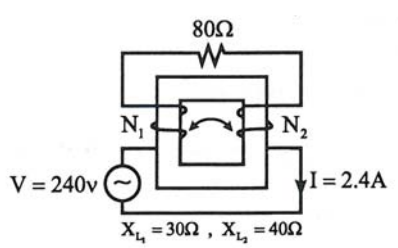
۱) $\begin{bmatrix} j2+2 & -j2+2 \\ -j2+2 & 2-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} j2+2 & j2-2 \\ j2-2 & 2-j9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} j2+2 & -j2-2 \\ -j2-2 & 2-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} j2+2 & j2+2 \\ j2+2 & 2-j9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

۴-۱۲ در مدار روبرو راکتانس متقابل بین دو سیم پیچ چند اهم است؟



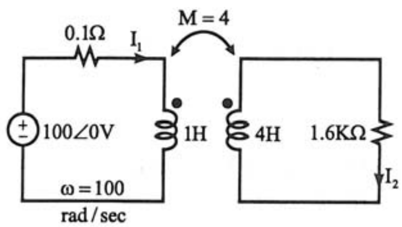
۱)۵

۲)۱۰

۳)۱۴

۴)۲۵

۴-۱۳ در مدار معادل یک ترانسفرماتور مطابق شکل، جریان I2 تقریباً چند آمپر است؟



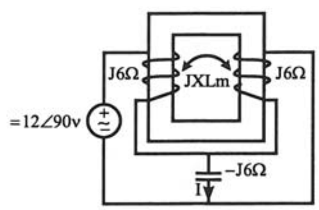
۱)صفر

۲) ۰.۲∠۳۷°

۳) ۱∠۹۰°

۴) ۰.۲∠۲۱۷°

۴-۱۴ در مدار مقابل جریان I=۴A است. اندازه X_{Lm} چند اهم است؟



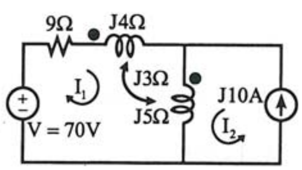
۱) ۶

۲) ۹

۳) ۳

۴) ۱

۴-۱۵ در مدار داده شده اندازه جریان I_1 چند آمپر است؟



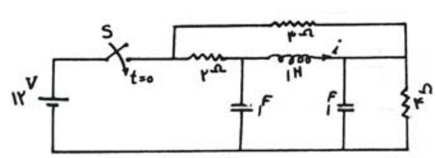
۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۲/۵

۴) ۸/۶

۴-۱۶ در مدار زیر سوئیچ S مدت زیادی باز بوده است. در زمان t=۰ سوئیچ بسته می‌شود. $\frac{d^2 i}{dt^2}(0^+)$ **برحسب** $A/\sec^2$ **برابر است با:**



۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴-۱۷ ولتاژ سینوسی پالسی شکل زیر به مدار نشان داده شده اعمال می‌شود. مقدار ولتاژ خروجی $v_0(t)$ را در لحظهٔ $t = ۲/۲$ ثانیه حساب کنید. $\left(i_L(0^-) = 0\right)$

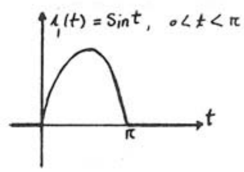
۱) صفر ولت

۲) ۰/۹۶۸ ولت

۳) ۰/۵۸۶ ولت

۴) ۱/۴۸۲ ولت

۴-۱۸ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی $i_1(t)$ (شکل زیر) به صورت $v_1(t)=\begin{cases}\sin t - e^{-t} & 0<t<\pi \\ e^{-(t-\pi)} & t>\pi\end{cases}$ **می‌باشد.**



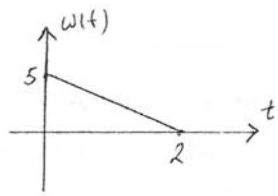
۱) $-2e^{\frac{-\pi}{2}}$

۲) $-e^{\frac{-3\pi}{2}}$

۳) $-(1+e^{\frac{-3\pi}{2}})$

۴) $-e^{\frac{-3\pi}{2}}-e^{\frac{-\pi}{2}}$

۴-۱۹ واکنش یک سیستم خطی به پلهٔ واحد $\omega(t)$ (unit step) در زیر نشان داده شده است. تابع ضربهٔ واحد $h(t)$ (unit step) با کدام گزینه است؟



۱) $h(t)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad t<0 \\ 5\delta(t)-2.5 & \text{for} \quad 0\le t\le 2 \\ 0 & \text{for} \quad t>2\end{cases}$

۲) $h(t)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad t<0 \\ 5\delta(t) & \text{for} \quad 0\le t\le 2 \\ 0 & \text{for} \quad t>2\end{cases}$

۳) $h(t)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad t<0 \\ -5\delta(t) & \text{for} \quad 0\le t\le 2 \\ 0 & \text{for} \quad t>2\end{cases}$

۴) هیچ کدام

۴-۲۰ در صورتی که ورودی به یک سیستم خطی برابر با $u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{jkt}$ **و تابع مدار برابر با** $H(s)=\frac{s}{s+1}$ **باشد، خروجی مدار در حالت پایداری $y(t)$ برابر با کدام گزینه زیر است؟ (آزاد ۸۲)**

۱) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jkt}}{k(k-j)}$

۲) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jkt}}{k-j}$

۳) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jkt}}{k+j}$

۴) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{jkt}}{k+j}$

۲۱-۴ در حالتی که یک ولتاژ پله‌ای $v(t) = A\eta(t)$ به یک مدار خطی بکار برده شود معادلهٔ جریان برای $t\rangle ۰$ برابر است با

$$i(t) = \frac{۱}{۲}e^{-t} - ۲t + ۳\sin ۴t$$

معادلهٔ جریان در حالتیکه $y(t)$ برابر با کدام گزینهٔ زیر است؟

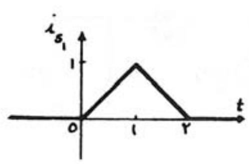
۱) $i(t) = -e^{-t} - ۲ + ۱۲\cos ۴t$

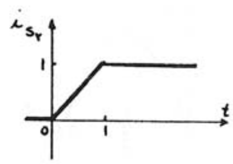
۲) $i(t) = -\frac{۱}{۲}e^{-t} - ۲ + ۱۲\cos ۴t$

۳) $i(t) = \frac{۱}{۲}e^{-t} + ۲ - ۱۲\cos ۴t$

۴) $i(t) = -\frac{۱}{۲}e^{-t} + ۲ + ۱۲\cos ۴t$

۲۲-۴ اگر پاسخ یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی $i_{s۱}(t)$ مساوی $\delta(t)$ باشد. آنگاه پاسخ آن مدار به ورودی $i_{s۲}(t)$ کدام است؟





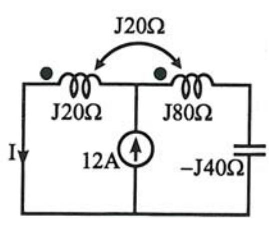
۱) $k\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{k+۱}\delta(t-k)$ عدد صحیح است.

۲) $\delta(t) - \delta(t-۱) + \delta(t-۲) - \delta(t-۳) + ...$

۳) $k\sum_{k=۰}^{\infty}\delta(t-k)$ عدد صحیح است.

۴) $u(t) - u(t-۱) + u(t-۲) - u(t-۳) + ...$

۲۳-۴ در مدار داده شده جریان I چند آمپر است؟



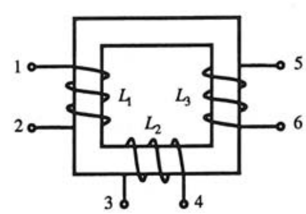
۱) ۴

۲) ۳/۶

۳) ۸

۴) ۷/۲

۴-۲۴ اگر بخواهیم با اتصال سه سیم پیچ مقابل بین سرهای ۱ و ۵ حداکثر L را داشته باشیم. کـدام سـرها بایـد بـه یکدیگر متصل گردند؟ ($L_1=L_2=L_3$)



۱) ۲ به ۳ و ۴ به ۶

۲) ۲ به ۴ و ۳ به ۶

۳) ۶ به ۴ و ۳ به ۲ و ۵

۴) ۲ به ۶ و ۳ به ۴ و ۵

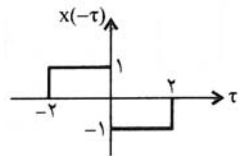
پاسخنامه مجموعه تست فصل چهارم

۴-۱- گزینه (۴) صحیح است.

روش اول- با توجه به گزینه‌ها، می‌بینیم که تمامی گزینه‌ها در $t=0$ متفاوتند، و بنابراین تنها کافیست $\lambda(0)$ را بیابیم. طبق تعریف انتگرال کانولوشن، داریم:

$$\lambda(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \xrightarrow{t=0} \lambda(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(-\tau)d\tau$$

با توجه به نمودار $x(-\tau)$، خواهیم داشت:



$$\lambda(0)=\int_0^2 -10e^{-2\tau}\,d\tau=\frac{-10}{-2}e^{-2\tau}\Big]_0^2=5(e^{-4}-1)\approx -4/91$$

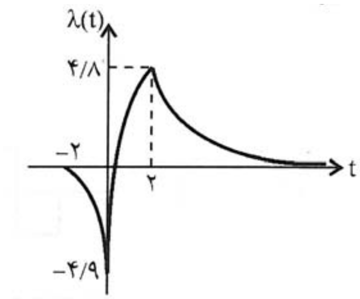
از آنجائیکه $\lambda(0)=4/91$ در هیچ یک از گزینه‌ها وجود ندارد، بنابراین فقط گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم- از روش تحلیلی برای محاسبه $\lambda(t)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lambda(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{cases}
t<0\ ,\ t+2>0 \Rightarrow \lambda(t)=\int_0^{t+2}-10e^{-2\tau}d\tau=\frac{10}{2}e^{-2\tau}\Big]_0^{t+2}=5\left[e^{-2(t+2)}-1\right] \\
t-2<0\ ,\ t>0 \Rightarrow \lambda(t)=\int_0^{t}10e^{-2\tau}d\tau+\int_t^{t+2}-10e^{-2\tau}d\tau \\
\qquad\qquad =-5e^{-2\tau}\Big]_0^{t}+5e^{-2\tau}\Big]_t^{t+2} \\
\qquad\qquad =5-10e^{-2t}+5e^{-2(t+2)} \\
t>2 \qquad\qquad \Rightarrow \lambda(t)=\int_{t-2}^{t}10e^{-2\tau}d\tau+\int_t^{t+2}-10e^{-2\tau}d\tau \\
\qquad\qquad =-5e^{-2\tau}\Big]_{t-2}^{t}+5e^{-2\tau}\Big]_t^{t+2} \\
\qquad\qquad =-10e^{-2t}+5e^{-2(t+2)}+5e^{-2(t+2)}
\end{cases}$$

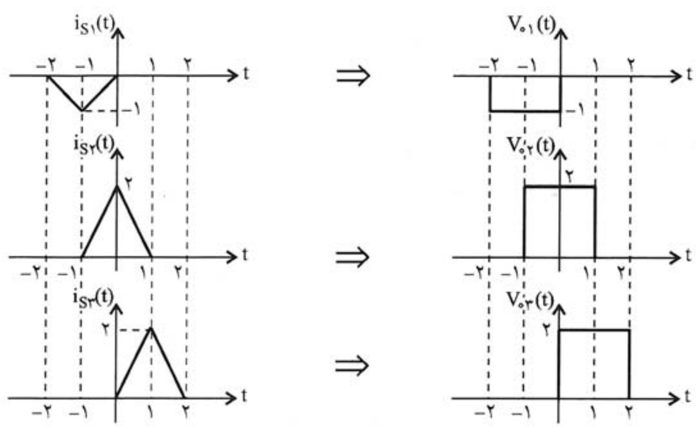
نمودار $\lambda(t)$ به صورت زیر خواهد بود:



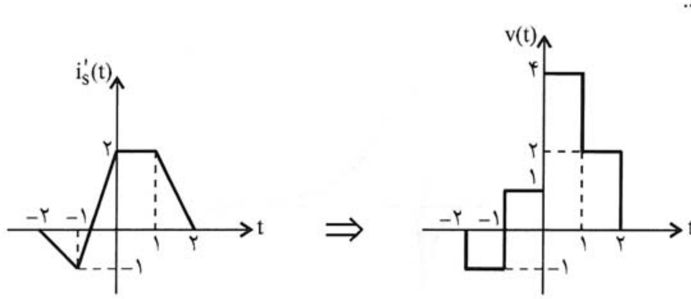
بنابراین چون چنین پاسخی در هیچ یک از نواحی هاشور خورده نیست، پاسخ ۴ صحیح است.

۴-۲- گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توانیم از اصل جمع آثار برای حل این سوال استفاده کنیم. بدین منظور باید ابتدا $i'_s(t)$ را به صورت ترکیبی از تابع $i_s(t)$ بنویسیم. اشکال زیر چگونگی این کار را نشان می‌دهند:



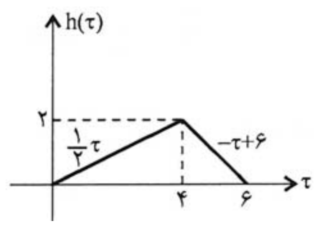
با توجه به اینکه می‌توانیم ورودی جدید را به صورت $i'_s(t)=i_s(t)+i_{s۲}(t)+i_{s۳}(t)$ بنویسیم، طبق اصل جمع آثار، خروجی جدید به صورت $v_o(t)=v_{o۱}(t)+v_{o۲}(t)+v_{o۳}(t)$ خواهد بود.

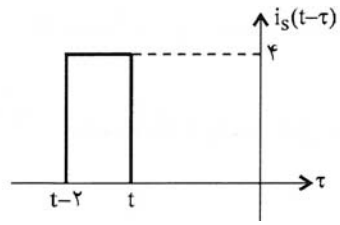


۴-۳- گزینه (۱) صحیح است.

از خواص سیستم‌های LTI، می‌توانیم بنویسیم:

$$y(t)=h(t)*i_s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)i_s(t-\tau)d\tau$$

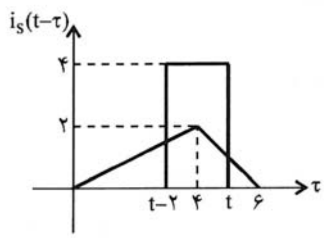




برای بازه زمانی $۴\le t\le ۵$، نمودار $i_s(t-\tau)$ و $h(\tau)$ به صورت زیر دارای همپوشانی می‌شوند و می-توانیم بنویسیم:

$$y(t)=\int_{t-۲}^{۴}۴(\frac{\tau}{۲})d\tau+\int_{۴}^{t}۴(-\tau+۶)d\tau$$

بنابراین خواهیم داشت:



$$y(t)=\tau^{۲}\Big]_{t-۲}^{۴}-۲(۶-\tau)\Big]_{۴}^{t}=۱۶-(t-۲)^{۲}-۲(۶-t)^{۲}+۲\times۴=۳t^{۲}+۲۸t-۵۲$$

۴-۴- گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توانیم از اصل جمع آثار برای تحلیل مدار استفاده کنیم. بدین منظور ابتدا باید $x_۲(t)$ را برحسب $x_۱(t)$ بنویسیم:

$$x_۲(t)=\sin t u(t)+\sin(t-\pi)u(t-\pi)\Rightarrow x_۲(t)=x_۱(t)+x_۱(t-\pi)$$

بنابراین با توجه به قضیه جمع آثار، می‌توانیم بنویسیم:

$$y_۲(t)=y_۱(t)+y_۱(t-\pi)$$

$$y_۲(t)=\left[\frac{۱}{۲}e^{-t}u(t)+\sin(t+۴۵^\circ)u(t)\right]$$

$$+\left[\frac{۱}{۲}e^{(t-\pi)}u(t-\pi)+\sin(t+۴۵^\circ-\pi)u(t-\pi)\right]$$

با توجه به رابطه $\sin(t+۴۵^\circ-\pi)=-\sin(t+۴۵^\circ)$ داریم:

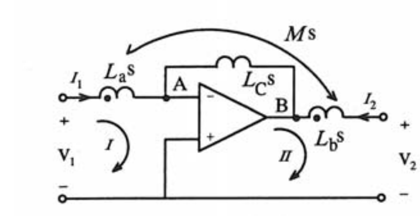
$$y_۲(t)=\frac{۱}{۲}e^{-t}u(t)+\frac{۱}{۲}e^{-(t-\pi)}u(t-\pi)+\sin(t+۴۵^\circ)\left[u(t)-u(t-\pi)\right]$$

طبق تعریف، داریم: $P_\Delta(t)=\frac{۱}{\Delta}\left[u(t)-u(t-\pi)\right]$. بنابراین رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y_۲(t)=\frac{۱}{۲}e^{-t}\,u(t)+\frac{۱}{۲}e^{-(t-\pi)}\,u(t-\pi)+\pi\sin(t+۴۵^\circ)p_\pi(t)$$

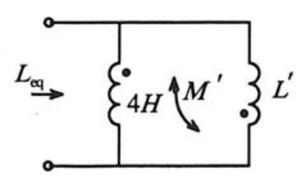
۴-۵-

$$\text{KCLA}: -I_۱-\frac{V_B}{L_C s}=۰\Rightarrow V_B=-L_C sI_۱$$
$$\text{KVLI}: -V_۱+V_{L۱}=۰\Rightarrow L_a sI_۱-MsI_۲=V_۱$$
$$\text{KVLII}: V_۲=V_B+V_{L۲}\Rightarrow V_۲=-L_C sI_۱+L_b sI_۲-MsI_۱$$
$$\begin{pmatrix}V_۱\\V_۲\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}L_a & -M\\ -L_C-M & L_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_۱\\I_۲\end{pmatrix}$$



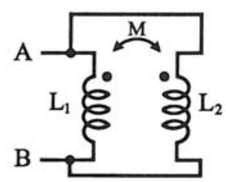
۴-۶- ابتدا سلف سمت راست ترانس را به سمت چپ ترانس می‌بریم

$$M'=\frac{n_۱}{n_۲}M=\frac{۲}{۳}H \quad , \quad L'=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ L=\frac{۴}{۳}H$$



برای شکل مقابل L_{eq} برابر است با

$$L_{eq}=\frac{L_۱L_۲-M'^۲}{L_۱+L_۲+۲M'}=\frac{۱۱}{۱۵}H$$

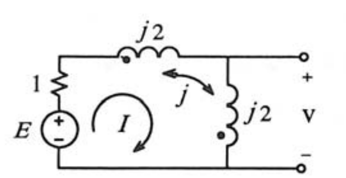


۴-۷- مدار معادل تزویج را قرار می‌دهیم.

$$LA_B=\left[۳.۵\|۰.۵\right]+۰.۵=۰.۹۳H$$

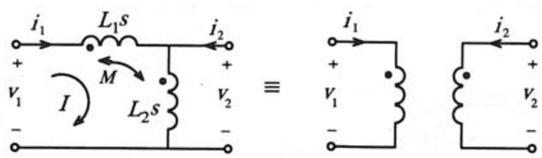
۴-۸-

$$v(t)=۲\text{Sin}۲t\Rightarrow V(j۲)=۲\angle-۹۰^\circ$$
$$V(j۲)=j۲I-jI=۲\angle-۹۰^\circ$$
$$I=\frac{۲\angle-۹۰^\circ}{۱\angle۹۰^\circ}=۲\angle-۱۸۰^\circ$$



$$\text{KVL}\ \ I: I+j۲I-jI+j۲I-jI=E\Rightarrow(۱+j۲)(-۲)=E$$
$$E=۲\sqrt{۵}\angle-۱۱۶^\circ\Rightarrow e(t)=۲\sqrt{۵}\text{Cos}\left(۲t-۱۱۶^\circ\right)=۲\sqrt{۵}\text{Sin}\left(۲t-۲۶.۶^\circ\right)$$

۴-۹-



$$\text{KVL}\quad I: L_۱sI_۱ + Ms\left(I_۱ + I_۲\right) + L_۲s\left(I_۱ + I_۲\right) + MsI_۱ = V_۱$$

$$V_۲ = L_۲s\left(I_۱ + I_۲\right) + MsI_۱ \quad , \quad \left|M\right| = ۱H \quad , \quad L_۱ = ۲H \quad , \quad L_۲ = ۳H$$

$$\begin{pmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} ۷ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad L = \begin{pmatrix} ۷ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

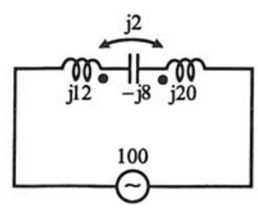
برای شکل هم ارز داریم

$$\begin{pmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} L' & M' \\ M' & L'_۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad L' = \begin{pmatrix} L' & M' \\ M' & L'_۲ \end{pmatrix}$$

با معادل قرار دادن دو ماتریس ضرایب القا نتایج زیر به دست می‌آید.

$$L'_۱ = ۷H \quad L'_۲ = ۳H \quad , \quad M' = ۴H \Rightarrow k = \frac{\left|M'\right|}{\sqrt{L'_۱L'_۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۷\times ۳}} = ۰.۸۷$$

۴-۱۰-



$$Z_{in} = j۱۲ + j۲۰ - j۴ - j۸ = j۲۰ \Rightarrow I = \frac{۷}{\left|Z_{in}\right|} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵A$$

حل: در حلقه چپ KVL می‌زنیم.

$$\text{KVL}: j۲I_۱ - j۲I_۲ + ۲\left(I_۱ - I_۲\right) = ۱۰۰ \Rightarrow \left(j۲ + ۲\right)I_۱ - \left(۲ + j۲\right)I_۲ = ۱۰۰$$

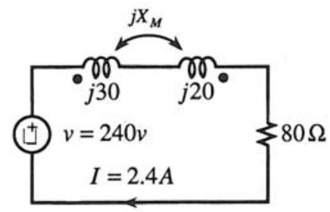
۴-۱۱- در حلقه چپ KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL}: j۲I_۱ - j۲(I_۱ - I_۲) = ۱۰۰ \Rightarrow (j۲ + ۲)\,I_۱ - (۲ + j۲)\,I_۲ = ۱۰۰$$

۴-۱۲-

حل:

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} - ۲X_M = ۷۰ - ۲X_M$$
$$|Z| = \frac{V}{I} = \frac{۲۴۰}{۲.۴} = ۱۰۰\Omega$$
$$Z = ۸۰ + jX_L \Rightarrow ۱۰۰\sqrt{۸۰^۲ + X_L^۲} \Rightarrow XL = ۶۰\Omega$$
$$۶۰ = ۷۰ - ۲X_M \Rightarrow X_M = ۵\Omega$$

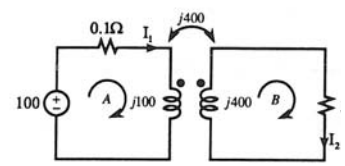


۴-۱۳-

$$KVLA: ۰.۱\ I۱ + j۱۰۰\ I۱ - j۴۰۰\ I۲ = ۱۰۰$$
$$KVLB: ۱۶۰۰\ I۲ + j۴۰۰\ I۲ - j۴۰۰\ I۱ = ۰$$

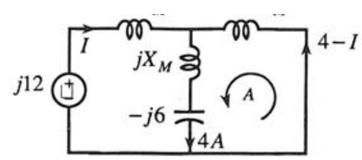
$$\begin{cases}(۰.۱ + j۱۰۰)I۱ - j۴۰۰ I۲ = ۱۰۰ \\ -j۴۰۰ I۱ + (۱۶۰۰ + j۴۰۰)I۲ = ۰\end{cases} \Rightarrow \quad I۲ = \frac{۱}{۴ - j۳} = ۰.۲\angle ۳۷^\circ$$

$$\Rightarrow \quad I۲ = \frac{۱}{۴ - j۳} = ۰.۲\angle ۳۷^\circ$$



۴-۱۴- حل: مدار معادل دو سلف تزویج شده را قرار می‌دهیم.

$$KVLA: \ j(۶ - X_M)(۴ - I) + j(X_M - ۶) \times ۴ = ۰$$
$$(۶ - X_M)(۸ - I) = ۰ \Rightarrow X_M = ۶\Omega$$

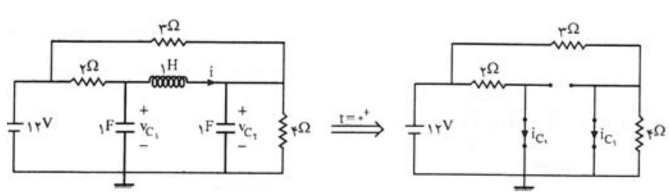


۴-۱۵- حل: در حلقه چپ KVL می‌زنیم

$$KVL: ۹L_۱ + j۴I_۱ + j۳(I_۱ + j۱۰) + j۵(I_۱ + j۱۰) + j۳I_۱ = ۷۰$$
$$(۹ + j۱۵)I_۱ = ۱۵۰ \Rightarrow |I_۱| = \frac{۱۵۰}{\sqrt{۹^۲ + ۱۵^۲}} = ۸.۶A$$

۴-۱۶- گزینه (۳) صحیح است.

در $t = 0$، سوییچ مدت زیادی باز بوده و بنابراین انرژی اولیه ذخیره شده در سلف و خازن‌ها صفر است:



برای محاسبه $\frac{d^2 i(0^-)}{dt^2}$، ابتدا باید ضابطه $\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}$ را بیابیم. با KVL زدن در مش متشکل از سلف و خازن‌ها، داریم:

$$v_{C_1}(t)-v_{C_2}(t)-\frac{di(t)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}=\frac{dv_{C_1}(t)}{dt}-\frac{dv_{c2}(t)}{dt}=i_{C1}(t)-i_{C2}(t)$$

از طرفی با توجه به شکل مدار در $t=0^+$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{aligned} i_{c1}(0^+)&=\frac{12}{2}=6A \\ i_{c2}(0^+)&=\frac{12}{3}=4A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}=6-4=2(\frac{A}{s^2})$$

۴-۱۷- گزینه (۴) صحیح است.

ابتدا پاسخ حالت صفر مدار را به ورودی سینوسی $v_s(t)$ بدست می‌آوریم. معادله دیفرانسیل برحسب $v_o(t)$ به صورت $2/5\frac{d}{dt}(\frac{v_o}{5})+v_o=10\sin 2t$ است که پاسخ حالت صفر آن به صورت $v_o(t)=5e^{-2t}+5\sin 2t5-\cos 2t$ بدست می‌آید. در لحظه $t=\frac{\pi}{4}$، شرط اولیه $v_o(\frac{\pi}{2})=5/216$ حاصل می‌شود و ورودی نیز صفر می‌گردد، بنابراین معادله دیفرانسیل زیر را داریم:

$$\frac{dv_o}{dt}+2v_o=0 \qquad , \quad v_o(\frac{\pi}{2})=5/216(V)$$

جواب این معادله در حالت کلی به صورت $v_o(t)=5/126e^{-2(t-\frac{\pi}{4})}u(t-\frac{\pi}{2})$ است که با جاگذاری $t=\frac{2}{2}$ بدست می‌آوریم: $v_o(2/2)=1/482$

۴-۱۸- گزینه (۱) صحیح است.

برای استفاده از خواص سیستمهای LTI، (و بخصوص اصل جمع آثار)، ابتدا باید $i_2(t)$ را برحسب $i_1(t)$ بیان کنیم. $i_1(t)$ یک پالس سینوسی است که می‌توانیم آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$i_1(t)=\sin tu(t)+\sin(t-\pi)u(t-\pi) \qquad (a)$$

با توجه به اینکه خروجی در لحظه‌ای پس از $t=\pi$ $(t=\frac{3\pi}{2})$ خواسته شده، باید $i_2(t)=\cos tu(t)$ را در بازه‌ای مانند $0<t<2\pi$ (که شامل $t=\frac{3\pi}{2}$ می‌شود)، برحسب $i_1(t)$ بنویسیم:

$$i_2(t)=\cos tu(t)-\cos(t-2\pi)u(t-2\pi) \qquad (b)$$

با مقایسه روابط (a) و (b) می‌توانیم رابطه ای خطی به صورت:

$$i_2(t)=\frac{d[i_1(t)-i_1(t-\pi)]}{dt}$$

بین i_1 و i_2 برقرار نماییم.

با توجه به خواص سیستم‌های LTI، چنانچه یک عملگر خطی (مانند مشتق)، روی ورودی یک سیستم LTI عمل کند، همان عملگر روی خروجی آن سیستم نیز عمل می‌کند. بنابراین با توجه به اصل جمع آثار، پاسخ سیستم در این حالت، خواهد بود: $v_2(t)=\frac{d}{dt}\left[v_1(t)-v_1(t-\pi)\right]$

$$v_1(t)=\begin{cases}\sin t-e^{-t} & , \quad 0<t<\pi\\ e^{-(t-\pi)} & , \quad t>\pi\end{cases}$$

$$v_1(t-\pi)=\begin{cases}-\sin t-e^{-(t-\pi)} & , \quad \pi<t<2\pi\\ e^{-(t-2\pi)} & , \quad t>2\pi\end{cases}$$

$$v_2(t)\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{d}{dt}[v_1(t)-v_1(t-\pi)]$$

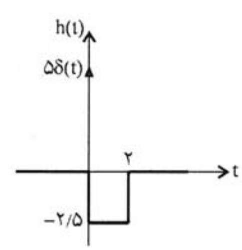
$$=\frac{d}{dt}\left[e^{-(t-\pi)}+\sin t+e^{-(t-\pi)}\right]\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-2e^{\frac{-\pi}{2}}$$

۴-۱۹- گزینه (۱) صحیح است.

همانطور که می‌دانیم، پاسخ ضربه یک سیستم LTI، مشتق پاسخ پله آن سیستم می‌باشد. با توجه به این نکته کافیست پاسخ پله سیستم را برحسب توابع آشنای پله و شیب بازنویسی کنیم:

$$\omega(t)=5u()-2/5r(t)+2/5r(t-2)\Rightarrow h(t)=\delta(t)-2/5u(t)+2/5u(t-2)$$

$$h(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 5\chi(t)-2/5 & 0\le t\le 2\Rightarrow\\ 0 & t>2\end{cases}$$



۴-۲۰- گزینه (۱) صحیح است.

از خواص سیستم‌های LTI می‌دانیم اگر ورودی یک سیستم LTI تابع ویژه $x(t)=e^{jk\omega t}$ باشد، آنگاه خروجی این سیستم؛ $y(t)=H(jk\omega_\circ)e^{jk\omega_\circ t}$ خواهد بود. (یعنی خروجی سیستم همان ورودی است که در مقدار ویژه $H(jk\omega_\circ)$ ضرب شده است).

با توجه به نکته فوق، به ازای ورودی ویژه $x_k(t)=e^{jkt}$، $\omega_\circ=۱$ می‌باشد و خروجی سیستم برابر است با:

$$y_k(t)=H(jk\times ۱)e^{jkt}=\frac{jk}{jk+۱}e^{jkt}$$

از طرفی با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توانیم از اصل جمع آثار استفاده کنیم و ورودی $u(t)$ را بصورت ترکیبی خطی از x_k ها بنویسیم:

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{k^۲}x_k(t)\Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{k^۲}y_k(t)$$

با جاگذاری $y_k(t)$ خواهیم داشت:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{k(jk+۱)}e^{jkt}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{k(k-j)}e^{jkt}$$

۴-۲۱- گزینه (۲) صحیح است.

همانطور که می‌دانیم، در سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان، پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله می‌باشد. بنابراین با فرض LTI بودن این مدار، خواهیم داشت:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}\Rightarrow h(t)=(\frac{۱}{۲}e^{-t}-۲t+۳\sin ۴t)'\Rightarrow h(t)=\frac{-۱}{۲}e^{-t}-۲+۱۲\cos ۴t$$

متاسفانه در متن اصلی سوال، اشاره ای به تغییر ناپذیر با زمان بودن مدار نشده بود.

یادآوری: در سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان، مشتق زمانی پاسخ پله، پاسخ ضربه را بدست نمی‌دهد.

۴-۲۲-گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توانیم از اصل جمع آثار برای تحلیل مدار استفاده کنیم. بدین منظور ابتدا باید $i_{s۲}(t)$ را برحسب $i_{s۱}(t)$ بنویسیم:

$$i_{s۲}(t)=i_{s۱}(t)+i_{s۱}(t-۱)+is_۱(t-۲)+i_{s۱}(t-۳)+...=\sum_{k=}^{\infty}i_{s۱}(t-k)$$

بنابراین با فرض اینکه $y_۱(t)$، پاسخ سیستم به ورودی $i_{s۱}(t)$، و $y_۲(t)$ پاسخ سیستم به ورودی $i_{s۲}(t)$ باشد، با توجه به قضیه جمع آثار می‌توانیم بنویسیم:

$$y_۲(t) = y_۱(t) + y_۱(t-۱) + y_۱(t-۲) + y_۱(t-۳) + ... = \sum_{k=۰}^{\infty} y_۱(t-k)$$

با توجه به صورت سوال، $y_۱(t) = \delta(t)$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$y_۲(t) = \sum_{k=۰}^{\infty} \delta(t-k)$$

۴-۲۳- در مش بیرونی KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL}: j۸۰(I-۱۲) + j۲۰I + j۲۰I$$

$$+ j۲۰(I-۱۲) - j۴۰(I-۱۲) = ۰$$

$$۵I = ۳۶ \Rightarrow I = ۷/۲\,A$$

۴-۲۴- در مش بیرونی KVL می‌زنیم.

$$\text{KVL}: j۸۰(I-۱۲) + j۲۰I + j۲۰I$$
$$+ j۲۰(I-۱۲) - j۴۰(I-۱۲) = ۰$$
$$۵I = ۳۶ \Rightarrow I = ۷.۲A$$

۴-۲۵ – اندوکتانس حداکثر در هنگام همسو بودن شارهای سیم پیچ‌ها ایجاد می‌گردد. پس باید ۲ به ۴ و ۳ به ۶ وصل گردد.

منابع

1ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه ها، تألیف چارلز دسور، ارنست کوه، ترجمه و تکمیل: پرویـز جبـه دار مـارالانی انتشـارات دانشـگاه تهران

2ـ رهیافت حل مسأله در مدارهای الکتریکی تألیف محمود دیانی

3ـ مدارهای الکتریکی تالیف ویلیام هیت