طريقة النقطة الصامدة FIXED POINT METHOD

في هذه الطريقة نكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة:

$$x=g(x)$$

النقطة x تسمى نقطة صامدة fixed point للدالة g. إن أية نقطة صامدة للدالة g تعتبر جذراً للمعادلة $f(x)=0$. لإيجاد هذا الجذر، نجد أولاً قيمة تقريبية أولية x_0 بعدها نحسب قيمة الدالة في x_0 لنحصل على تقريب آخر للجذر وليكن x_1 أي إن:

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$\vdots$$

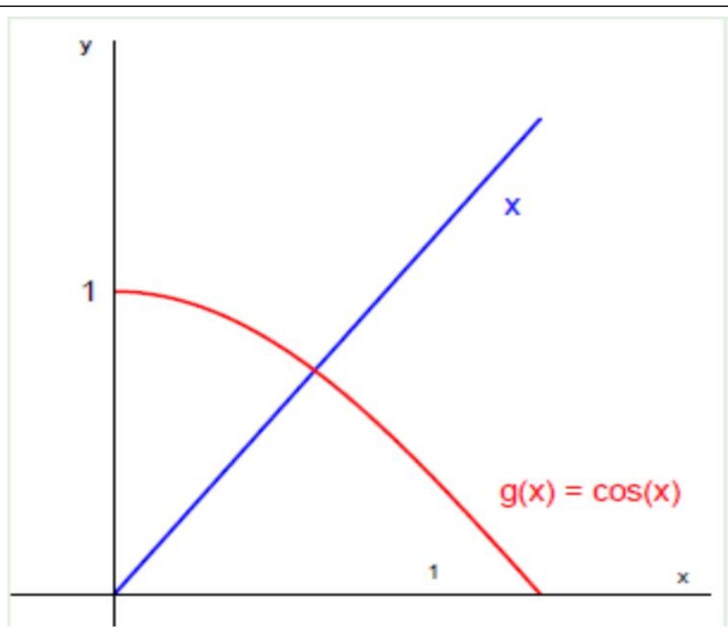
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

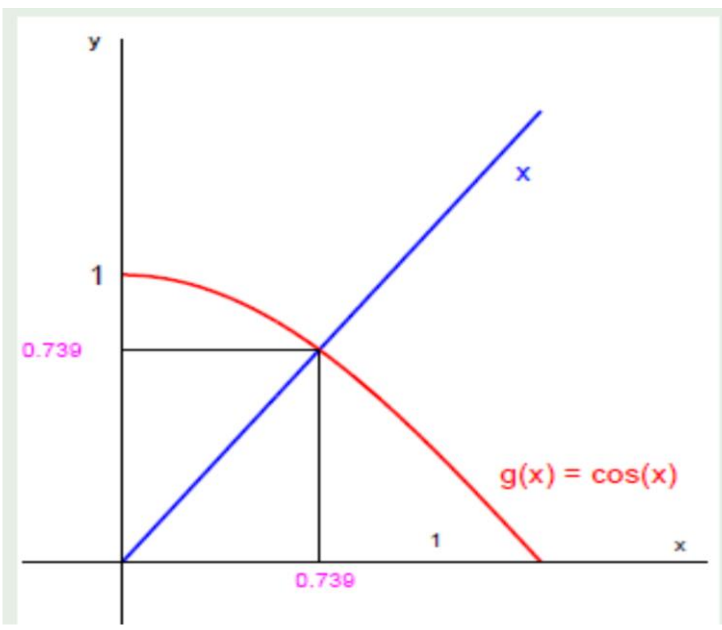
إن طريقة النقطة الصامدة تعتبر سهلة من الناحية النظرية ومن الناحية الهندسية. الدالة $g(x)$ سوف تمتلك نقطة صامدة في الفترة $[a, b]$ عندما يتقاطع منحني الدالة مع المستقيم $y=x$. على سبيل المثال نأخذ بنظر الاعتبار الدالة:

$$f(x) = x - \cos(x)$$

$$x = \cos(x)$$

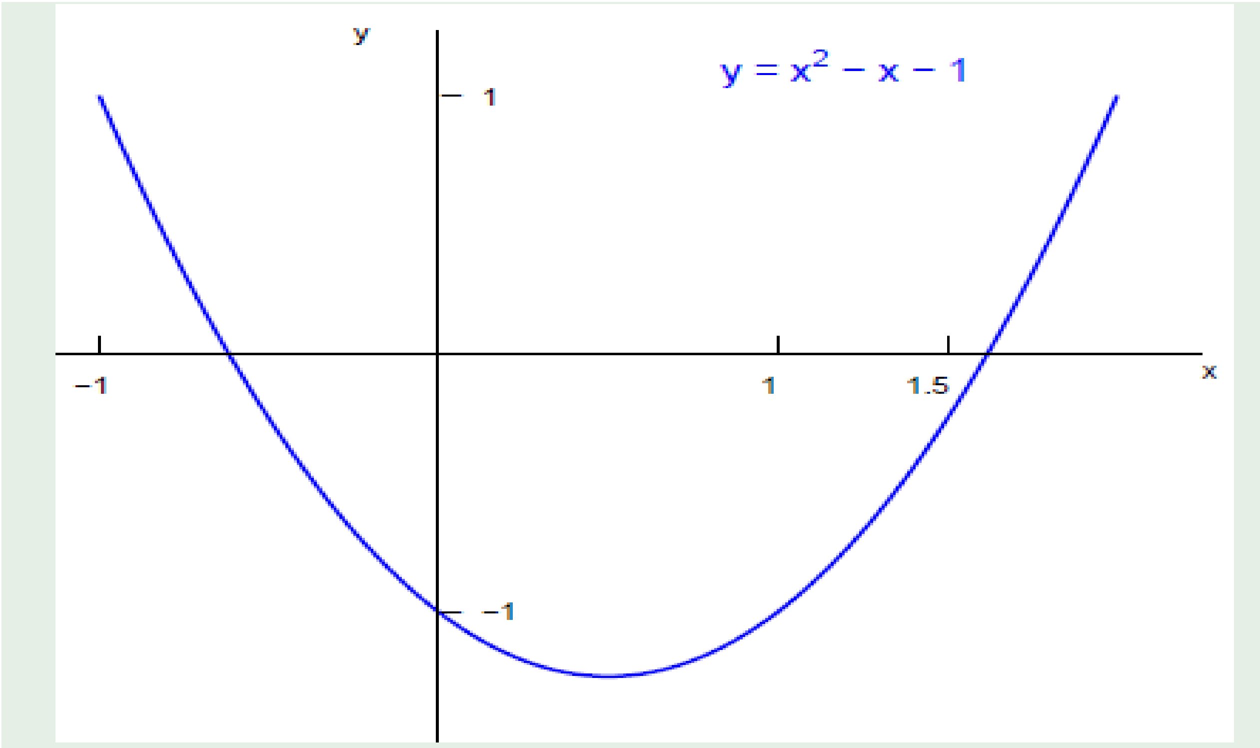
لاحظ رسم الدالة ونقطة التقاطع ما بين مخططي الدالتين $g(x)$ و $y=x$.





مثال: قم بإيجاد جذور المعادلة التالية باستخدام طريقة النقطة الصامدة:

$$f(x) = x^2 - x - 1$$



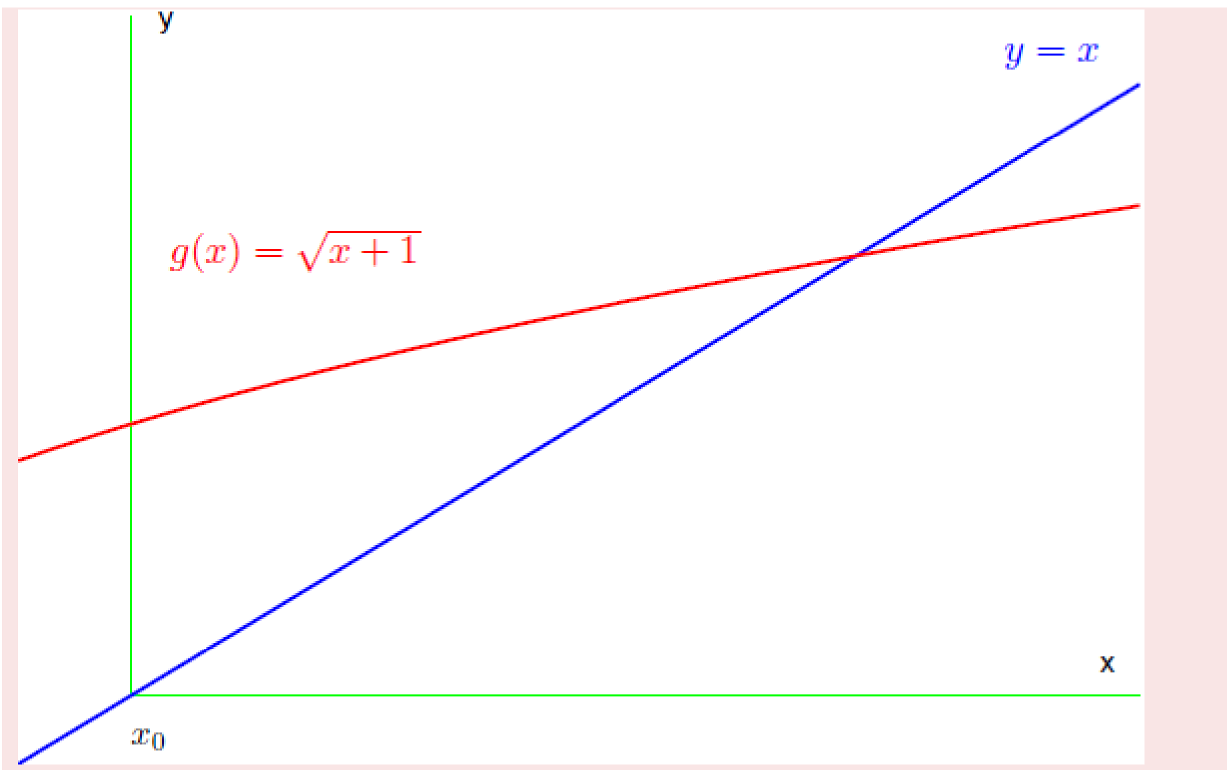
يمكن إيجاد أكثر من صيغة لـ g(x) إحدى هذه الصيغ هي كالتالي:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

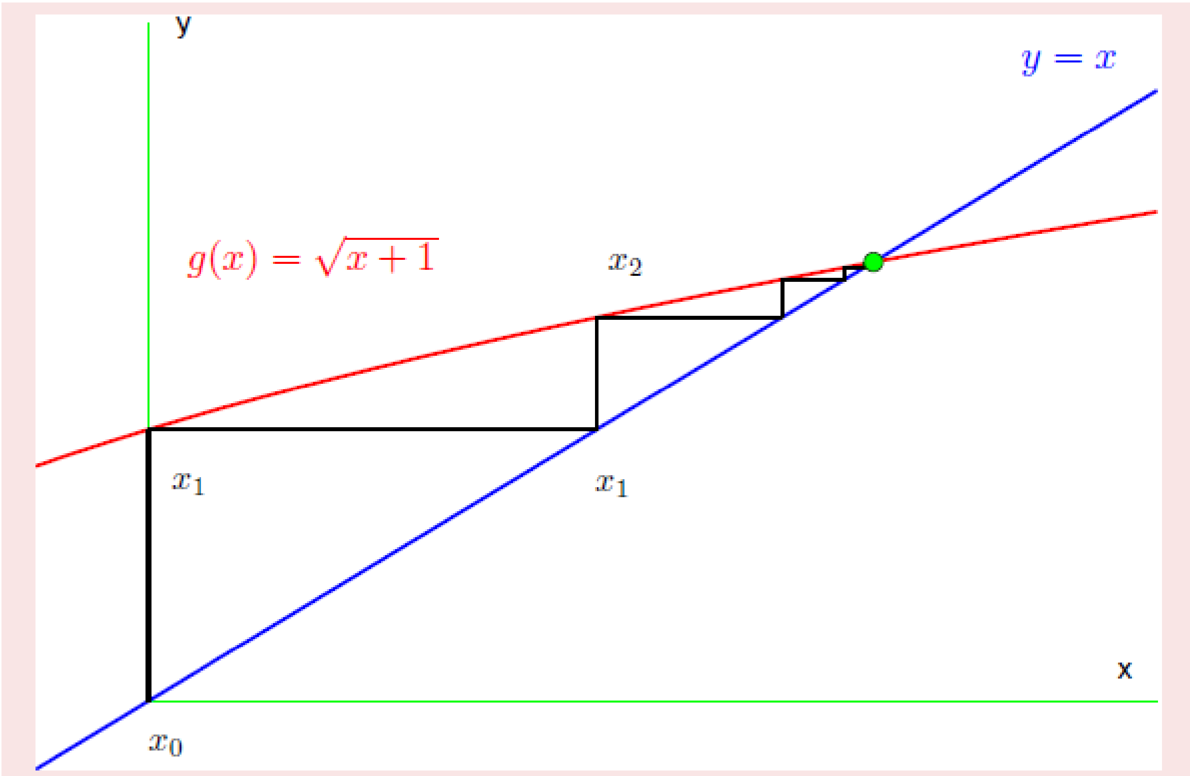
$$x = \pm\sqrt{x+1}$$

$$g(x) = \sqrt{x+1}$$



Fixed Point: $g(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad x_0 = 0$

n	p_n	p_{n+1}	$\lvert p_{n+1} - p_n \rvert$
1	0.000000000	1.000000000	1.000000000
2	1.000000000	1.414213562	0.414213562
3	1.414213562	1.553773974	0.139560412
4	1.553773974	1.598053182	0.044279208
5	1.598053182	1.611847754	0.013794572



يمكن كتابة صيغة أخرى لـ g(x):

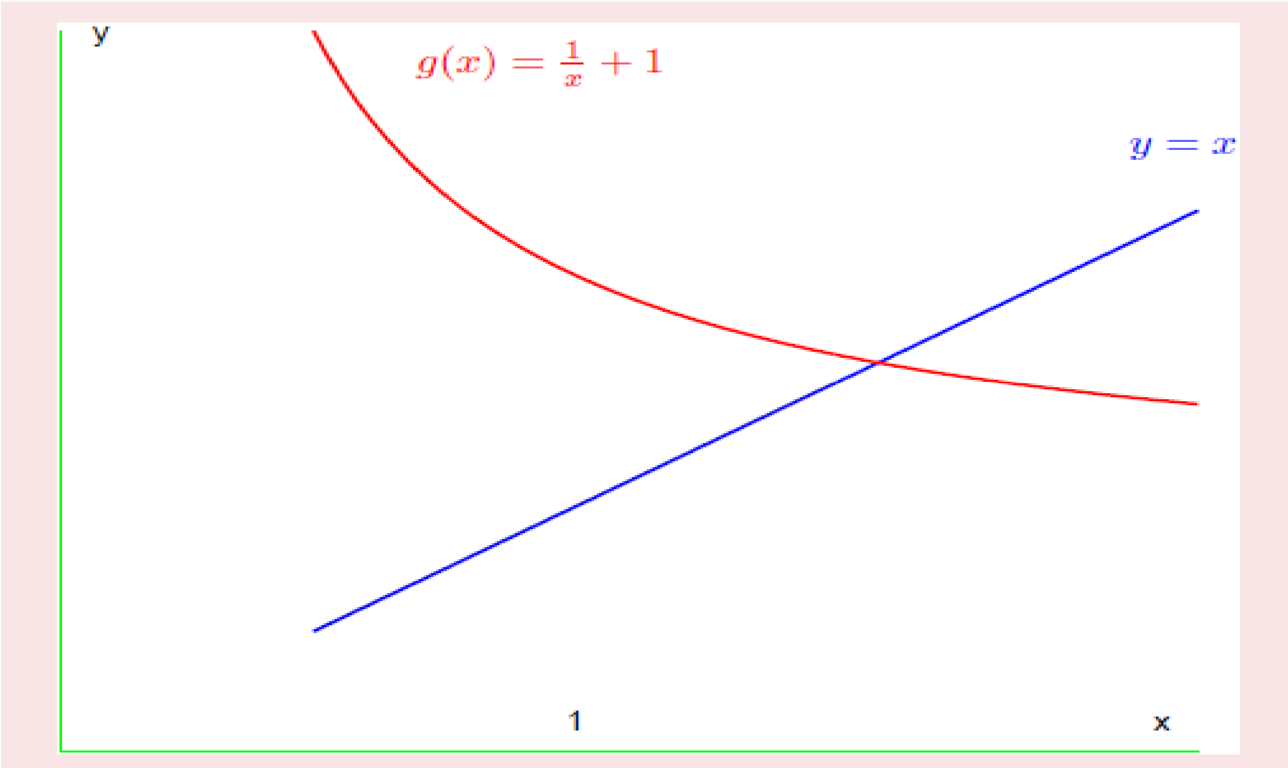
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

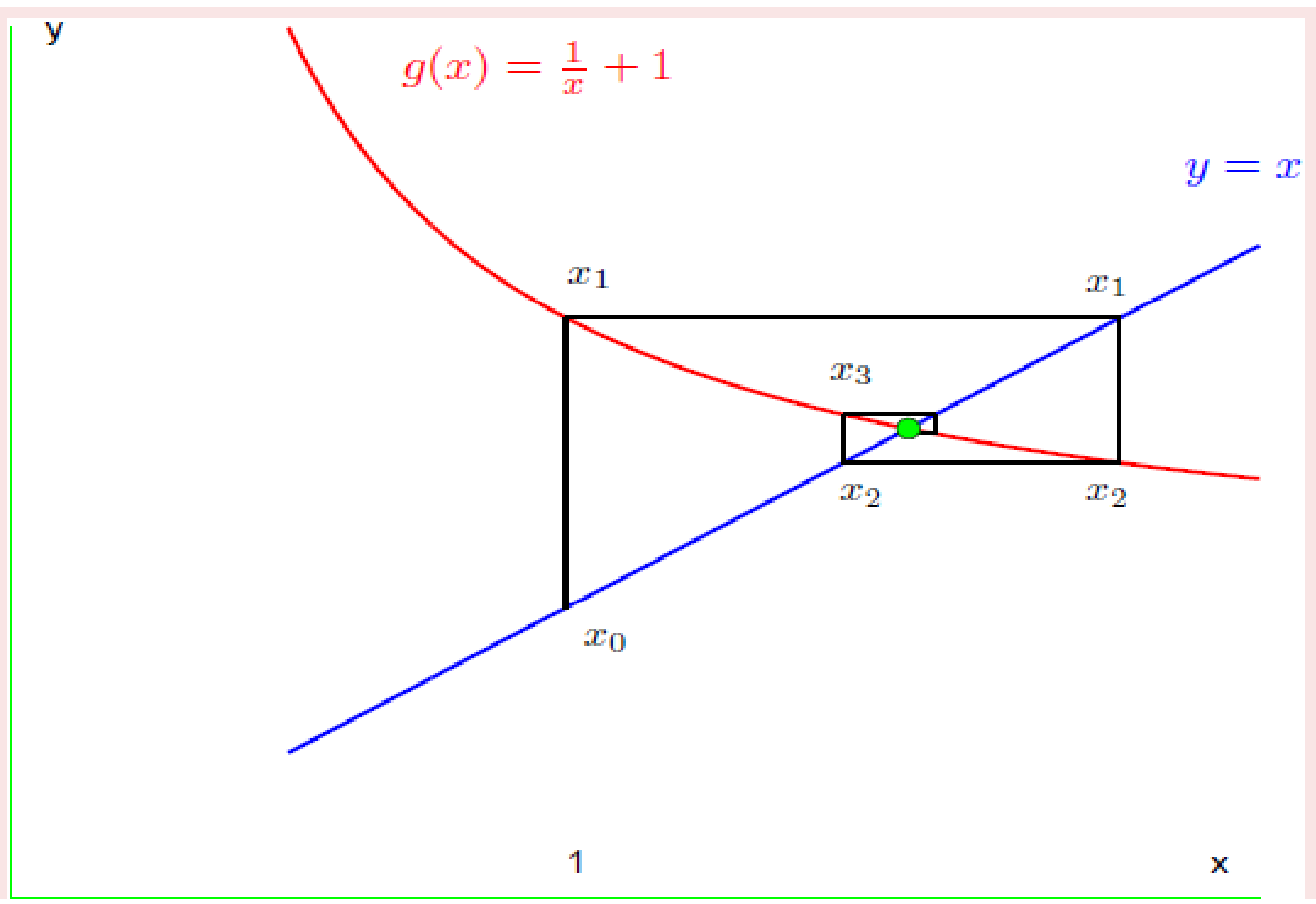
$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x}$$



Fixed Point: $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ $\quad x_0 = 1$			
n	p_n	p_{n+1}	$\lvert p_{n+1} - p_n \rvert$
1	1.000000000	2.000000000	1.000000000
2	2.000000000	1.500000000	0.500000000
3	1.500000000	1.666666667	0.166666667
4	1.666666667	1.600000000	0.066666667
5	1.600000000	1.625000000	0.025000000



مثال: جد جذر المعادلة التالية باستخدام طريقة النقطة الصامدة:

$$f(x) = x^2 - x - 3 = 0$$

يمكن كتابة المعادلة $x=g(x)$ بأكثر من صيغة والصيغ التالية جميعها تكافئ المعادلة المعطاة:

1. $x = 1 + \frac{3}{x} = g_1(x)$
2. $x = x^2 - 3 = g_2(x)$
3. $x = \frac{9x - x^2 + 3}{8} = g_3(x)$
4. $x = \frac{x^2 + 3}{2x - 1} = g_4(x)$

يوجد جذر للمعادلة في الفترة [1, 2] لذلك نختار قيمة $x_0=2.5$ ونبدأ باستخدام جميع الصيغ التكرارية لإيجاد الجذر للمعادلة أعلاه.

N	$X_{n+1}=g_1(n)$	$X_{n+1}=g_2(n)$	$X_{n+1}=g_3(n)$	$X_{n+1}=g_4(n)$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1	2.2	3.25	2.40625	2.3125
2	2.36364	7.5625	2.35828	2.302802
3	2.26923	54.1914	2.33288	2.302776
4	2.32203	2933.71	2.31920	2.302776
5	2.29197	8606642	2.31176	2.302776
6	2.30892	7.41×10^{13}	2.30770	2.302776

يلاحظ من الجدول بأن القيم التكرارية التي تتضمن الدوال g_1، g_2 و g_3 تتقارب للجذر المضبوط كلما زادت قيمة n، بينما تتباعد القيم المولدة من الصيغة g_2. كما يلاحظ أيضا من العمود الأخير بأن المراتب الست الأولى تتطابق في كل من القيم التقريبية x_3، x_4، x_5 و x_6 مما يدل على أنها تتطابق مع المراتب الست الأولى من الجذر المضبوط للمعادلة.

س/ كيف نختار الدالة g بحيث نضمن تقارب القيم المولدة من الصيغة التكرارية $x_{n+1}=g(x_n)$؟
ج/ وذلك بإعطاء الشروط الكافية للتقارب. إن الشرط الكافي لتقارب الصيغة التكرارية $x_{n+1}= g(x_n)$ هو أن:

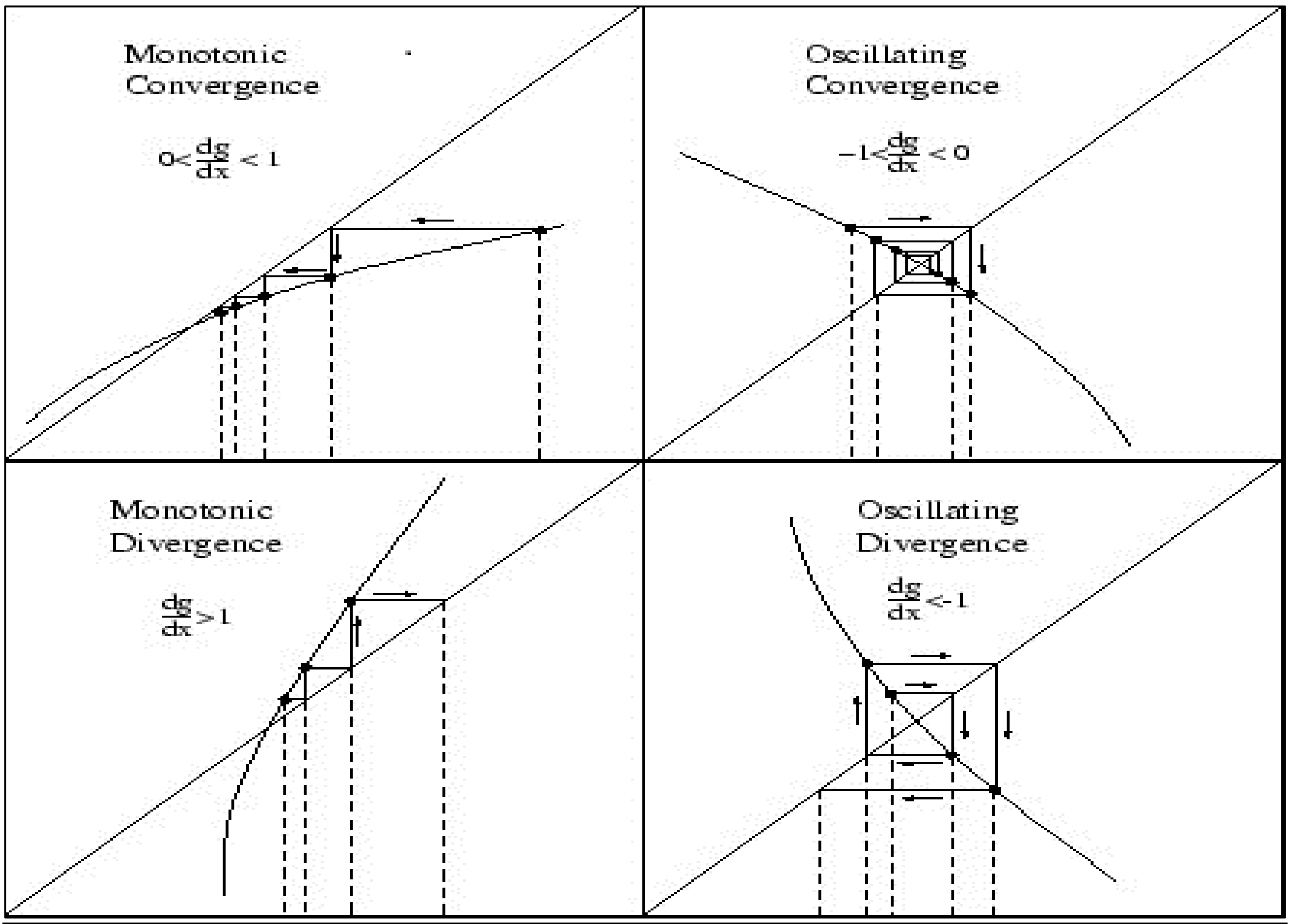
$$|g'(x)| \le k < 1$$

في المثال السابق نلاحظ بأن الشرط أعلاه يتحقق بالنسبة إلى الدوال g_1، g_3، g_4 ولكنه لا يتحقق في الدالة g_2 مما يوضح سبب تقارب الصيغ جميعها ما عدا الصيغة التي تتضمن g_2.

إذاً للمثال السابق:

1. $g_1(x)= 1+3/x$,　　$g'_1(x)= -3/x^2$,　　$|g'_1(2)| = 0.75 < 1$.
2. $g_2(x)= x^2 - 3$,　　$g'_2(x)=2x$,　　$|g'_2(2)| = 4 > 1$.

وهكذا باقي الدوال نختبرها بنفس الطريقة.
لاحظ الشكل التالي والذي يوضح تأثير قيمة المشتقة على تقارب أو تباعد الحل إلى أو عن الجذر المطلوب إيجاده ونوع التقارب أو التباعد.



البرنامج بلغة ماتلاب:

```
clc
g=inline('(x^2+3)/(2*x-1)');
x0=input('x0=');
n=input('n=');
for i=1:n
    x1=g(x0);
    disp(x0)
    if abs(x1-x0)<0.001
        break
    else
        x0=x1;
    end
end
```

النتائج التي تظهر بعد التنفيذ:

x0=2.5

n=20

2.5000

2.3125

2.3028

واجب (عملي): جرب الصيغ الأخرى لـ g(x) والموجودة في المحاضرة وقارن بينها من ناحية التقارب إلى الجذر المطلوب ومن ناحية سرعة التقارب.

واجب: قم بحل كل من الدوال التالية بطريقة النقطة الصامدة:

1. $f(x)=x^3-7x+2$ 2. $f(x)=x^2-5$ 3. $f(x)=x-e^{-x}$